FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound
A.M.N.
1916

# NOVA ACTA
# ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE
## TOMVS I.

PRAECEDIT HISTORIA EJVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCLXXXIII.



*PETROPOLI*
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCLXXXVII.

16.70298 April 25

# AVERTISSEMENT.

*Fidèle aux engagemens que l'Académie Impériale des Sciences avoit pris à la célébration de ſon Jubilé, elle avoit depuis ce temps là jusqu'à l'année 1783 excluſivement, publié deux volumes de ſes Actes pour chaque année. Des rétards qu'il ſeroit trop long de détailler ici & qui d'ailleurs n'intéreſſent point le public, ont été cauſe qu'elle eſt reſtée en arriere de près de quatre ans. Ainſi non obſtant la proviſion de mémoires qu'elle poſſede, ſurtout pour les deux Claſſes de Mathématiques pure & appliquée, elle n'a vu d'autre moyen pour remédier à cet inconvénient que de finir l'ancienne collection avec le XII^e Volume, & d'en recommencer une nouvelle ſous le titre de* Nova Acta, *dont on ne donnera qu'un volume pour chaque année.*

*Cette nouvelle ſuite des Actes, dont on préſente ici le premier volume, ne différera de la collection précédente, qu'en ce que la partie hiſtorique de chaque volume ſera ſuivie d'un extrait en françois des mémoires, qu'il contient.*

*Au reſte l'Académie n'a pas pu choiſir une époque plus convenable pour rechanger le titre & la forme de ſes mémoires que l'année 1783, où* Sa Majeſté Sa très gracieuſe Protectrice *lui a renouvellé* Sa *haute bienveuillance par une marque bien éclatante, en nommant pour la diriger, une perſonne dont le zèle pour le progrés des connoiſſances utiles auſſi bien que ſes propres lumieres ont déja remporté depuis longtemps l'admiration du monde littéraire.*

---

TABLE.

# TABLE.

## HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCLXXXIII.

Avec une Planche.

HISTOIRE. Pag.

*Oukaze de* Sa Majeſté Impériale. - - - - - - 4.

*Premiere Séance préſidée par S. E. Madame la Princeſſe* de Daſchkaw. - - - - - - - - - - 6.

*Reception de deux aſſociés externes Mrs.* Robertſon *&* Blake. 8.

*Acquiſition d'une belle collection de minéraux Suédois.* - - ibid.

*Diſtribution des médailles frappées ſur l'inauguration de la Statue équeſtre de* Pierre le Grand. - - - 9.

*Promotion de Mrs. les Adjoints* Géorgi *&* Fuſs *au grade d'Académicien ordinaire.* - - - - - - - ibid.

*Acquiſition de la magnifique collection du* D. Fothergill. - 10.

*Promotion de l'Eleve* Socolof *au grade d'Adjoint, & de M. le Prof.* Inohodzof *au grade d'Académicien ordinaire.* - - - - - - - - - - 11.

*Aſſemblée publique du* 11 *Mars, & adjudication du Prix ſur la fructification des plantes cryptogames.* - 12.

*Vocation de M. le Prof.* Ferber. - - - - - - - 14.

)( 3 *Acqui-*

Pag.

*Acquiſition d'une machine électrique, avec un appareil complet.* - - - - - - - - 15.

*Penſion accordée à M.* de Magellan. - - - - - - 16.

*Discours de reception de M.* Ferber, *avec la réponſe du Secrétaire.* - - - - - - - - ibid.

*Reception de Msgr. l'Amiral* Greig *au nombre des Honoraires* 20.

*Mort de M.* Leonhard Euler. - - - - - - 21.

*M.* Lexell *nommé pour remplacer le defunt.* - - - - 22.

*Seconde Aſſemblée publique tenue le* 10 *Octobre.* - - ibid.

*Aſſemblée en mémoire de feu M.* Euler. - - - - - - 26.

*Penſion accordée à M.* de Lalande. - - - - - 27.

*Reception de Mrs.* Lagus *& Baron* de Paccaſſi *au nombre des Correſpondans.* - - - - - - ibid.

*Acquiſitions & améliorations.* - - - - - - 28.

OUVRAGES *imprimés ou manuſcripts, machines & inventions, productions d'hiſtoire naturelle, & curioſités préſentés à l'Académie en l'année* 1783. - - 29.

DISCOURS, *lettres, rapports & extraits, adreſſés & lus à l'Académie.*

*Obſervation aſtronomique faite à* Lamego, *ville de Portugal, le* 12 *Novembre* 1782, *du paſſage de Mercure ſur le disque du Soleil.* - - - - - - 58.

*Lettres de M. le D.* Janſſens *à Ooſterhout, à S. E. M. le Prince* Demétrius de Golitzin, *Miniſtre de la Cour Impériale de Ruſſie à la Haye: ſur des guériſons remarquables, effectuées dans des cas déſeſpérés, par l'emploi de l'air fixe.* - - - - 59.

Recher-

Pag.

*Recherches ſur la nouvelle Planète découverte par M.* Herſchel *& nommée par lui* Georgium ſidus. *Par M.* Lexell. - - - - - - - - 69.

*Réflexions ſur la néceſſité d'étudier la vertu des plantes indigènes. Par M.* Lepechin. - - - - - 83.

*Rapport au ſujet d'un nouvel Inſtrument du Capitaine* Burdett, *nommé Compas optique. Par M.* Lexell: *avec une planche.* - - - - - - - 111.

*Rapport fait à l'Académie au ſujet d'un Ouvrage de M. l'Abbé* Rochon, *qui a pour titre: Recueil de Méchanique & de Phyſique. Par Mrs.* Roumovski, Fuſs & Lexell. - - - - - - 115.

*Lettre de M. le Conſeiller d'Etat* Alexandre de Khrapovitski *à M. le Conſeiller de Collèges* Pallas, *avec les obſervations de ce dernier ſur un blé, cru ſauvage.* - - - - - - - - 120.

*Précis des mémoires couronnés par l'Académie ſur le mouvement diurne de la Terre. Par M.* Roumovsky. 122.

*Rapport au ſujet d'un nouvel Inſtrument nautique envoyé & ſoumis à l'approbation de l'Académie par M.* de Magellan. *Signé par Mrs.* Roumovski, Krafft & Lexell. - - - - - - - - - - 141.

*Extrait du Programme pour le Prix de* 1785. - - - 151.

*Examen du Livre intitulé* Parerga hiſtorica. *Par M.* Stritter. - - - - - - 155.

*Sur le Spath-fluor de Cathérinenbourg. Par M.* Pallas. 157.

*Eloge de M.* Léonhard Euler. *Par M.* Fuſs. - - - 159.

MORTS. - - - - - - 213.

EX-

Pag.

EXTRAIT *des Mémoires contenus dans ce Volume.*

*Claſſe de Mathématique.* - - - - - - 221.
*Claſſe de Phyſico-Mathématique.* - - - - - 229.
*Claſſe de Phyſique.* - - - - - - - 245.
*Claſſe d'Aſtronomie.* - - - - - - - 260.

---

## NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS TOMVS I.

Cum XIV. Tabulis aeri inciſis.

MATHEMATICA Pag.

LEONH. EVLER. *Conſiderationes ſuper traiectoriis tam rectangulis quam obliquangulis. Tab. I. fig.* 1 — 7 3.

—— —— *Novae demonſtrationes circa diviſores numerorum formae* x x + n y y. - - - - 47.

—— —— *Inveſtigatio curuarum quae ſimiles ſint ſuis euolutis vel primis, vel ſecundis, vel tertiis, vel adeo ordinis cuiuscunque. Tab. II. fig.* 1 — 7. *Tab. III. fig.* 8 — 13 - - - - 75.

PHYSICO-MATHEMATICA

LEONH. EVLER. *De motu globi heterogenei ſuper plano horizontali, vna cum dilucidationibus neceſſariis ſuper motu vacillatorio. Tab. VII. fig.* 1. 2 - - 119.

ANDR. IOH. LEXELL. *Disquiſitio de Theoremate quodam ſingulari Cel.* Lamberti, *pro aeſtimandis temporibus quibus arcus ſectionum conicarum deſcribuntur a corporibus, quae ad alterutrum ſocum attrahuntur*

Pag.

*buntur viribus reciproce proportionalibus quadratis diſtantiarum. Tab. IV. fig. 1 —— 6. Tab. V. fig. 7. 8* - - - - - - - - 140.

NICOL. FVSS. *Determinatio motuum penduli compoſiti bifili ex primis Mechanicae principiis petita. Tab. VI. fig. 1 —— 5* - - - - - - 184.

—— —— *Additiones analyticae ad Diſſertationem de motu penduli bifili.* - - - - - - - 203.

IAC. BERNOULLI. *Sur le mouvement gyratoire d'un corps attaché à un fil extenſible. Tom. VII. fig. 3. 4* - - - - - - - - 213.

PHYSICA

C. F. WOLFF. *De ordine fibrarum muſcularium cordis Diſſertatio V. De actione fibrarum externarum ventriculi ſiniſtri.* - - - - - - - 231.

—— —— *Explicatio trium tabularum anatomicarum ad quinque priores Diſſertationes: de ordine fibrarum cordis, (quibus de fibris tractatur ventriculorum externis), pertinentium.* - - - - - - 260.

J. J. FERBER. *Reflexions ſur l'ancienneté rélative des roches & des couches terreuſes qui compoſent la croute du globe terreſtre. Seconde Section.* - - 297.

I. G. GEORGI. *Disquiſitio chemica ſubſtantiae cuiusdam ſalinae, quam Ruſſi fabricantur & aurifabris ſub nomine* Salarka *vendunt.* - - - - - - 323.

I. LEPECHIN. *Noua ſpecies menthae deſcripta. Tab. VIII.* 336.

I. T. KOELREVTER. *Lina hybrida.* - - - 339.

P. S. PALLAS. *Piſcium novae ſpecies deſcriptae. Tab. IX. X. XI.* - - - - - - 347.

Pag.

## ASTRONOMICA

P. INOCHODZOW. *Obſervationes aſtronomicae* Wologdae *anno* 1785. *habitae.* - - - - 363.

—— —— *De ſitu geographico vrbis* Petroſawodsk, *deducto ex obſervationibus aſtronomicis anno* 1785 *inſtitutis.* - - - - - - - 367.

STEPH. RVMOVSKI. *Commentatio de tranſitu Mercurii per discum Solis anno* 1786. *die* $\frac{23}{4}$ $\frac{\text{April.}}{\text{Maii.}}$ *tempore civili Petropoli obſeruato. Tab. VII. fig.* 5 376.

W. L. KRAFFT. *Sur la ſurface géométrique de la Ruſſie ſelon la nouvelle Carte générale de cet Empire publiée par l'Académie.* - - - - 389.

J. ALB. EULER. *Extrait des obſervations météorologiques, faites à St. Pétersbourg en l'année* 1783, *ſuivant le nouveau ſtile.* - - - - - 401.

HISTOI-

# HISTOIRE

## DE

# L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

## DES

# SCIENCES.

# HISTOIRE
## DE
# L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
## ANNÉE MDCCLXXXIII.

L'Année 1783 a été pour l'Académie Impériale des Sciences, une des plus fertiles en événemens de tout genre: elle ſera époque dans ſon Hiſtoire.

L'Académie ſe trouvoit dans les deux dernieres années entrainée dans une diſpute avec ſon Directeur, à qui elle ſe voyoit dans la néceſſité de faire de temps en temps de juſtes oppoſitions contre plus d'une eſpèce de ſes démarches.

Tirons ici le rideau ſur les ſuites facheuſes & nuiſibles, que l'autorité du Chef aigri ſe permit de faire naitre dans les affaires académiques, & ſur l'état affligeant dans lequel ſe trouverent au commencement de cette année 1783, par une ſuite de procédés irréguliers, presque tous les Academiciens; lorsque, le 24 Janvier, il plut à SA MAJESTÉ notre très gracieuſe Impératrice et Protectrice de mettre fin à

 toutes

toutes leurs plaintes en conférant la Direction de Son Académie, à *Son Excellence Madame la Princeſſe de Daſchkaw, née Comteſſe de Worontzow*, Dame du Palais & Chevalier de l'Ordre de Ste. Cathérine.

Cette grace & marque rénouvellée de la haute bienveillance de SA MAJESTÉ fut annoncée à l'Académie dans une Aſſemblée extraordinaire convoquée pour le Samdi 28 Janvier, où fut lu l'Oukaze émané du Throne & adreſſé à l'Académie par le haut & dirigeant Senat, en ces termes.

N°. 1066.

Указъ ЕЯ ИМПЕРАТОРСКАГО ВЕЛИЧЕСТВА Самодержицы Всероссїйской, изъ Правительствующаго Сената Санктпетербургской Академїи Наукъ.

По имянному Указу, данному Сенату сего Генваря 24 дня за собственноручнымъ ЕЯ ВЕЛИЧЕСТВА подписанїемъ, въ коемъ написано: „Всемилостивѣйше „препоручаемъ МЫ ди„рекцїю надъ Санктпетербург„скою Академїею Наукъ НА„ШЕЙ Статсъ-дамѣ Княгинѣ „Дашкавой„ Правительствующїй Сенатъ приказали: о семъ Всемилостивѣйшемъ ЕЯ ВЕЛИЧЕСТВА соизволенїи помянутой Госпожѣ Статсъ-дамѣ

объявя

N°. 1066.

Oukaze de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE, l'Autocratrice de toutes les Ruſſies, du dirigeant Senat à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg.

D'après un Ordre ſpéciel de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE, donné au Senat ce 24 Janvier & ſigné de la main de SA MAJESTÉ dans lequel il eſt dit "Nous „conferons très-gracieuſement „la Direction de l'Académie „des Sciences de Saint-Péters„bourg à Notre Dame du Pa„lais, *la Princeſſe de Daſchkaw*" le dirigeant Senat a ordonné de notifier cette très gracieuſe volonté à la dite Dame du Palais

&

объявя въ Сепатѣ привесть къ присягѣ, что и учинено Генваря 27 дня 1783 года.

*Оберъ Секретарь Осипъ Лашкевичъ.*
*Секретарь Карлъ Северинъ.*
*Регистраторъ Петръ Степановъ.*
*1го департамента.*

& de la ſaire prêter le ſerment, ce qui a été ſait ce 27 Janvier 1783.

*Premier Secrétaire Joſeph Laſchkevitſch.*
*Secrétaire Charles Severin.*
*Regiſtrateur Pierre Stepanof.*
*Du 1er Département.*

Les Académiciens & Adjoints, pénétrés de la plus reſpectueuſe gratitude, ſe rendirent au ſortir de cette Aſſemblée chez leur nouveau Directeur, pour Lui témoigner leur joye & ſe recommander à Sa bienveuillance.

Cette nomination mit auſſi fin aux fonctions de la Commiſſion académique établie en 1766, dont les membres avoient été choiſis parmi les Académiciens pour diriger ſous la Préſidence du Chef, les affaires économiques & les divers départemens dépendans de l'Académie: & il fut conſtitué par un ſecond Oucaze, qu'ils ſeront nommés & engagés au ſervice de l'Académie deux Conſeillers de la 6e claſſe pour aſſiſter le Directeur dans la geſtion des affaires économiques, & un Thréſorier de la 8e Claſſe avec des Jurés, pour l'adminiſtration de la caiſſe des dépenſes.

En vertu de cet Ordre furent engagés auprès de Madame la Princeſſe *de Daſchkaw*, Mrs. le Lieutenant-Colonel *Ouſchakof* & le Conſeiller de Cour *Kozodavlef*, en fonction de Conſeillers aſſiſtans, & M. le Major *Riabof*, en qualité de Thréſorier (*).



(*) Son Excellence obtint de SA MAJESTÉ que les deux premiers fuſſent avancés le 28 Juin de la même année au grade de Conſeiller de Collège: & quelque temps après M. Riabof fut nommé Conſeiller de Cour.

Madame la Princeſſe ne tarda pas de prendre place de ſon nouvel emploi: Elle ſouhaita que M. Euler le plus ancien de l'Académie l'introduiſit, elle ſe rendit pour cet effet chez cet vénérable Doyen, qui devoit la méner à l'Académie & le prit dans ſon caroſſe. Etant arrivée, Son Excellence y trouva aſſémblés tous les Académiciens & Adjoints, & voyant au moment qu'elle voulut s'aſſeoir, que M. Euler ne ſe trouvoit pas placé ſuivant ſon ancienneté & ſon mérite, ne voulant d'ailleurs pas donner de l'embarras à ce reſpectable vieillard & le faire paſſer autour de la table & des chaiſes, elle lui dit le plus obligeamment du monde: "Vous n'occupez pas votre chaiſe, „ Monſieur, mais à quelque place que vous vous mettiez „ elle devient inſtamment la premiere". Madame la Princeſſe ayant ſur cela pris poſſeſſion du fauteuil de Préſident, elle adreſſa à toute l'Aſſemblee le discours ſuivant.

"En vous aſſurant, Meſſieurs, que le choix que SA MA-„JESTÉ IMPÉRIALE a fait de moi pour préſider ici, m'honore „infiniment: je vous prie de croire que ce n'eſt point ſimplement „une phraſe d'uſage, mais un ſentiment dont je ſuis pénétrée, „que j'exprime. Je conviens ſans peine que je ſuis infé-„rieure en lumieres & en capacité à mes prédéceſſeurs; mais „je ne céderai à aucun d'eux, dans cette intégrité de caractère „qui me portera toujours à me faire un devoir comme un plai-„ſir de rendre juſtice, Meſſieurs, à vos talens. Loin de me „parer de vos dépouilles, je m'empreſſerai de faire connoître à „SA MAJESTÉ le mérite de chacun de vous en particulier, „& l'utilité que tout le corps enſemble rapportera à Son Em-„pire. C'eſt le ſeul avantage que je puis vous promettre de „ma nomination; mais comme il le ſera immédiatement pour „vous, j'eſpère que ma conduite fondée ſur ce principe ſera „renaître parmi vous, Meſſieurs, l'émulation; que chacun de

„vous

„vous en travaillant pour ſa propre gloire, ne regrettera point „ſes fatigues, ni ſes travaux, & qu'enfin par vos ſoins réunis, „les Sciences ceſſeront d'être ſimplement domiciliées ici; mais „que naturaliſées elles jetteront des racines profondes qui ne „pourront que proſpérer, étant ſous les auſpices d'une grande „Souveraine qui honore les Sciences".

"Vous me permettrez, Meſſieurs, qu'en témoignant la „haute conſidération que j'ai pour vous, je vous aſſure d'un „zéle conſtant, autant qu'il ſera en moi, pour l'honneur de „ce Corps".

Le Secrétaire y répondit en ces termes:

Madame!

"Les ſentimens que Votre Excellence vient d'expoſer „dans cette ſéance ſolemnelle, nous rempliſſent d'admiration & „nous penétrent de la plus vive reconnoiſſance; ils promettent „à cette Académie des jours heureux & nous encouragent „à faire tous nos efforts pour nous diſtinguer dans la car„riere, que chacun de nous a choiſie".

"C'eſt dans cette diſpoſition, Madame, que nous Vous „prions de porter aux pieds du Throne nos très reſpectueux „remercimens, & de faire agréer à SA MAJESTÉ, notre très „gracieuſe Protectrice, nos voeux ardens pour la durée de Son „regne, & la conſervation de Sa Maiſon Impériale".

Le Secrétaire remit enſuite quelques ouvrages qui lui avoient été adreſſés pour les préſenter à l'Académie & dont il ſera fait mention ci-après.

Madame la Princeſſe termina enfin cette premiere Séance de ſa Direction, en propoſant pour être reçus au nombre des Aſſociés externes: M.

M. le Docteur *William Robertſon*, Principal de l'Univerſité d'Edimbourg & Hiſtoriographe Royal pour l'Ecoſſe.

M. le Docteur *Joſeph Blake*, Profeſſeur de Chymie à l'Univerſité d'Edimbourg.

La célébrité de ces deux ſçavans étant reconnue, Mrs. les Académiciens applaudirent unanimement à leur reception, ſans ſe ſervir du ſcrutin.

Le premier ſoin de Madame la Princeſſe de Daſchkaw fut de redemander à l'ancien Directeur, tous les papiers qui appartiennent aux Archives de l'Académie, ainſi que les divers ouvrages & préſens qui lui avoient été envoyés pour être préſentés à l'Académie, & que jusqu'ici il avoit trouvé à propos de dépoſer chez lui.

Ce ne fut en conſéquence que vers le commencement de Février que l'Académie reçut la très belle collection de minéraux Suédois, qui lui avoit été envoyée déja en 1781 comme un Souvenir précieux de la viſite dont S. M. le Roi de Suéde GUSTAVE III. a bien voulu l'honorer en 1777, & que le Senateur Comte *Ulric Schaeffer* avoit adreſſée à M. de Domaſchnef pour être remiſe à l'Académie.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw après l'avoir fait retirer de chez M. de Domaſchnef, & transporter au Muſée de l'Académie, elle chargea Mrs. Pallas, Lepechin & Géorgi d'en faire la reviſion: ceux-ci en firent leur rapport à l'Aſſemblée du 10 Février, diſant qu'ils avoient trouvées toutes les pieces de cette précieuſe collection en bon état, & con-

for-

formément au catalogue Suédois qui y avoit été joint. Le Secrétaire fut là deſſus chargé d'en accuſer la réception à S. E. M. le Senateur *Comte de Shaeffer*, & de faire parvenir à ce Seigneur les remercimens de l'Académie.

Ce fut encore à cette même Aſſemblée du 10 Février, que Madame la Princeſſe de Daſchkaw fit remettre 9 médailles en argent, frappées ſur l'inauguration de la ſtatue équeſtre de PIERRE le Grand, que M. le Chambellan de Domaſchnef a rendu des quinze qu'il avoit demandées à l'exemple des autres chéfs de Colleges, il y a déja pluſieurs mois, pour les diſtribuer conformément aux ordres gracieux de Sa Majeſté Impériale, aux perſonnes attachées à l'Académie. Entre ces neuf médailles, il s'en trouva une de la premiere grandeur, une de la moyenne & 7 de la petite eſpèce. La grande médaille fut envoyée à M. Euler le pere: l'Aſſemblée offrit unanimément la moyenne à ſon Secrétaire Jean-Albert Euler, qui accepta avec reconnoiſſance cette marque flatteuſe de l'amitié de Meſſieurs ſes Confrères: Enfin les 7 reſtantes furent diſtribuées ſelon l'ancieneté, en excluant les Académiciens à qui l'ancien Directeur en avoit déja donné.

Pluſieurs papiers académiques que M. de Domaſchnef avoit pareillement gardés chez lui, & rendus enſuite à Madame la Princeſſe de Daſchkaw, furent depoſés à leurs places reſpectives aux Archives.

Le 13 Février Madame la Princeſſe de Daſchkaw adreſſa à la Séance académique la lettre ſuivante, par laquelle S. E. trouva bon de promouvoir Mrs. les Adjoints Géorgi & Fuſs au grade d'Académicien ordinaire.

 "J'ai

"J'ai vu avec plaiſir, Meſſieurs, la juſtice que vous „rendez dans votre reſolution du 23 Janvier aux mérites des „Adjoints Géorgi & Fuſs, en les propoſant unanimement au chef „pour être avancé au grade d'Académicien. Ne doutant pas „que vous n'y ayez été porté uniquement par votre zéle „pour l'honneur de notre Académie, j'applaudis à votre pro- „poſition & déclare par la préſente les dits Meſſieurs Jean „Gottlieb Géorgi & Nicolas Fuſs, Académiciens ordinaires „dans les parties de Sciences qu'ils ont embraſſées, ordon- „nant au Secrétaire de Conférences de leur en expédier les „Diplomes & de me les préſenter pour être ſignés"

*Princeſſe de Daſchkaw.*

Mrs. Géorgi & Fuſs furent en conſéquence reçus & inſcrits au nombre des Académiciens ordinaires, le premier pour la Chymie & le ſecond pour les Mathématiques.

S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw expoſa à l'Aſſemblée du 17 Février la magnifique collection de plantes, inſectes & oiſeaux, peints d'après nature ſur du vélin & diſtribués en 23 volumes, qui avoit précédemment appartenu au defunt D. Fothergill & que Sa Majeſté notre très gracieuſe Impératrice avoit acquiſe pour l'Académie & remiſe encore à M. de Domaſchnef avec ordre de la transporter au Cabinet d'Hiſtoire naturelle; ce qui fut executé après que Mrs. les Académiciens Pallas, Lepechin & Géorgi, en eurent fait, par ordre de Madame la Princeſſe, un catalogue détaillé.

S. E. annonça dans cette même Séance, que Sa Majeſté Impériale venoit d'ordonner à toutes les Impriméries qui ſe trouvent établies dans Ses états, d'envoyer de chaque Ouvrage

vrage qu'elles imprimeront, un exemplaire pour la Bibliothéque Académique, ce qui ne contribuera pas peu à l'augmenter conſidérablement, ſurtout pour la partie Ruſſe. Enſuite comme le chef précédent avoit négligé dans les dernieres années de ſa Direction, de completter la Bibliotheque & d'acquerir pour elle les Ouvrages nouveaux qui ont paru dans toutes les Sciences, Madame la Princeſſe de Daſchkaw chargea Mrs. les Académiciens & Adjoints de dreſſer & de lui préſenter, chacun dans ſa partie, une liſte des continuations & des nouveaux Ouvrages qui manquent à l'Académie. S. E. termina enfin cette ſéance par inviter Mrs. les Académiciens & Adjoints, à avoir directement recours à Elle, toutes les fois qu'ils auront beſoin de ſon aſſiſtance, promettant qu'elle tachera de contenter chacun, autant qu'il ſera dans ſon pouvoir, malgré le temps & la peine que cela pourroit lui cauſer. Mrs. les Académiciens lui en témoignerent leur gratitude & vive reconnoiſſance.

S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw ayant lu les reſolutions favorables, que l'Académie avoit priſes & enrégiſtrées encore ſous la Direction de Mr. de Domaſchnef, à l'égard du Docteur Socolof, Éleve de l'Académie, & les ayant trouvé fondées ſur le témoignage de Mrs. les Académiciens de la Claſſe phyſicale, elle vint dans l'Aſſemblée du 10 de Mars declarer, qu'elle a nommé le dit M. Nicetas Socolof, Adjoint de l'Académie pour la Chymie: Elle fit là deſſus entrer le nouvel Adjoint, qui remercia Madame la Princeſſe & toute l'Aſſemblée de ſon aggrégation.

Sur la repréſentation de quelques Académiciens faite dans cette meme Séance du 10 Mars & appuyée unanimement par toute l'Aſſemblée, Madame la Princeſſe avança encore au

 gra-

grade d'Académicien ordinaire, M. le Profeſſeur extraordinaire Pierre Inochodzov, alors abſent & en voyage pour déterminer par des Obſervations aſtronomiques, la poſition des principaux endroits des provinces méridionales de l'Empire.

Les troubles Académiques n'ayant pas permis, de tenir vers la fin de l'année derniere une Aſſemblée publique, pour decerner le Prix de Botanique, annoncé pour 1782, S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw crut ne devoir pas différer plus long temps cette ſolemnité, & la fixa pour le Samedi 11. Mars.

Cette aſſemblée fut une des plus brillantes: honorée par la préſence des principaux Eccléſiaſtiques, & des Dames & Cavaliers de la premiere diſtinction, ainſi que de celle des Miniſtres des Cours étrangeres. Madame la Princeſſe de Daſchkaw préſida & ouvrit la Séance, en déclarant le ſujet de la convocation, qui étoit de diſtribuer le Prix ſur la queſtion que l'Académie avoit propoſée.

Le Secrétaire continua enſuite en ces termes:

"Le Prix que l'Académie va adjuger devant cet Illuſtre „ Auditoire ſe rapporte à la queſtion botanique, propoſée en 1779 „ ſur la fructification & propagation des fougeres, mouſſes & „ autres végétaux compris ſous le nom générique des plantes „ cryptogames. Les ſentimens des plus ſçavans Phyſiologues ſe „ trouvant très partagés au ſujet de cette fructification, ſur laquelle il n'y avoit que doute & obſcurité, il importoit aux „ progrès ultérieurs de la Botanique d'inviter & d'encourager les „ Phyſiciens, à redoubler leurs efforts pour épier les opérations „ ſecretes de la nature, par lesquelles cette propagation cachée „ ſe fait. C'étoit le but & le déſir de l'Académie, qui „ a aujourd'hui l'honneur d'annoncer à cette Illuſtre Aſſemblée,

„ qu'elle

„ qu'elle ne s'eſt point trompée dans ſon attente. Parmi quatre „ écrits qui lui avoient été adreſſés ſur cet objet intéreſſant, „ elle a eu la ſatisfaction d'en rencontrer un, qui tout compoſé „ d'obſervations originales & nouvelles, traite la queſtion propo„ ſée à fond, avec tant de clarté & de juſteſſe, qu'il ne reſte „ abſolument plus de doute ſur les parties ſexuelles de la fructi„ fication & propagation par graines d'un grand nombre de ces „ plantes. L'Academie déclare par conſéquent que n'ayant ja„ mais couronné de piece plus digne de ſon ſuffrage, elle a una„ nimement reſolu de décerner à ſon Auteur, non ſeulement le „ prix ordinaire de cent Ducats d'Hollande, mais de lui offrir „ encore une recompenſe proportionnée aux deſſins nombreux & „ exacts qu'il a joints à ſon écrit. "

Ce mémoire victorieux écrit en latin & déſigné par la déviſe *Ingeniorum commenta delet dies*, ſe trouva être le quatrieme dans l'ordre du concours. Le Secrétaire ayant après cette proclamation préſenté à Madame la Princeſſe de Daſchkaw, le billet cacheté que l'Auteur couronné pour ſe conformer à l'uſage reçu dans les Académies avoit joint à ſon mémoire, S. E. après en avoir reconnu l'intégrité, l'ouvrit & le rendit au Secrétaire, qui y trouva le nom de

*M. Jean Hedwig*, Docteur en Médecine à Leipzig.

Les billets des trois autres mémoires envoyés au Concours furent jettés au feu.

Le Secrétaire lut enſuite l'énoncé des queſtions, dont l'Académie attend encore les ſolutions, & Madame la Princeſſe en fit diſtribuer les Programmes, imprimés tant en ruſſe qu'en latin.

Son Excellence pria ſur cela l'Aſſemblée d'accorder encore ſon attention à la lecture de deux mémoires importans. Le premier fut lu en Ruſſe par M. le Conſeiller de Cour & Académicien Lepéchin: il traitoit de la néceſſité d'apprendre à bien connoitre les Plantes indigénes. M. le Profeſſeur & Académicien Lexell termina enfin la Séance par un mémoire en françois ſur l'orbite de la nouvelle Planète découverte en Angleterre par M. Herſchel.

L'Aſſemblée ſe ſépara ainſi fort ſatisfaite, & convaincue de plus en plus du bonheur dont jouit l'Académie ſous la direction d'une Dame qui réunit toutes les qualités propres à la faire fleurir.

Le mémoire couronné de M. Hedwig fut imprimé avec toute l'élégance typographique. M. le Conſ. de Colleges Pallas ſe chargea lui-même de la reviſion des feuilles, & les deſſins qui occupent 37 planches furent envoyés à l'Auteur, pour les faire graver ſous ſes yeux par un des meilleurs artiſtes de Leipzig. Enfin l'Académie ayant offert à l'Auteur pour ſes peines, un honoraire extraordinaire, & remis à ſon choix, ou la médaille Académique en or, ou cinquante exemplaires de ſon mémoire victorieux, M. Hedwig préfera & reçut ces derniers.

S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw ayant pris connoiſſance que M. Ferber Profeſſeur du College Illuſtre à Mitau en Courlande ne ſeroit pas éloigné d'accepter une place à l'Académie, elle lui fit offrir des conditions très avantageuſes, que ce celebre Minéralogue ne tarda pas d'accepter. L'Académie le reçut en conſéquence unanimement dans ſa Seance du 24 Avril, & lui fit expédier le Diplome d'Académi-

micien ordinaire, ainſi que la vocation de Profeſſeur pour la Minéralogie.

Ce fut presque dans le même temps que les freres Rospini, Italiens établis à Saint Pétersbourg, expoſerent à la Cour une machine electrique d'une grande force, & avec un appareil très nombreux: elle lançoit des étincelles de 10 pouces, & elle produiſit des effets qui dans ce temps paſſoient pour extraordinaires. L'Académie n'avoit pas encore de pareille machine, & ce fut aſſés pour Madame la Princeſſe de Daſchkaw de former le projet d'en faire acquiſition pour le Cabinet de Phyſique: elle en parla à Sa Majeſté Impériale, & cette Auguſte Protectrice des Sciences & des Arts, qui ne peut rien lui refuſer lorsqu'il s'agit de la gloire & du bien de Son Académie, y acquiesça généreuſement, ordonnant d'en faire l'achat & de transporter ce ſuperbe monument de ſa munificence à l'Académie. Mrs. le Profeſſ. Krafft & le Secrétaire chargés de la recevoir, en firent leur rapport à l'Aſſemblée du 28 Avril, qui pénétrée de reconnoiſſance envers ſon chef, lui adreſſa la lettre de remercimens ſuivante, ſignée par tous les Académiciens & Adjoints:

Madame!

" L'Appareil électrique, dont la munificence de notre „ Auguſte Protectrice vient d'enrichir le Cabinet de Son Aca„démie des Sciences, eſt un nouvel effet du zéle qui anime „ Votre Excellence, pour le bien & l'honneur de cette com„pagnie. "

" Agréés-en, Madame, nos trés-humbles remercimens, „ & daignés être perſuadée que le ſouvenir des avantages que „ nous devons à Votre Excellence, depuis le peu de temps que „ nous

„ nous avons le bonheur d'être ſous Sa Direction ne ſauroit „ s'oublier. "

" La permiſſion de pouvoir dans nos béſoins littéraires „ nous adreſſer librement à Votre Excellence, & en attendre tout „ le ſecours déſiré, la facilité de nous appliquer entièrement à „ l'étude & à la recherche des vérités utiles & intéreſſantes, „ feront chaque jour revivre en nous les ſentimens de la plus „ parfaite reconnoiſſance, & ne manqueront pas d'étendre la „ ſphère des connoiſſances par des nouvelles productions, „ interprètes infaillibles de l'état floriſſant que notre Académie „ va récouvrir ſous Votre direction. "

Le 3. Juillet. Son Excellence vint préſider à l'Aſſemblée des Académiciens; elle propoſa de gratifier M. Jean Hyacinthe de Magellan à Londres, de la penſion annuelle de deux cent roubles, accordée par le reglement à un petit nombre d'Aſſociés externes: ce qui ayant été approuvé & enrégiſtré, le Secrétaire fut chargé de la notification, & la penſion commença avec le 1. Juillet.

M. le Prof. Ferber arriva le 7. Juillet, mais à cauſe des vacances de la moiſſon, il ne put être introduit à l'Académie que le 18. Aout. Madame la Princeſſe de Daſchkaw préſidant, M. Ferber lui adreſſa & à Meſſieurs ſes nouveaux Confreres le discours ſuivant.

Madame,

Meſſieurs!

" La plus pure & la plus douce ſatisfaction qu'un hom- „ me de lettres peut éprouver, eſt celle, de trouver une occa- „ ſion

„ ſion favorable à cultiver les ſciences qu'il aime particuliére-
„ ment, de les enrichir de quelques decouvertes utiles & d'en
„ avancer les progrés au bien de l'état & de l'humanité. Jugez
„ donc, Madame & Meſſieurs, combien la mienne eſt parfaite
„ dans ce moment, qui me promet les moyens de pouvoir con-
„ tribuer en quelque choſe à l'avancement des ſciences utiles,
„ qui ſont l'objet de cette illuſtre Académie. C'eſt Vous, Ma-
„ dame, qui en qualité de Directeur de cette Académie & au
„ nom de Son Auguſte Souveraine, avec votre ſuffrage, Meſ-
„ ſieurs, a daigné m'appeller ici, pour cultiver une branche des
„ connoiſſances phyſiques, également intéreſſante aux vaſtes &
„ riches états de Sa Majeſté Impériale, qu'au Philoſophe, qui
„ cherche à développer les merveilles de la nature & à connoi-
„ tre la compoſition materielle de notre globe. Si je ne con-
„ ſiderois que l'étendûe de cette étude, les difficultés qui l'ac-
„ compagnent, & la foibleſſe de mes propres forçes, je deséſpe-
„ rerois bientot de pouvoir repondre, comme il faut, à la con-
„ fiance flatteuſe, dont Votre Alteſſe & l'Académie Impériale des
„ Sciences m'ont honoré. Mais conſidérant en même tems les
„ motifs qui peuvent & doivent calmer mon inquiétude à ce
„ ſujet, j'oſe me flatter de quelque ſuccés de mes travaux litté-
„ raires, parcequ'ils ſont ſecondés de mains plus puiſſantes que
„ les miennes & de moyens plus efficaces, que ſeroit la bonne
„ volonté, qui m'anime, ſans un pareil ſecours. J'ai vû, j'ai ad-
„ miré de prés la grande Impératrice, la Minerve de notre
„ Siecle, qui protége cette Académie & tous ceux qui y apar-
„ tiennent. Il eſt impoſſible de la voir ſans être pénetré du re-
„ ſpect le plus vif & le plus profond, ni de s'approcher de ſon
„ throne, ſans ſe dévouer à ſon ſervice & ſentir des nouvelles
„ forces à remplir ſes devoirs. La grandeur de Son ame, la
„ ſageſſe, la douceur de Ses paroles, l'humanité & la grace, avec
„ leſquelles Elle daigne écouter le moindre de Ses ſujets, ra-

„ niment le plus timide & inſpirent une noble hardieſſe d'entre-
„ prendre tout ce qui pourroit contribuer au bien public & mé-
„ riter Son auguſte approbation. Son amour décidé pour les
„ ſciences, aux quelles notre auguſte Souveraine a conſacrés ſes
„ loiſirs & les momens qui lui reſtent du ſoin de Son gouvernement;
„ les bienfaits vraiment impériaux que Sa Majeſté a accordés
„ depuis le commencement de ſon Regne à ſon Académie; la
„ générоſité, la munificence, avec lesquelles Elle encourage, &
„ appuie toutes les recherches, utiles non ſeulement à Ses états,
„ mais au genre humain en général, me raſſurent & diſſipent la
„ crainte que j'aurois ſans cela de parcourir la carriére épineuſe,
„ qui méne à la decouverte des vérités nouvelles dans les ſcien-
„ ces, & de méſurer mes foibles connoiſſances minéralogiques
„ avec les talens ſupérieurs des ſavans, qui avant moi ont cul-
„ tivé cette étude avec ſuccés. Ajoutez à cela, Meſſieurs, que
„ Sa Majeſté Impériale a donné à Son Académie, dans la per-
„ ſonne de Son Excellence, Madame la Princeſſe de Daſchkaw, un
„ Directeur, qui préſide à nos travaux, dont les propres lumié-
„ res égalent ſon zéle à remplir les grandes vües de nôtre Au-
„ guſte Souveraine, pour l'avancement des ſciences utiles; vous
„ ne ſerez pas ſurpris de voir que, ſans que j'aie la moindre
„ préſomption de mes talens, je les employe volontiers ſous les
„ auſpices d'une Princeſſe éclairée, qui connoit parfaitement bien
„ les ſecours qu'il faut donner, pour encourager les ſavans dans
„ la réuſſite de leurs travaux. Je craindrois de bleſſer la mo-
„ deſtie, qui fait partie du charactere aimable de Votre Alteſſe,
„ ſi je témoignois en Votre préſence tous les ſentimens de reſpect
„ & de vénération dont je ſuis pénetré. Je m'addreſſe donc à
„ Vous, Meſſieurs mes reſpectables Confrères, Membres & Ad-
„ joints de cette Académie Impériale! Daignez m'aſſiſter de vos
„ conſeils en tout ce qui concerne le bien de cette Académie!
„ Daig-

„ Daignez m'accorder votre précieuſe amitié, & ſoyez aſſurés „ de mon éſtime ſincere, & de ma reconnoiſſance parfaite!"

Le Secrétaire y répondit en ces termes:

„ L'Empreſſement, Monſieur, avec lequel Son Excellence „ Madame la Princeſſe, notre Directrice, s'eſt portée pour vous „ engager au ſervice de cette Académie, les avantages qu'elle „ vous a accordés, & l'unanimité avec laquelle vous avez été „ reçu de cette compagnie, Vous doivent être un ſur garant de „ tous les agrémens que répand ſur la vie d'un Philoſophe, une „ aſſociation uniquement occupée du progrès des connoiſſances „ intéreſſantes & utiles."

„ La réputation diſtinguée que vous ont acquis vos ou- „ vrages, les obſervations ſavantes que vous avez recueillies „ dans vos voyages, & le vaſte champ des recherches nouvelles „ & importantes que vous offrent les richeſſes enſévelies dans „ l'étendue de cet Empire, nous promettent à notre tour des „ contributions conſidérables à nos travaux, nous aſſurent ſurtout, „ que ſans négliger d'amplifier le domaine des découvertes nou- „ velles, vous vous conformerez avec plaiſir aux voeux de Ma- „ dame la Princeſſe & de l'Académie, à les appliquer ſpéciale- „ ment au bien & au profit de la Ruſſie."

„ Vous voudrez bien, Monſieur, me permettre encore „ d'ajouter, que c'eſt ſous les auſpices les plus heureuſes, que „ vous venez de vous lier à cette Académie, qui a le bonheur „ de jouir de la protection ſignalée d'une Impératrice, la Gloire „ de Son ſiecle & les délices des Ses innombrables ſujets, qui „ anime, encourage & recompenſe l'induſtrie & le ſavoir, par- „ tout où ils ſe trouvent, qui ne ceſſe de réiterer ſurtout à

„ Son Académie les marques de Sa haute bienveuillance &
„ qui encore dans cette année vient de le faire de la ma-
„ niere la plus éclatante, en mettant à ſa tête une Princeſſe dont
„ les grandes qualités & l'eſprit éclairé nous aſſurent les ſecours
„ les plus efficaces dans nos travaux littéraires & un bonheur
„ digne d'envie."

Madame la Princeſſe propoſa dans cette même Aſſemblée pour être reçu au nombre des Honoraires regnicoles, S. E. Mr. Samuel de Greig, Amiral de la Flotte de Vaiſſeaux, Chevalier des Ordres de St. Alexandre Nevski, de St. George de la II[de], de St. Wolodimer de la I[re] Claſſe & de Ste. Anne &c.

La reception ſe fit unanimement & M. l'Amiral répondit à la lettre de notification du Secrétaire en cette maniere:

Monſieur!

"J'ai reçu la lettre dont vous m'aves honoré, pour m'an-
„ noncer l'agréable nouvelle, que l'Académie Impériale des Scien-
„ ces, ſur la propoſition de ſon Directeur Son Alteſſe Mada-
„ me la Princeſſe de Daſchkaw, a daigné m'élire membre ho-
„ noraire regnicole; infiniment flatté d'une ſi grande faveur, je
„ vous prie, Monſieur, d'être auprés de cet illuſtre Corps, l'or-
„ gane de mes ſentimens & de vouloir bien en particulier faire
„ agréer mes reſpectueux hommages à la Princeſſe, qui préſide
„ ſi dignement à vos ſavantes aſſemblées, en l'aſſurant, que je
„ ſuis pénétré de ſes bontés, quoiqu'un peu embaraſſé ſur les
„ moiens de juſtifier le choix d'un Académicien, qu'elle a fait
„ en moi."

"Je

"Je vous ſais, Monſieur, bon gré de la maniere obli-
„geante, avec laquelle vous m'avez fait part de la déciſion de
„l'Académie; cela prouve que vous êtes auſſi honnéte, que
„vôtre nom eſt celebre & me fait eſpérer, que vous voudrez
„bien vous charger de Lui en témoigner toute l'étenduë de
„ma reconnoiſſance: Ce ſervice me fera rechercher l'occaſion
„à vous être utile à mon tour & augmentera les ſentimens
„d'eſtime & de conſidération, avec lesquels j'ai l'honneur
„d'être,

Monſieur!

Votre très-humble Serviteur,
*Sam. Greig.*

Cronſtadt
du 20 Août 1783.

Dans une Aſſemblée ordinaire tenue le Lundi 11 Septembre, l'Académicien Fuſs s'acquitta de la triſte charge de notifier le decès de Monſieur Léonhard Euler, qui mourut d'un coup d'apoplexie, le 7 de ce mois, à 11 heures du ſoir, agé de 76 ans 5 mois & 3 jours, après avoir fourni une carriere longue & brillante & fait retentir l'Europe entiere de ſon nom immortel.

Mrs. les Académiciens & Adjoints, avertis de cette perte irreparable que l'Académie venoit de faire par la mort de ſon illuſtre Doyen, & aſſemblés pour cette raiſon en deuil, entendirent la lecture d'un Discours allemand, dans lequel M. le Conſeiller d'Etat actuel de Stehlin, en qualité de plus ancien Académicien, tâcha d'exprimer, combien l'Académie doit regretter la mort de ce grand homme, qui depuis plus de 56 ans a été ſa gloire & ſon plus bel ornement.

Après cette lecture, Mrs. les Académiciens & Adjoints vivement touchés d'une perte ſi grande & ſi généralement ſentie furent d'avis que l'honneur de l'Académie exigeoit, qu'ils fiſſent quelque choſe pour la mémoire d'un nom ſi cher aux ſciences; ils réſolurent en conſéquence unanimement, de faire ériger à leurs depens un monument à feu leur illuſtre Confrère, ſe flattant que Madame la Princeſſe de Daſchkaw ne refuſera pas ſon approbation à cette marque de leur vénération & de leurs regrets. Son Excellence applaudit non ſeulement à cette reſolution, mais promit encore d'y contribuer pour ſa perſonne. Elle fit au reſte tout ce qui étoit en ſon pouvoir pour ſoulager & conſoler la famille affligée du défunt. Elle obtint de Sa Majeſté l'Impératrice une penſion ſur la caiſſe d'Etat pour le fils ainé, Secretaire des Conférences Académiques; & la veuve eut la penſion de mille roubles ſtipulée dans le contract que feu M. Euler avoit paſſé en s'engageant en 1766, pour venir à St. Pétersbourg.

Le 2 d'Octobre, dans une des Séances qui ſuivirent de près cette perte, Madame la Princeſſe de Daſchkaw propoſa M. Lexell pour remplacer feu M. Euler dans la qualité de premier Profeſſeur de Mathématiques. Ce choix fut unanimement applaudi, & M. Lexell obtint par cet avancement une augmentation d'appointement conſidérable.

L'Académie tint le 10 du même mois une ſeconde Aſſemblée publique deſtinée pour diſtribuer les Prix propoſés pour la préſente année. Cette ſolemnité fut encore honorée de la préſence d'un grand nombre de perſonnes de diſtinction de l'un & de l'autre ſexe, des principaux Eccleſiaſtiques & des Miniſtres des cours étrangeres.

Madame

Madame la Princeſſe de Daſchkaw préſida & ouvrit la Séance par le Discours ſuivant:

Обнародованныя отъ Императорской Академїи Наукъ въ 1778 и 1780 году двѣ задачи, 1. не можно ли сыскать несомнительныхъ причинъ доказывающихъ равномѣрное земли около своей оси обращенїе, 2. Изъяснить ѳеорїю машинъ движимыхъ силою огня или паровъ, были причиною приглашенїя сюда почтеннаго сего Собранїя.

Les queſtions publiées par l'Académie Impériale des Sciences en 1778 & 1780; la $1^{re}$, ſur l'égalité du mouvement diurne de la Terre; la $2^{de}$, ſur la théorie des machines miſes en mouvement par la force du feu & des vapeurs: ſont les motifs qui ont engagé l'Académie à inviter cette reſpectable aſſemblée.

Академїя Наукъ не получа къ перьвому ею назначенному сроку никакого удовлетворительнаго сочиненїя на перьвую задачу, отложила до 1783 года, выдавать награжденїе, которое она отъ щедротъ МОНАРХИНИ своей для приращенїя наукъ и въ пользу не только щастливой подъ ЕЯ державою Имперїи, но и всего ученаго свѣта ежегодно опредѣляетъ.

L'Académie n'ayant reçu pour le premier terme du concours, aucune réponſe ſatisfaiſante à la premiere de ces deux queſtions, avoit remis à 1783 la diſtribution des prix que la généroſité de la Souveraine la met en état d'employer annuellement pour l'avancement des Sciences, pour le bien de l'empire heureux ſous Son glorieux regne, & pour l'avantage de toute la republique des lettres.

Изъ полученныхъ сочиненїй три признаны отъ Академїи достойными награжденїя; имена

Parmi les mémoires reçus il y en a trois qui, au jugement de l'Académie, ſont dignes du prix.

на же сочинителей по разпечатанїи бумажекЪ сЪ надписями, каковыя на самыхЪ сочиненїяхЪ ихЪ поставлены, вЪ почтенномЪ вашемЪ присутствїи сдѣлаются извѣстны.

prix. Les noms des Auteurs ſe trouveront dans les billets cachetés & munis de déviſes, que chacun a ajouté à ſon mémoire & qu'on va décacheter en préſence de cette illuſtre Aſſemblée.

Le Secrétaire de Conférences rendit enſuite compte de ce qui regardoit cette diſtribution de Prix.

La queſtion aſtronomique que l'Académie avoit propoſée en 1778 pour ſujet du prix de l'année 1781, & qu'elle avoit enſuite remiſe à cette année 1783, étant:

" D'indiquer des raiſons certaines, s'il en exiſte, au moyen desquelles on puiſſe démontrer l'uniformité du mouvement diurne de la Terre, & ſi ce mouvement n'eſt point uniforme, mais éprouve en effet quelque changement, ſoit par la réſiſtance de l'éther, ſoit par une autre cauſe quelconque, qui agiſſe ſur la Terre: d'aſſigner, quels ſont les phénomènes qui en ſont produits? & quels ſont les moyens de rectifier la meſure du temps à cauſe de cette inégalité du mouvement diurne de la Terre; afin d'avoir un point juſte de comparaiſon entre la meſure de temps des ſiècles paſſés & celle des ſiècles moins reculés?"

L'Académie conformément au rapport que lui ont fait Meſſieurs les Commiſſaires, nommés pour examiner les écrits envoyés au concours, s'eſt déterminée à partager ce Prix, qui eſt de cent Ducats, entre deux mémoires latins, le premier côté No. 1. avec la Deviſe: *Felix qui poteſt rerum cognoſcere cauſas*,

*cauſas*, & l'autre côté No. 3. & déſigné par ces vers pris du 2 livre des métamorphoſes d'Ovide —— *Dies*, *&* *menſis*, *&* *annus*, *ſeculaque*, *&* *poſitae ſpatiis aequalibus*, *horae*. Les billets cachetés ayant été ouverts, on y trouva les noms de M. *Jean Fréderic Hennert*, Docteur en Philoſphie & Profeſſeur de Mathématique à l'Univerſité d'Utrecht, Membre des Sociétés des Sciences de Harlem, Rotterdam, Vliſſingen & Utrecht: Auteur de la 1^ere^ Piece: & M. *Paul Friſi*, Profeſſeur de Mathématiques à Milan & Membre des Académies de St. Pétersbourg, Berlin, Stockholm, Upſal, Copenhagen & des Sociétés de Londres, Harlem, &c. Auteur de la 2^de^ Piece victorieuſe.

En ſecond lieu: l'Académie ayant propoſé en 1780, pour ſujet du Prix de la préſente année le Problème ſuivant:

" Expoſer la Théorie des machines que la force du feu „ou des vapeurs de l'eau fait mouvoir"

elle adjugea ce Prix qui eſt pareillement de cent Ducats, au mémoire françois déſigné par No. 2. qui a pour deviſe *Tentare licet*. Le Billet cacheté ayant été ouvert, on y trouva le nom de M. *Sebaſtien Maillard* Capitaine en ſecond au Corps du Génie de S. M. I. R. & Apoſtolique, & Profeſſeur de Fortification à l'Académie Impériale des Ingénieurs à Vienne.

Les Billets cachetés des autres mémoires envoyés au concours furent brules.

M. le Conſeiller de Cour Roumovski lut un extrait des deux pieces victorieuſes ſur la queſtion aſtronomique, en langue ruſſe.

M. *de Magellan*, Gentilhomme Portugais demeurant à Londres, & Penſionnaire externe de l'Académie, ayant dans le cours de l'année envoyé à S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw un Cercle à rêflexion de ſon invention propre à méſurer les diſtances des Aſtres en mer, Mrs. les Académiciens Roumovski, Krafft & Lexell, qui avoient été nommés pour examiner cet inſtrument, l'ont trouvé d'une grande utilité & par là digne de l'approbation de l'Académie.

M. Lexell en lut une déſcription, ſuivie du réſultat des divers éſſais qu'il a faits de cet inſtrument pour conſtater ſon utilité; ce qui porta l'Académie à l'envoyer au College de l'Amirauté, avec une copie du rapport de Mr. Lexell, & de l'accompagner d'une lettre de recommandation ſignée par S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw.

Le Secrétaire termina la Séance par la lecture de la nouvelle queſtion de minéralogie, que l'Académie propoſe pour ſujet du Prix de l'année 1785, dont le Programme imprimé en Latin & en Ruſſe fut diſtribué à toutes les perſonnes qui ſe trouvoient à l Aſſemblée.

---

M. l'Académicien Fuſs avoit été chargé de faire l'Eloge de feu M. Euler ſon reſpectable maître: il y travailloit avec tant de zéle & d'application, qu'il l'acheva en peu de ſemaines. Madame la Princeſſe en fut très ſatisfaite & en fixa la lecture à la Séance académique du 23 Octobre. Son Excellence y vint vétue en deuïl: tous les Académiciens & Adjoints le furent de même. S. E. Msgr. l'Archeveque de Mohilow honora cette ſolemnité de ſa préſence, & il s'y trouva auſſi pluſieurs Académiciens honoraires, ainſi que les amis & la famille du defunt qui en avoient été avertis. La lecture

lecture fit un effet touchant ſur tout l'auditoire, & un morne ſilence prouva encore plus que les expreſſions les plus fortes de la Rhétorique, combien le defunt étoit généralement regretté.

---

M. *de Lalande*, Aſſocié externe, s'étant toujours prété avec complaiſance & zele aux diverſes commiſſions dont l'Académie l'avoit chargé, ſurtout vers le temps du dernier paſſage de Venus devant le Soleil, où il s'agiſſoit d'expédier pour différens endroits de l'Empire de Ruſſie huit Aſtronome & de les pourvoir des horloges & inſtrumens aſtronomiques néceſſaires, Madame la Princeſſe de Daſchkaw crut devoir reconnoitre ces ſervices, en lui accordant une penſion académique de deux cent roubles. S. E. le fit propoſer à l'Aſſemblée ordinaire du 20 Novembre, & tous les Académiciens y applaudirent unanimement.

Madame la Princeſſe fit encore propoſer dans la même Séance, pour être reçu au nombre des Correſpondans regnicoles.

M. *Guillaume Lagus*, Aide de Camp de S. E. Mr. le Lieutenant-Général & Gouverneur Kaſchkin, à Tobolsk'

dont l'aggrégation ſe fit de la maniere accoutumée par la pluralité des voix.

Huit jours après, à la Séance du 27 Novembre, fut reçu au nombre des Correſpondans étrangers:

M. le Baron *de Paccaſſi* à Vienne, favorablement connu par quelques ouvrages de Mathématiques, qu'il a fait parvenir à l'Académie.

---

Outre les acquiſitions en ouvrages divers dont il a été fait mention ici, Madame la Princeſſe de Daſchkaw n'en a pas fait de moins conſidérables pour la Bibliotheque auſſi bien que pour le Cabinet d'Hiſtoire naturelle. Le premier a été augmenté par des achats conſidérables & le dernier enrichi par des morceaux précieux. Comme Son Excellence poſſede elle même une très belle collection de minéraux, elle a fait parmi les doubles un choix des meilleures pieces & les a données au Cabinet académique: c'eſt ſurtout à cette généroſité que ce Cabinet doit une collection précieuſe de malachites de diverſes eſpeces.

La Typographie a été aggrandie, & tous les autres départemens dépendans de l'Académie ont été mis ſur un meilleur pied. Les Gagès ont été augmentées, & le ſort de pluſieurs perſonnes attachées au Service de l'Académie, amélioré. Et malgré ces dépenſes conſidérables, l'année n'étoit pas encore finie, que Madame la Princeſſe de Daſchkaw n'eut déja, par une ſage économie & par le bon ordre introduit dans l'adminiſtration des affaires, épargné un capital conſidérable dont elle a fait un emploi bien louable, comme on le verra dans l'Hiſtoire de l'année ſuivante.

## OUVRAGES IMPRIMÉS OU MANUSCRIPTS, MACHINES ET INVENTIONS, PRODUCTIONS D'HISTOIRE NATURELLE ET CURIOSITÉS, préſentés ou communiqués à l'Académie pendant le cours de l'Année 1783.

---

Dans l'Aſſemblée du Vendredi 13 Janvier, le Secrétaire des Conferences académiques Jean-Albert Euler, a préſenté de la part de M. Barthez, Chancelier de l'Univerſité de Médecine de Montpelier, le 1$^{er}$ Tome de ſes nouveaux élémens de la Science de l'homme.

—— —— il a lu une lettre de M. Bonnet, datée de Genthood près de Génève le 4 Avril 1784, & adreſſée à Meſſieurs de l'Academie. M. Bonnet envoie le 4$^{e}$ & le 5$^{e}$ Volume de la grande edition de ſes oeuvres, & marque ſa ſurpriſe de ce que le Secrétaire ne lui a pas encore accuſé la reception des trois premiers volumes, qu'il aſſure avoir envoyés à l'Académie deja en 1779. Le Secrétaire lui répondra que ces volumes ne ſont pas parvenus à la Conférence, & que pour ſa perſonne il en a jusqu'à préſent parfaitement ignoré l'envoi. (Ils ſe ſont rétrouvés depuis chez M. de Domaſchneſ, qui les ayant reçu les avoit dépoſé dans ſa Bibliotheque.)

Le 20 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à Meſſieurs de l'Académie, par M. Chivot Profeſſeur de Belles-Lettres à l'Univerſité de Paris, qui envoie un Poème grèc ſur le départ de Leur Alteſſes Impériales Msgr. le Grand Duc PAUL PÉTROVITSCH & Madame la Grande Ducheſſe MARIE FEODOROVNA Son Epouſe, avec une traduction françoiſe & avec le titre *d'Orphée ſur les bords du Tanais.*

—— —— M. le Conſeiller de Collèges Pallas a remis des ſemences de trois plantes de Kamtſchatka: **медвѣжей корень** (Medvaijaï Koren), **кутагарникъ** (Koutagarnic), & **камчига** (Kamtſchiga), que S. E. Msgr. le Procureur Général Prince de Waiſemski recommande, pour être cultivées au jardin botanique.

Le 27 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Aſſeſſeur Stritter datée de Moscou le 17 Janvier, qui envoie de la part de M. le Conſeiller de Cour Bantiſch-Kamentski, employé aux Archives Impériales à Moscou, un ouvrage dont il eſt l'éditeur, ſavoir: *Theophanes Procopowicz, Hiſtoria de certamine Pauli et Barnabae cum Judaizantibus.*

Le 28 Janvier. Voyez le recit de l'Aſſemblée extraordinaire. pag. 4.

Le 30 Janvier. Prémiere Séance préſidée par S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw. Voyez pag. 6.

Le Secrétaire y a préſenté de la part de la Société Royale des Sciences de Göttingue: *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingenſis Tom. IV. per annum* 1781.

Il

Il a lu dans la même Séance: *Obſeruation aſtronomique faite à Lamego, ville de Portugal, le* 12 *Novembre* 1782, *du paſſage de Mercure ſur le diſque du Soleil, par les Sieurs d'Araujo*, que S. E. Msgr. le Comte d'Oſtermann avoit, par ordre de Sa Majeſté l'Impératrice, adreſſée à Madame la Princeſſe de Daſchkaw, pour être communiquée à l'Académie.

—— —— il a ouvert deux pacquets adreſſés à l'Académie. Le 1^er^ contenoit un écrit anglois par M. le Capitaine P. P. Bourdett, intitulé: *An Eſſay and Deſcription of the optical Compaſs.* M. le Prof. Lexell a été chargé de l'examiner & d'en faire ſon rapport à l'Académie. Le ſecond étoit une lettre de M. le Prof. Boeckmann datée de Carlsruh le 14 Avril 1780, qui envoie deux brochures en allemand, *Wünſche und Auſſichten zur Erweiterung und Vervollkommung der Witterungslehre*, & *Carlsruher meteorologiſche Ephemeriden vom Jahr* 1779.

Le 3 Février. M. le Prof. Krafft a préſenté de la part de M. l'Aſſeſſeur & Sous-Bibliothecaire Bacmeiſter: *Hiſtoriſche Nachricht von der metallenen Bildſäule* PETER *des Groſsen*, 8^vo^. dedié à Sa Majeſté Impériale.

Le 6 Février. M. l'Adjoint Géorgi a remis pour la Bibliotheque: *Torberni Bergmann Sciagraphia regni mineralis ſecundum principia proxima digeſti.*

Le Secrétaire a ouvert un lettre adreſſée à l'Académie par M. le Major d'Artillerie Michel Danilof, qui contient quelques obſervations météorologiques faites en divers lieux, entre St. Pétersbourg & Moscou, depuis le 1^er^ Janv. 1781 jusqu'à la fin de 1782.

Le 10 Février. Mrs. les Académiciens ont reçu des médailles d'argent frappées en mémoire de l'inauguration de la Statue équeſtre de PIERRE le Grand. Voyez pag. 9.

Mrs. Pallas, Lepechin & Géorgi ont rapporté, que le Cabinet des minéraux de Suéde, que S. E. Mr. le Sénateur Comte Ulrich de Schaeffer avoit envoyé à l'Académie comme un ſouvenir gracieux de la viſite de S. M. le Roi de Suéde, a été transporté au bâtiment qui contient la Bibliothéque & les Cabinets académiques; qu'ils en ont fait la reviſion conformement aux ordres de Madame la Princeſſe de Daſchkaw & qu'ils ont trouvé tout en bon ordre. (Voyez ci-deſſus pag. 8.)

Le Secrétaire a lû deux rapports de M. Jährig, datés du Lac Gouſinoi, aux frontieres de la Chine près du Lac Baikal, le 15 & 19 Novembre 1782, qui envoie l'Image d'un Idole Indien, avec l'explication de ſes attributs & la traduction allemande d'une priere qu'on lui addreſſe annuellement, ainſi que la traduction de la Chronologie de deux Patriarches mongols, dont l'Académie avoit déja reçu les images, & onze diverſes anecdotes. Tous ces papiers ont été remis à M. le Conſeiller de Collèges Pallas pour en faire uſage dans le ſecond volume de ſon Hiſtoire des Mongols, à laquelle il travaille.

—— —— il a lu une lettre de M. le Prof. Inohodſof, datée de Cherſon le 8 Janvier, qui envoye ſes obſervations aſtronomiques pour la détermination géographique de cette ville, & qui mande ſon depart prochain pour Charkov.

Le 13 Février. Le Secrétaire a lu la lettre de Madame la Princeſſe de Daſchkaw, par laquelle Son Excellence accorde

à

à Mrs. les Adjoints Géorgi & Fuſs le grade d'Académicien ordinaire avec tous les émolumens attachés à ce titre. (Voyez pag. 10.)

Dans la même Aſſemblée le Secrétaire a ouvert une caiſſe de diverſes productions des isles Kouriles, envoyée par M. Reineken, Préſident à Ohodsk, & remiſe à l'Académie par ordre de S. M. l'Impératrice, pour être conſervées au cabinet de curioſités.

M. l'Adjoint Zouyef a envoié par ordre de Madame la Princeſſe de Daſchkaw, toutes les collections qu'il a ramaſſées dans ſon dernier voyage; elles ont été transportées au cabinet d'Hiſtoire naturelle.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le D. Samoilovitſch datée de Paris le 16 Janvier, qui demande à être reçu au nombre des Aſſociés honoraires, & qui envoie par la poſte ſes ouvrages pour être ſoumis à l'examen des Académiciens:

1. Tractatus de Sectione ſymphyſeos oſſium pubis & partu Caeſareo.
2. Lettre ſur les expériences des frictions glaciales pour la guériſon de la peſte & autres maladies putrides.
3. Mémoire ſur l'inoculation de la peſte.
4. Lettre à l'Académie de Dijon avec réponſe à ce qui a paru douteux dans le mémoire précedent.

Ces imprimés ont été donnés à Mrs. les Académiciens de la Claſſe Phyſicale pour les examiner & en faire leur rapport à l'Académie. L'Aſſociation a été refuſée.

Le 17 Février. S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a remis la magnifique collection du D. Fothergill, que Sa Majeſté Impériale a acquiſe pour l'Académie. Elle a été transportée à la Bibliotheque. (Voyez ci-deſſus pag. 10.)

Le 20 Février. Le Secrétaire a lu trois lettres ſur des guériſons remarquables effectuées dans des cas déſeſperés par l'emploi de l'air fixe, écrites par M. le D. Janſſens à Ooſterhout & communiquées à l'Académie par S. E. Mr. le Prince Démétrius de Golitzin, ci-devant Miniſtre de la Cour Impériale de Ruſſie à la Haye.

Le 11 Mars. Voyez ci-deſſus le récit de l'Aſſemblée publique. pag. 12.

Le 13 Mars. M. le Prof. Lexell a lu ſon rapport ſur l'Inſtrument inventé par M. le Capitaine Burdett & nommé compas optique.

—— —— il a préſenté de la part de l'élève Platzmann: *Problemata nonnulla de lineis curuis.* Cet écrit a été donné pour circuler parmi Mrs. les Académiciens de la Claſſe de Mathématique.

Le 17 Mars. Le Secrétaire a ouvert une lettre allemande adreſſée à l'Académie, qui s'eſt trouvée être d'un nommé Saul Wahl, habitant de Pirmaſſenz près de Deux-Ponts, offrant à l'Académie pluſieurs ſecrets & une nouvelle méthode de ſéparer l'or & l'argent du cuivre. Cette lettre a été miſe au rebut.

Le 20 Mars. Le Secrétaire a lu un rapport du Translateur Jährig daté du Lac Gouſinoi le 7 Janvier, qui envoie un image

image du Bourghan-Gongas, que le Lama Bandida Dſinſa lui avoit remis pour être préſenté à l'Académie comme une marque de ſa bienveuillance. Cette image a été dépoſée au cabinet des curioſités, en y joignant la déſcription qui s'en trouve dans le rapport de M. Jährig.

Dans la même Séance, M. le Conſeiller d'Etat actuel de Stehlin a communiqué deux cartes géographiques très intéreſſantes: l'une eſt une carte générale de la principale communication d'Eau depuis Kalaiſin jusqu'à Ladoga, l'autre une plus détaillée des environs de Wiſchney Woloſchok.

—— —— M. le Conſeiller de Collèges Pallas a remis pour la Bibliothèque: *Lettere odeporiche di Angelo Gualandris.* 8.

Le 24. Mars. Le Secrétaire a remis de la part de l'Univerſité Impériale de Moscou, un exemplaire des Discours académiques qui y ont été prononcés au grand Auditoire, à l'occaſion de la fête de Sa Majeſté L'Impératrice, en Novembre 1782.

—— —— il a lu une lettre de M. l'Académicien Inochodzof datée du 14 Mars, qui mande ſon arrivée à Charkof, où il a commencé ſes opérations aſtronomiques par l'obſervation de l'eclipſe de la Lune du 7 Mars.

Le 27. Mars. M. le Conſ. de Cour Lepéchin a communiqué une lettre de M. le Prof. Ozeretskovski, qui envoie de la part du Correſpondant M. l'Aſſeſſeur Adrien Socolof à Aſtrachan, un paquet de diverſes ſemences pour le Jardin botanique.

Dans la même Aſſemblée, Mrs. les Académiciens Kotelnikof, Roumovski & Fuſs ont remis leur rapport ſur le mémoire de l'Elève Platzmann, dont ils ont porté un jugement favorable.

—— —— Le Secrétaire a lu un rapport du Translateur Jährig daté du Lac Gouſinói le 22. Janvier, qui envoie la traduction allemande d'une Grammaire Mongole, compoſée par une Société de Sçavans, ſous la Direction & la Reviſion de l'Empereur Chinois Aenkä Ammogolongtu: cette traduction eſt écrite en deux colonnes, dont la premiere contient le texte mongol avec des lettres allemandes, tel qu'on le prononce, & l'autre la traduction verbale. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a été chargé d'en faire mention dans ſon hiſtoire des Calmucques.

Le 3. Avril. S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait remettre:

Catalogue des livres de la Bibliotheque de feu M. le Duc de la Valliere, par M. Guillaume de Bure.

en 3. volumes. Exemplaire envoyé à S. M. l'Impératrice qui en a fait préſent à la Bibliotheque académique.

Le 7. Avril. Le Secrétaire a remis de la part de l'Auteur: *Aſtronomiſches Jahrbuch für das Jahr 1785, auf den Berliniſchen Meridian berechnet von J. E. Bode, Aſtronom der Königl. Academie der Wiſſenſchaften zu Berlin.*

S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a communiqué une lettre de M. Banks, où eſt rapportée l'opinion de M. Herſchel que notre ſyſteme planétaire ſe meut vers la conſtellation d'Hercule.

Le

Le 24. Avril. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée a S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw par M. J. J. Illig de Reval qui envoie pour la Bibliotheque de l'Académie un manuſcript arabe, contenant quelques Suras de l'Alcoran, & une Chronique manuſcripte de l'Eſthonie continuée jusqu'en 1677 par un gentil-homme du païs nommé Lode.

—— —— il a remis une lettre de S. E. Mr. le Senateur Comte Ulrich Scheffer datée de Stockholm le 11. Avril, en réponſe à la lettre de remerciment que l'Académie lui avoit adreſſée pour la précieuſe collection de minéraux ſuédois envoyée en préſent il y a environ 3. ans. Voyez ci-deſſus pag. 9.

M. le Prof. Géorgi a lu une lettre de M. le Conſ. de Cour Tychſen, datée de Butzow le 5. Avril, qui offre à l'Académie ſes ſervices pour déchiffrer & expliquer les monnoyes arabes anciennes, qu'elle poſſede dans ſon cabinet, & qui demande que l'Académie les lui envoye pour quelque temps. M. Géorgi a été chargé de répondre que l'Académie ne ſauroit aucunement envoyer dehors les pieces qui une fois ont été depoſées dans ſon cabinet; mais que ſi M. Tychſen vouloit ſe contenter des empreintes en platre, il pouvoit s'adreſſer au Surintendant du cabinet, M. le Conſ. de Cour Kotelnikof.

Le 28. Avril. Le Secrétaire a ouvert une lettre adreſſée à l'Académie par M. Henrici de Pühs, qui envoie l'annonce d'un ouvrage imprimé en allemand, françois & latin, ſur l'Art de faire des empreintes de plantes, ſur lequel on ſouſcrit chez Varrentrap fils & Wenner, libraires à Francfort ſur le Mayn.

Le 5. Mai. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de M. le D. Hedwig de Leipzig. Pag. 13.

—— —— une lettre de M. le Prof. Leske, de Leipzig le 19. Avril, qui annonce la continuation du Journal latin: *Commentarii de rebus in ſcientia naturali et medicina geſtis*, dont il vient d'être chargé, & dont la 1$^{re}$ Partie du 25$^{me}$ Volume doit paroitre à la foire prochaine de Leipzig.

—— —— une lettre de M. de Magellan de Londres, en date du 4. Avril, qui communique l'idée d'un nouvel échappement pour les Pendules aſtronomiques, dont il eſt l'inventeur, & qui tranſcrit une lettre de M. Méchain, Aſtronome à Paris, ſur l'Orbite elliptique de la nouvelle Planète, dont il joint les obſervations les plus recentes.

Le 8. Mai. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de M. l'Académicien Inohodzof, qui accuſe auſſi la reception de la médaille d'inauguration ſur la Statue équeſtre de PIERRE le Grand, qui lui a été envoyée de la part de Madame la Princeſſe de Daſchkaw.

Le 19. Mai. L'Académie a reçu un Jeu de Tactique, que Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de Sa Majeſté Impériale, pour être depoſé au cabinet de curioſités avec ſa déſcription imprimée: *Verſuch eines auf das Schachſpiel gebaueten tacktiſchen Spiels, von zwey und mehrern Perſohnen zu ſpielen. Von M. J. Chr. Lud. Hellwig.*

Le 22 Mai. M. le Conſeiller de Colleges Pallas a communiqué le Proſpectus d'une Hiſtoire des oiſeaux, qui ſera publiée à

à Göttinguen par M. le. Doct. Merrem. L'Académie a chargé M. Pallas d'y ſouſcrire.

Le 2. Juin. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de Sa Majeſté Impériale, pour être dépoſé au cabinet d'Hiſtoire naturelle & de curioſités, un préſent conſiſtant en 13 échantillons de minéraux de la Nouvelle Eſpagne avec leurs étiquetes, & 18 Bucaros de la Province de Guadalaxara dans le Mexique, peints & modélés en diverſes formes.

—— —— une lettre de M. de Magellan datée de Londres le 26 Avril, qui offre à l'Académie un verre ardent d'une grandeur extraordinaire, monté avec ſon collectif & executé par le célèbre Artiſte Parker à Londres, qu'il compte de pouvoir procurer pour le prix de 700 guinées. L'Aſſemblée n'a pas jugé à propos de faire des demarches pour accepter cet offre, l'Académie poſſedant déja un des meilleurs & des plus grands verres de Tſchirnhaus.

M. le Prof. Krafft a lu l'extrait d'une lettre écrite par M. Rénovance, Correſpondant de l'Académie à Barnaoul, qui détaille les circonſtances, qui ont accompagné le tremblement de terre reſſenti à Barnaoul le 6 Avril après midi. Les mouvemens ſuivoient la direction de SOu. à NE. & ont été très conſidérables à Suſum & Alei.

Le 9. Juin. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait remettre de la part de Sa Majeſté l'Impératrice:

Recueil de Mémoires ſur la Méchanique & la Phyſique par M. l'Abbé Rochon, de l'Académie des Sciences de Paris.

avec

avec ordre d'examiner le contenu de cet ouvrage, après quoi il ſera dépoſé à la Bibliotheque. L'Aſſemblée a nommé Mrs. les Académiciens Roumovski, Lexell & Fuſs, en les chargeant d'en faire leur rapport à l'Académie, qui le communiquera enſuite à Madame la Princeſſe.

Son Excellence a encore envoyé pour la Bibliothéque:

Lettera eſtemporanea ſopra alcune curioſità fiſiologiche a S. E. R. Mſgr. Giuſeppe Garampi. Lettera ſeconda — a S. E. il Cavalieri D. Nic. Pecci. Lettera terza — al cospicuo Sigr. il Conte Conſigliere D. Ant. Greppi.

Le 12. Juin. M. l'Académicien Fuſs a préſenté: *Rudolf von Habsburg*, Tragédie manuſcritte, en allemand & en cinq actes, que l'Auteur nommé *Gindle* a adreſſée à l'Académie, en la priant de la faire parvenir à Sa Majeſté Impériale. L'Aſſemblée a envoyé cet écrit, dont le ſujet n'eſt pas de ſa compétence, à Madame la Princeſſe de Daſchkaw, pour que S. E. en faſſe l'uſage qui lui paroitra convenable. (Il a été renvoyé à l'Auteur.)

Le 16. Juin. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à l'Académie par M. J. G. Brandes, Echevin à Hannover, qui envoie un manuſcrit intitulé: *Syſtematiſcher Vorſchlag zur Einrichtung eines dauerhaften, billigen und nicht beſchwerlichen Wittwen-Verpflegungs-Inſtituts*, priant l'Académie de lui en faire parvenir ſon approbation & de permettre, qu'il la faſſe imprimer à la tête de cet ouvrage. Les Académiciens Euler le pere & Fuſs ont été priés d'examiner cet écrit, & le dernier de rapporter leur ſentiment à l'Académie.

Le

Le Secrétaire a lu des lettres de Mrs. de Lalande & de Magellan, qui communiquent l'un & l'autre la nouvelle découverte que venoit de faire en Aſtronomie M. Goodricke, jeune gentil-homme anglois demeurant à York: ſavoir que l'Etoile *Algol*, de la 2$^{de}$ grandeur, ou β de Perſée ſouffre toutes les 69 heures une diminution conſidérable de lumiere, qui la réduit à la 4$^{e}$ grandeur.

Le 19. Juin. M. le Prof. Fuſs a lu & remis le ſentiment de M. Euler le Pére & le ſien, ſur le manuſcript de l'echevin Brandes: lequel n'étant pas favorable, le Secrétaire au lieu d'expédier à l'Auteur l'approbation qu'il demande, lui a renvoyé ſon manuſcript avec une copie du jugement qui en a été porté.

Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe:

Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres, Année 1780, avec l'Hiſtoire pour la même année.

Diſſertation ſur la force primitive qui a remporté le Prix propoſé par l'Académie, pour l'année 1779.

Diſſertation ſur l'influence des Sciences ſur le Gouvernement & du Gouvernement ſur les Sciences, qui a remporté le Prix propoſé par l'Académie, pour l'année 1779.

Diſſertation ſur la queſtion extraordinaire qui a partagé le Prix adjugé le 1. Juin 1780: *Eſt-il utile au peuple d'être trompé &c.*

Diſſertation ſur la queſtion de Baliſtique propoſée par l'Académie pour le Prix de 1782.

Enſuite de la part des Auteurs & Editeurs

Noui Planetae obſeruationes et Theoria. Auctore Ioſepho Slop de Cadenberg. Piſarum.

Obſervations Aſtronomiques faites à Toulouſe, 2[de] Partie, publiées par M. Darquier.

Joh. Heinr. Lamberts —— Deutſcher gelehrter Briefwechſel, herausgegeben von Joh. Bernoulli, zu Berlin. 3[ter] Band.

Le 23. Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de S. E. Mr. le Prince Demétrius de Golitzin, Honoraire de l'Académie, datée de Munſter le 10. Juin, qui communique la ſusdite decouverte de M. Goodricke: voyez le 16. Juin.

Le 30. Juin. M. le Prof. Lexell a lu le rapport des Commiſſaires nommés pour examiner l'ouvrage de M. l'Abbé Rochon intitulé: *Recueil de Mémoires ſur la Mechanique & la Phyſique.* Ce rapport ayant été approuvé & ſigné, le Secrétaire l'a préſenté à Madame la Princeſſe de Daſchkaw.

Le Secrétaire a remis le Programme des Prix propoſés par l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe pour l'année 1785.

Le 3. Juillet. Madame la Princeſſe a remis de la part de l'Impératrice une mine d'Or, que le Conſeiller de Cour Teegel à Emden avoit envoyée à Sa Majeſté, avec une lettre dans laquelle il prétend que cette piece eſt du mont Ophir à Malacca, d'où jadis le Roi Salomon avoit tiré tout ſon or. Quoiqu'il en ſoit, la mine a été dépoſée au Cabinet Académique avec une copie de la lettre de M. Teegel.

Le

Le 7. Juillet. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a communiqué une lettre de M. le Conſeiller d'Etat Krapovitski, qui lui envoie par ordre de Sa Majeſté, des grains & des épics de ſeigle ſauvage cueillis dans la vallée à gauche du Wolga & de l'Achtuba, aux endroits ſabloneux qui ſont à l'abri des inondations. M. Pallas y a joint ſes remarques & obſervations.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Académicien Inochodzof datée de Kursk le 14. Juin, qui envoie ſes obſervations aſtronomiques & météorologiques faites à Charkof.

Le 10. Juillet. M. le Conſeiller d'Etat actuel de Stehlin a préſenté de la part de la Société libre économique de St. Pétersbourg, le 3e tome de ſes mémoires publiés ſous le titre:

Продолженіе трудовъ вольнаго Экономическаго Общества.

M. le Conſeiller de Collèges Pallas a remis pour le Jardin académique, un pacquet de diverſes ſemences, que lui avoit envoyé le Chirurgien Schangin de la fortereſſe de Smeinogorsk.

M. l'Adjoint Socolof a préſenté l'annonce d'une Gazette littéraire, que M. Löwe à Weigelsdorf va publier ſous le titre: *Zeitung aus der phyſikaliſchen Welt.*

Le 14. Août. M. le Prof. Lexell a préſenté de la part de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm:

Kongl. Vetenſkaps Academiens nya Handlingar. Tom. III. för År 1782.

Le Secrétaire a préſenté trois Diſſertations imprimées

1. Ueber die redende Grazie.
2. Obſervationes miſcellae in Plinii panegyricum Traiano dictum.
3. De ſimpliciori faciliorique discendi latinam linguam ratione.

que M. Loeſch, Directeur du college illuſtre à Anspach, a envoyées comme une marque de reconnoiſſance pour les Ouvrages que l'Académie a contribués à la formation de la Bibliotheque de cet Inſtitut.

—— —— il a remis une quadrature de cercle imprimée, que lui avoit adreſſée un Profeſſeur d'Angers.

M. le Conſeiller d'Etat actuel de Stehlin a communiqué un catalogue imprimé des inſtrumens, planches gravées & manuſcripts du célébre Aſtronome Eimmart de Nurnberg, que M. de Murr, de la même ville, poſſede & offre à l'Académie pour la ſomme de 200 ducats. L'Aſſemblée n'a pas trouvé bon de l'accepter.

Le 18. Août. M. le Conſeiller de Collège Pallas a communiqué trois cartes géographiques: 1. du Чукотской Носъ (Cap des Tſchuktſchi), 2. du Мѣдный Островъ (l'Isle de cuivre dans la mer de Kamtſchatka), et 3. du Port d'Ochotzk' & du Cours de la riviere Ochota. Ces cartes ont été copiées pour le département Géographique.

M. le Prof. Lexell a remis de la part de la Société royale des Sciences de Londres:

Philoſophical Tranſactions of the Royal Society of London. Vol. LXXII. for the Year 1782. Pars I.

Le

Le Secrétaire a préſenté de la part de M. de la Blancherie, Agent Général de Correſpondance pour les Sciences & les Arts à Paris:

Eſſay d'un tableau hiſtorique des peintres de l'école françoiſe, depuis Jean Couſin en 1500 jusqu'en 1783 incluſivement: avec le catalogue des ouvrages des mêmes peintres, &c.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw a remis de la part de Sa Majeſté, trois morceaux de Lapis Lazuli de la Boucharie, dont l'un eſt parſémé de mica & très curieux.

Le 25. Août. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de S. E. Mr. l'Amiral Greig. Voyez ci-deſſus pag. 20.

M. le Prof. Fuſs a préſenté de la part de M. le Baron de Paccaſſi à Vienne:

Einleitung in die Theorie des Mondes. I^er Theil.

M. le Prof. Krafft a communiqué conformement aux voeux de l'Auteur

Chr. Fried. Hellwag Diſſertatio inauguralis phyſiologico-medica de formatione Loquelae

avec un manuſcript allemand ſur le même ſujet.

Le 1. Septembre. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de M. de Magellan à Londres, (pag. 16.) qui contient en outre diverſes nouvelles littéraires.

Le 4. Septembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Abbé Hemmer, datée de Manheim le 8. Avril, qui envoie de la part de la Société Electorale de Météorologie:

Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae, Hiſtoria et obſervationes anni 1781.

Le Secrétaire a préſenté dans la même Aſſemblée de la part de l'Auteur

Jo. Georgii Büſch Math. Prof. Hamburg. Tractatus duo optici argumenti.

M. le Prof. Lexell a rapporté, qu'ayant été chargé par S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw, d'examiner un inſtrument pour méſurer les diſtances des aſtres ſur mer, inventé & envoyé par M. de Magellan, il avoit trouvé qu'outre le maniement aiſé de cet inſtrument nommé *Cercle de reflexion*, il donnoit les diſtances avec une préciſion qui a ſurpaſſé ſon attente. Il a propoſé en conſéquence de charger encore quelques Académiciens de refaire conjointement avec lui de pareilles obſervations ſur la diſtance des aſtres & de donner par leur ſignature commune une authenticité plus grande au jugement favorable que ce cercle de reflexion mérite. L'Aſſemblée en approuvant cette propoſition, a nommé Mrs. Roumovski & Krafft.

M. le Prof. Géorgi a préſenté de la part de l'Auteur, M. le Prof. Röhl à Greifswald:

1. Beſtimmung der geographiſchen Laage von Greifswald, beſonders die Breite deſſelben betreffend.
2. Rechnungs Methode zur Aufiöſung eines Falls der ſphäriſchen Trigonometrie, ohne Zerfällung in rechtwincklichte Dreyecke.

Le 11. Septembre. M. le Prof. Fuſs a notifié la mort de M. Léonhard Euler. Voyez ci-deſſus pag. 21.

Le 18. Septembre. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Hablitzl', qui contient une deſcription de la ville de Cherſon & des environs.

Le

Le Secrétaire a remis un Proſpectus imprimé, par lequel M. le Prof. Schimek à Vienne annonce un ouvrage ſur les différens dialectes des Slaves, qu'il ſe propoſe de publier par voie de Souſcription & qu'il intitule: *Slaviſche Sprachforſchung in tabellariſcher Darſtellung des Gegenverhältniſſes verſchiedener ſlaviſcher Mundarten, nach den beſten Sprachlehren eingerichtet.*

M. le Prof. Lexell a lu une lettre de M. de Magellan, qui donne avis des nouvelles cuiſines marines inventées à Londres, qui ſont de fer, & qui outre la commodité d'y cuire pluſieurs mets, changent l'eau de mer en eau douce potable, & renouvellent l'air dans le fond de cale & entre les ponts.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. Jährig datée du Lac Gouſinoi le 6 Juillet, qui envoie un recueil de diverſes nouvelles & anecdotes, que l'Aſſemblée a remis à M. le Conſeiller de Collèges Pallas, pour en faire uſage au ſecond Tome de ſon hiſtoire des Mongols.

—— —— il a lu une lettre de M. le Prof. Inohodzof, datée de Woroneſch le 29 Août, qui envoie ſes obſervations aſtronomiques & météorologiques faites à Kursk.

Le 25 Septembre. M. le Conſeiller de Cour Roumovski a lu une lettre adreſſée à S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw par M. le Lieut. Général Kretſchetnikof, exerçant les fonctions de Gouverneur Général à Kaluga, qui envoie une petite monnoye d'argent trouvée, avec quinze autres de la même empreinte, dans une montagne ſituée ſur le bord de l'Occa près de Lichwin. Cette monnoye a d'abord été reconnue pour un

un Calife, dont il ſe trouve un grand nombre au cabinet académique: mais comme Madame la Princeſſe a ſouhaité d'en être inſtruite plus en détail, l'Aſſemblée a fait inviter M. l'Aſſeſſeur & Sous-Bibliothécaire Bacmeiſter à déchiffrer & traduire l'inſcription arabe qui ſe trouve ſur cette monnoye.

M. Macquart, Docteur-Régent de la faculté de Médecine de Paris, après s'être fait annoncer, eſt venu préſenter lui même à l'Aſſemblée ſon ouvrage intitulé:

Manuel ſur les propriétés de l'eau particulierement dans l'art de guerir.

avec diverſes pieces fugitives de ſa façon, que l'Aſſemblée a agréées avec remerciment.

Le 29 Septembre. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de M. le Prof. Black à Edinbourg, qui a été reçu au nombre des Académiciens externes. Pag. 8.

S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait expoſer par Ordre de Sa Majeſté Impériale, une nouvelle machine très ingénieuſe pour graver des écritures ſur des planches d'étain, inventée par M. l'Abbé Rochon à Paris. Elle a été remiſe à M. l'Académicien Lexell pour en étudier le maniement & l'expliquer enſuite au Mechanicien académique qui eſt chargé de faire une ſemblable machine, pour graver des écritures ruſſes.

—— —— encore de la part de la Souveraine, pour être dépoſé à la Bibliothèque de l'Académie:

Criſtal-

Criſtallographie, ou deſcription des formes propres à tous les corps du regne minéral, par M. de Romé de l'Isle. Seconde édition: Paris 1783. T. I — IV.

Recueil de pluſieurs ouvrages de M. Rolland: Paris 1783.

exemplaires magnifiquement reliés que les Auteurs avoient adreſſés à Sa Majeſté.

— — enſuite en ſix grandes feuilles:

Carte de la Moldavie, pour ſervir à l'Hiſtoire militaire de la guerre entre les Ruſſes & les Turcs; lévée par l'État-Major, ſous la Direction de M. le Lieutenant-Général de Bawr.

dont les planches ont été acquiſes par Sa Majeſté l'Impératrice, & données à Madame la Princeſſe de Daſchkaw pour le profit de Son Académie.

Enfin Madame la Princeſſe a envoyé ſix beaux morceaux de granit de différentes couleurs, dont elle a fait préſent au Cabinet académique.

Le Secrétaire a préſenté de la part des Auteurs:

Magnitudinum exponentialium, logarithmorum, & Trigonometriae ſublimis Theoria, nova methodo pertractata. Auct. Petro Ferronio. Florentiae 1782. 4to.

Deſcription de la Galérie Royale de Florence, par M. François Zacchiroli, à Florence 1782. 8vo.

avec des lettres des Auteurs, dont le Secrétaire a fait la lecture.

M. le Prof. Lexell a remis, pour être communiquée au Département géographique, une nouvelle carte des États unis de l'Amérique Septentrionale, publiée à Londres & intitulée: *The united States of North-America.*

Le 2 Octobre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a remis de la part de Sa Majeſté, pour être dépoſée à la Bibliotheque Académique, une carte chinoiſe repréſentant la partie Septentrionale de la Chine, le long du mur qui la ſépare de la grande Tartarie.

Le Secrétaire a annoncé la mort de M. le Prof. *Spielmann* à Strasbourg.

M. le Prof. Lexell a préſenté de la part de la Société Royale des Sciences de Londres, la II^de^ Partie du Volume LXXII des *Philoſophical Transactions*, qui eſt pour l'année 1782.

Le 6 Octobre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de Sa Majeſté l'Impératrice, pour être remis à la Bibliotheque:

Eſſay ſur l'Electricité naturelle & artificielle, par M. le Comte *de la Cepède*, Colonel au Cercle de Weſtphalie 2 Tomes in $8^{vo}$.

Phyſique générale & particuliere, par le même. Tome $1^{er}$. $8^{vo}$.

Enſuite de ſa part, deux Macaos empaillés, dont Son Excellence fait préſent au Cabinet de l'Académie.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. *Lamey*, datée de Mannheim le 15 Juillet, qui envoie de la part de l'Académie Electo-

Electorale des Sciences & Belles-Lettres de Mannheim, dont il eſt le Secrétaire perpétuel:

Hiſtoria & Commentationes Academiae Electoralis Scientiarum & elegantiorum litterarum Theodoro-Palatinae. Vol. V. Hiſtoricum. 4$^{to}$.

M. le Prof. Ferber a préſenté de la part de l'Auteur

P. M. Auguſti Brouſſonet M. D. —— Ichtologia ſiſtens Piſcium deſcriptiones & icones.

Le 9 Octobre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a remis par Ordre & de la part de Sa Majeſté l'Impératrice, un exemplaire en or de la médaille frappée par les Américains en 1782, avec une explication françoiſe & angloiſe. Ce préſent a été reçu avec la plus reſpectueuſe réconnoiſſance & remis entre les mains de M. le Sur-Intendant des Cabinets académiques, pour être dépoſé au Médailler.

Le 10 Octobre. Aſſemblée publique: voyez ci-deſſus pag. 23.

Le 13 Octobre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de Sa Majeſté Impériale, pour être dépoſés à la Bibliotheque académique:

Introductio in Antiquitates Hyperboreo Gothicas, praeſertim praerogatiuam linguae & cognitionem hiſtoriarum. Auctore Erico Iulio Bioerner &c. en latin & en Suédois in folio. Holmiae 1738.

Schediaſma hiſtorico-geographicum de Varegis, Heroibus Scandianis & primis Ruſſiae dynaſtis ab E. I. Bioerner, Holmiae 1743.

Sagan om Ingwar Wydtſarne och Hans ſon ſwer, från gamla Islandskan Öfwerſatt, af Nils Reinhold Brocmann. Stockholm 1762.

Le Secrétaire a préſenté de la part de l'Auteur, M. de Fourcroy, Docteur de la faculté de Medécine de Paris, deux volumes in 8$^{vo}$ imprimés en 1782 ſous le titre: *Leçons élémentaires d'Hiſtoire naturelle & de Chymie.*

Le 20 Octobre. Le Secrétaire a annoncé la mort de M. le Conſeiller d'État actuel Müller à Moscou.

Le 23 Octobre. M. l'Académicien Fuſs a lu l'éloge de M. Euler le pere. Voyés pag. 26.

Le 27 Octobre. S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour le Cabinet d'Hiſtoire naturelle, une belle piece de pierre d'alliance de Siberie & ſix oiſeaux empaillés, dont elle a fait préſent.

Enſuite de la part de S. E. Msgr. le Feldmarſchal Comte de Razoumovski: les défenſes & la machoire d'un Éléfant, trouvées en Oucraine près de Batourin, dont la derniere piece eſt en partie pétrifiée.

Et de la part de M. Zinner, Profeſſeur d'Hiſtoire à Kaſchau en Hongrie:

1. Empfindungen über das Denckmahl welches PETER dem I, CATHERINE die II. feyerlich errichtet hat 8$^{vo}$.
2. Abhandlung von Europäiſchen Kayſerthümern. En manuſcrit.

Le

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Prof. Zimmermann de Brounſwig, qui envoie à l'Académie ſa Carte Zoologique; *Tabula mundi Geographico Zoologica ſiſtens Quadrupedes hucusque notos ſedibus ſuis adſcriptos:* avec une explication en latin.

—— —— il a préſenté un manuſcrit intitulé: *Vorſchlag einer neuen vortheilhaften Maſchine, die Gruben-Waſſer auf den Bergwercken damit zu gewältigen.* L'Auteur qui ſe nomme R. A. Abich, offre de vendre ſon ſecret pour une ſomme de mille Risdalers. Comme cette invention interéſſe directement le Collège des Mines, M. le Conſeiller de Collèges Pallas a été chargé d'en envoyer une copie à Barnaoul.

—— —— il a lu un examen de l'Ouvrage de M. l'Echevin Uphagen à Danzig, intitulé *Parerga hiſtorica*, envoyé par M. l'Aſſeſſeur Stritter de Moscou. L'examen fut approuvé & le Secrétaire chargé d'en envoyer une copie à l'Auteur.

Le 3 Novembre. M. le Conſeiller de Collèges Pallas a remis par Ordre de Sa Majeſté Impériale, pour être dépoſé au Cabinet d'Hiſtoire naturelle: un cahier contenant diverſes feuilles, tiges & racines artiſtement ſquelettées.

Enſuite divers échantillons d'un ſpath fluor, envoyés de Cathérinenbourg, qui ont une vertu phoſphorique ſupérieure à celle des autres eſpeces connues de cette pierre; auxquels M. Pallas a joint une deſcription & un expoſé des phénomènes qu'il produit.

Le 10 Novembre. Le Secrétaire a remis le Programme de l'Académie Electorale des Sciences & Belles-Lettres de Man-

Manheim, contenant la queſtion propoſée pour le Prix de 1785.

Le 13 Novembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé un manuſcrit en allemand intitulé: *Grundriſs einer allgemeinen Encyclopädie nach einem neuen Etat*, que l'Auteur, Jean Henri Rais, Candidat en Théologie, avoit adreſſé à S. E. pour être approuvé par l'Académie. Comme il n'y a, ni ordre, ni jugement dans cet écrit, l'Académie l'a mis au rebut.

Le 17 Novembre. M. le Conſeiller d'État actuel de Stehlin a annoncé la mort de M. Ribeiro Sanches à Paris.

M. le Conſeiller de Colleges Pallas a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Hablitzl', datée de Krementsſchuk le 18 Octobre, qui rapporte diverſes obſervations qu'il a faites à Cherſon ſur quelques inſectes & leurs morſures prétendues vénimeuſes, & qui envoie une plante qu'il a reconnue être *l'Arenaria ſerpyllifolia Linnei*, qu'on prétend être fort nuiſible aux chevaux: ce qui cependant n'eſt pas croyable.

Le 20 Novembre. M. l'Académicien Ferber a expoſé & donné pour le cabinet d'Hiſtoire naturelle, une eſpece de papier foſſile, qu'on trouve aux environs de Mitau en Courlande. Cette production formée de conferva pourrie, reſſemble à une ouatte; ce qui lui a fait donner le nom qu'elle porte.

Le 27 Novembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de M. le Conſeiller de Colléges Léontief, employé au Département des Affaires étrangères, pour être préſenté à l'Académie & conſervé à ſa Bibliotheque: deux ouvrages chinois,

nois, dont le 1$^{er}$ en dix volumes contient les loix & ordonnances de l'Empire de la Chine publiées en 1684, & l'autre en cinq volumes, les oeuvres philoſophiques du célebre Philoſophe Jaſhu Jaſii, publiés en 1713.

Le 1$^{er}$ Décembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a remis de la part de Sa Majeſté Impériale, pour être dépoſés à la Bibliothéque Academique, pluſieurs ouvrages Suédois très interéſſans pour l'Hiſtoire & en partie fort rares, ſavoir:

Hiſtoria Hialmari Regis Biarmlandiae atque Thulemarkiae ex fragmento Runici manuſcripti litteris recentioribus deſcripta, cum gemina verſione Iohannis Peringskioldi. fol.

Hervarar ſaga på Gammal Gôtſka med olai vereli uttolkning och notis. fol.

Nordiska Kampa Dater J en ſagoflock ſamlade om forna Kongar och Hjältar &c. Volumen hiſtoricum continens variorum in orbe hyperboreo antiquo Regum, Heroum, & Pugilum res praeclare & mirabiliter geſtas &c. fol.

Swea Rikes Hiſtoria ifrân deſs begynnelſe til wâra Tider, efter Hans Kongl. Maj. to nadiga behag på rikſens hôglofliga Stânders Äſtundan fôrfattad af Olof v. Dalin T. I. II. III. IV. 4$^{to}$.

Swea Rikes Hiſtoria ifrân de âldſta tider til de nârwarande. T. I. II. III. 4$^{to}$.

Cogitationes critico philologicae de Orthographia linguae Suio-Gothicae, tam runica quam vulgari, a corrupto medii aevi ſtylo vindicanda &c. Auctore Erico Julio Bioerner 4$^{to}$.

Le

Le Secrétaire a lu dans la même Séance, la lettre de remerciment de M. le Capitaine Maillard à Vienne, qui a remporté le Prix ſur les machines mües par la force du feu. Voyez p. 25.

Le 8 Décembre. Le Secrétaire a lu la lettre de remerciment de M. le Profeſſeur Hennert à Utrecht, qui a partagé le Prix ſur l'uniformité du mouvement diurne de la Terre. Voyez p. 25.

—— —— il a lu une lettre de M. de Lalande à Paris qui notifie la mort de M. d'Alembert.

Le 11 Décembre. M. le Conſeiller de Collège Pallas a remis, deux Scolopendres (*Scolopendra morſitans*) & deux petites Tortues conſervées dans de l'eſprit de vin, que M. le Conſeiller de Cour Hablitzl' lui a envoyées pour le Cabinet d'Hiſtoire naturelle.

Le 15 Décembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour être conſervée à la Bibliotheque, une eſtampe gravée par le Prince de Daſchkaw ſon fils, repréſentant une vüe priſe à Cagli d'après le deſſin de J. Ph. Hackert.

Le Secrétaire a préſenté de la part de M. Wolke, Profeſſeur au Philanthropinum à Deſſau, une brochure intitulée: *Méthode naturelle d'inſtruction.*

—— —— de la part du Comptoir d'Intelligence & d'Adreſſes à Lemberg, une annonce imprimée en Polonois & en Allemand d'un Ouvrage Syſtematique ſur la ſubſtance & l'origine des métaux & minéraux, ſuivi d'un ſupplément, dans lequel les principes qui précedent ſont appliqués à l'Art de guerir &c.

Il a

Il a dans la même Aſſemblée lu une lettre de M. de Magellan, datée de Londres le 24 Novembre, qui communique des obſervations d'une nouvelle Comete découverte à York par M. Edward Pigott.

—— —— enſuite une lettre de remerciment de M. le Prof. Friſi de Milan, qui a partagé avec M. Hennert le Prix ſur l'uniformité du mouvement diurne de la Terre.

Le 18 Décembre. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé une belle Pyramide d'Albâtre des environs d'Arſamas, ſur un piedeſtal compoſé de diverſes pierres de la même eſpèce, dont Son Excellence a fait préſent au Cabinet d'Hiſtoire naturelle.

Le Secrétaire a préſenté tous les mois les obſervations météorologiques faites à Moscou par M. l'Aſſeſſeur Engel, ainſi qu'un extrait de celles que M. l'Académicien Béguelin a faites à Berlin, & que ces deux ſavans ont bien voulu continuer de communiquer à l'Académie.

## DISCOURS, LETTRES, RAPPORTS ET EXTRAITS ADRESSÉS ET LUS À L'ACADÉMIE.

### Obſervation Aſtronomique, faite à Lamégo, ville de Portugal, le 12 Novembre 1782, du paſſage de Mercure ſur le Diſque du Soleil.

*Communiquée à l'Académie le 30 Janvier.*

Dans l'après midi du 12 Novembre 1782, les Sieurs d'Araujo, gentils-hommes bien connus par leur ſavoir dans les Sciences Philoſophiques & Mathématiques, obſerverent à Lamégo, avec un teleſcope achromatique de trois pieds & demi de foyer, le paſſage de Mercure ſur le diſque du Soleil.

Il réſulte de leur obſervation que

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| le premier contact boréal a été à | 2 | heures | 20′. | 22″. |
| L'immerſion totale de la Planète | 2 | | 25. | 52. |
| Le ſecond contact - - | 3 | | 36. | 26. |
| Et ſon émerſion totale - | 3 | | 44. | 56. |

temps vrai.

## Lettres

### de M. le D. Janſſens à Ooſterhout, à S. E. Mr. le Prince Demétrius de Golitzin, Miniſtre de la Cour Impériale de Ruſſie à la Haye.

Sur des guériſons remarquables, effectuées dans des cas déſeſpérés, par l'emploi de l'air fixe.

*Communiquées & lues à l'Académie le 20 Février.*

Ooſterhout le 23 Novembre 1778.

Mon Prince!

„Dans la converſation, que j'eus l'honneur d'avoir avec „Votre Alteſſe, ſur la vertu médicale de l'air fixe, j'a„vois promis de Lui rendre compte, des éffets qu'il produi„roit dans la fievre putride, s'il étoit pouſſé dans l'anus; „mais quoique dans le cas ſuivant, qui eſt certainement fort „rare, & dont je vous fais part, je n'ai point exactement „ſuivi la méthode, que Votre Alteſſe m'a indiquée, ayant été „obligé, de donner autant de china chinae, qu'il étoit poſſible; „je crois cependant qu'il a contribué beaucoup à la guériſon.

„Une femme d'un batelier à G. Berg, nommée N. de „Swart, agée de 32 ans, d'un tempérament ſanguin & d'une „bonne conſtitution depuis ſa naiſſance, a été attaquée, aprés „ſa troiſieme couche naturelle, & ſelon toutes les apparences „très heureuſe, qui arriva le 6 d'Octobre à deux heures de

„la nuit, d'une fievre qui a commencé le 8 Octobre. Le 6, „elle ſe portoit fort bien & les vuidanges couloient ſuffiſa-„ment: le 7 elles couloient moins & elle commença à ſe „plaindre d'une laſſitude, d'une grande péſanteur dans tous „les membres; elle perdit l'appetit & le lait ne ſe faiſoit point „au ſein. Au commencement du troiſieme jour, les vuidanges „étoient arrêtées, & la fievre commençoit par un froid & „des friſſons ſucceſſifs, avec envie de vomir, & un mal de „tête, qui n'étoit pas aigu, mais preſſant & profondement „dans le crane & dont elle ſouffroit moins couchée que de-„bout. Les Symptomes étoient ſuivis d'une grande chaleur, „avec des vomiſſemens d'une matiere bilieuſe, verdatre & très „corrompue; ſa langue étoit chargée d'une matière visqueuſe „& jaunâtre les deux premiers jours, mais après elle étoit „brune jusqu'au ſixieme.

„L'haleine étoit courte, oppreſſée & très puante. Le „pouls foible, battoit 90 ou 94 fois dans une minute. La „chaleur n'a point été obſervée avec le Thermomètre. L'urine „étoit rouge & puante, ſans ſédiment; la malade avoit grande „ſoif, & elle buvoit beaucoup de petit lait, avec du ſuc de „Citron.

„Le ſecond jour de la fievre, des delires, des inſom-„nies & des inquietudes, avec une crainte de la mort, l'af-„fectoient. Le troiſieme, tous les ſymptomes devinrent en-„core pires. Le quatrieme, elle ſe ſalit de ſon urine &c. „Le cinquieme, il ſurvint une diarhée, d'une matiere bilieuſe „& putride; le delire étant alors continuel, elle laiſſoit tout „courir. Le ſixieme, les ſymptomes n'étoient point mieux. „Le ſeptieme, la pepie blanche, mais confluente, commençoit „à ſortir, & couvrit enfin toutes les parties de la bouche, & „empê-

„empêchoit fort la déglutition. Les tendons treſſailloient & „ſa main éplučhoit en tremblant, la laine des couvertures. „Le huitieme, tous les ſymptomes étant comme les précé„dens, des exanthemes rouges, d'un demi pouce de dia„mêtre, qui s'élevoient en petites veſſies, ſortoient ſur la poi„trine, les bras, les mains & le reſte du corps. Le neu„vieme, il ſortoit de ces veſſies un ſang délié & corrompu „dans la plus grande partie, le fond étoit d'un pourpre brun, „& dans les autres rouge. Les joues étoient auſſi d'un pour„pre brun, les yeux caves & la prunelle fort dilatée; enſuite „une ſueur froide la prit au viſage, aux mains & aux pieds; „la langue trembloit, les joues, les levres & tous les mem„bres du corps ſouffroient des legeres convulſions.

„Tous ces ſymptomes funeſtes faiſoient craindre pour „ſa vie; mais le pouls qui étoit régulier & qui reſtoit dans „le même état, me laiſſoit quelque eſperance. Dans cet état, „étant appellé pour conſulter avec le Médecin, qui l'avoit „traité ſelon toutes les regles de l'Art; j'ai conſeillé l'appli„cation de l'air fixe dans l'anus, avec la ſuivante décoction: „XV. grains de ſel de Tartre diſſous dans V. onces d'une dé„coction forte de China Chinae: j'ai ajouté V. onces de cette „même décoction dans laquelle j'avois mis autant de gouttes „de l'eſprit de Vitriol, néceſſaires pour extraire l'air fixe.

„Ce clyſtere a été donné les deux premiers jours, deux „fois par jour, & les trois ſuivants, une ſeule fois par jour.

„Pour ſa Médecine intérieure, elle prenoit toutes les „heures une taſſe de thé, de la décoction ſuivante: China „Chinae en poudre groſſiere IV. onces, cuit dans une quan„tité ſuffiſante d'eau commune pendant 3 heures, jusqu'à

„ deux livres. J'ai diſſous dans une livre de cette colature, „ un gros de ſel de Tartre; à laquelle j'ai ajouté l'autre „ livre de la même colature, dans laquelle j'avois mis autant „ de gouttes d'eſprit de Vitriol, néceſſaires pour ſaturer l'al- „ kali & extraire l'air fixe.

„ Le dixieme jour tous les ſymptomes étoient les mêmes, „ excepté, que les ſueurs étoient moins froides. L'onzieme, „ elles étoient encore moindres & bonnes, ſortant également „ de tout le corps, la pepie commençoit à tomber, la déglu- „ tition n'étoit plus ſi difficile, & le delire n'étoit plus con- „ tinuel, de tems en tems elle étoit bien préſente, & deman- „ doit le vaſe pour uriner &c.

„ Le douzieme, & le treizieme, elle ſe portoit encore „ beaucoup mieux, la couleur des joues étoit preſque naturelle, „ & celle des exanthemes devenoit d'un rouge de damaz; les „ convulſions ceſſerent, & tous les autres ſymptomes étoient „ preſque évanouis. Le quatorzieme la criſe parfaite ſe faiſoit „ par les urines & les ſueurs. Le quinzieme la malade ne „ ſentoit ni fievre, ni aucun ſymptome de maladie, excepté „ une grande débilité; enſorte que le vingtieme jour elle „ étoit entierement rétablie.

„ Pendant le cours de ſa maladie le ſein étoit lache „ & fort petit, ſans lait; mais étant chez elle le 10 Novembre, „ j'ai vu le lait ſortir du ſein, & ayant preſque repris ſes „ forces, je lui ai conſeillé de ſe faire tetter par ſon enfant.

„ J'ai écrit en détail l'hiſtoire de cette maladie, pour „ que Votre Alteſſe fut en état de juger par les circonſtances, „ quelle a été la maladie & ſa cauſe, qui eſt vraiſemblable- „ ment la retention des vuidanges; ayant jugé que votre Al-

„ teſſe

„teſſe pourroit alors raiſonnablement conſidérer & juger de la „vertu médicale de l'air fixe, & en même tems voir les raiſons, que j'ai eu pour varier l'application. Je craignois une „putrifaction, ou gangrène univerſelle, contre laquelle je devois preſcrire le China Chinae, & celui-ci ne pouvant point empecher le developpement de l'air fixe, j'ai ajouté la matiere „néceſſaire pour le produire."

---

"Oosterhout le 17. Novembre, 1782.„

"Il y a longtems que j'aurois eu l'honneur d'envoyer „& de communiquer à V. A. une obſervation très ſinguliere „d'une expérience, que j'ai faite de l'air fixe dans une hémorragie opiniatre du nez, occaſionnée d'une fievre putride, la„quelle avoit durée plus que quatre ſemaines, jour & nuit, presque ſans aucune intermiſſion, ſi j'avois pu donner à V. A. „un recit précis de la maladie & des ſes ſymptomes; mais „voyant que cela m'eſt impoſſible, puisque le Médecin qui a „traité le malade dans le commencement de la maladie m'eſt „inconnu & dont celui-ci a auſſi oublié le nom, je fais à „V. A. le recit comme le ſecond Médecin me l'a fait, & „comme je l'ai depuis obſervé moi-même."

"Le 23. de Novembre 1779, je fus prié d'aller à Terheyden à une lieue & demi de Bréda, chez le fils d'un charron nommé Nieboom, agé environ de 26. ou 27. ans, „d'une conſtitution robuſte & d'une complexion ſanguine, pour „conſulter de ſa maladie avec Regers, Médecin tres renommé „de cette place, qui n'avoit eu ſoin de lui que 8. ou 9. „jours."

"Ce

"Ce Médecin m'informa, que le malade avoit été at-
„taqué depuis environ 5. ſemaines, d'une fievre putride dans
„le marquiſat de Berg op Zoom, d'où les parens l'avoient
„conduit, malgré le Médecin, qui jugea que ſa fievre putride
„étoit très dangereuſe; que du premier jour qu'il tomba ma-
„lade, il eut des ſymptomes très grâves, c'eſt à dire, une gran-
„de fievre, des délires, des vomiſſemens d'une matiere ou jau-
„nâtre ou verdâtre, des inquietudes & des inſomnies, & que
„le 4$^{me}$ ou 5$^{me}$ jour, l'hémorragie étoit commencée, qui du-
„roit encore jusqu'à cette heure avec tous les ſymptomes dits,
„excepté les vomiſſemens & les delires."

"Effectivement, mon Prince! je trouvois le malade
„dans un état très affreux: le viſage & les levres pales & ca-
„davreux, tout le corps depuis le ſommet de la tête jusqu'aux
„plantes des pieds terriblement enflé, le pouls ſi foible qu'à
„peine je ſentois quelque tremblement confus de l'artere, l'ha-
„laine puante, une mauvaiſe urine brulée avec un ſédiment
„rouge, de legeres convulſions, la prunelle de l'oeil très ou-
„verte & une grande hemorragie du nez. Il étoit ſi foible,
„que le moindre mouvement lui cauſa des foibleſſes: il ne pou-
„voit ſouffrir, que perſonne ou entra ou ſortit de ſa cham-
„bre, & il ne répondit pas un mot à ce que je lui deman-
„dai, faiſant ſeulement ſigne de la tête. Tous ces ſympto-
„mes me faiſoient bien craindre pour ſa vie; mais la chaleur
„naturelle de ſon corps, la préſence de ſon eſprit & l'abſence
„de ſueurs froides, me donnoient encore quelque eſperance."

"Je voyois clairement qu'en pareil cas l'air fixe auroit
„pu être d'une grande utilité, ſavoir au commencement; mais
„que pour le préſent, il n'étoit que pour hazarder le malade,
„qui du moindre mouvement tomboit en défaillance, je diſois
„auſſi

„auſſi mes penſées à ce ſujet au Médecin, & après que nous „avions pris bien nos méſures, nous ſommes convenus, à lui „donner une forte decoction de quinquina avec le cachou & „l'eſprit de vitriol, & à appliquer dans les narines une ſolu- „tion de vitriol blanc. Deux jours après, ou le 25 de No- „vembre, je vis pour la ſeconde fois le malade & je le trou- „vois dans une agonie, ſans que le remede avoit fait le moin- „dre effet."

"Pour faire à V. A. un recit précis de l'état où il „étoit alors cela m'eſt impoſſible; chacun qui le voyoit „n'attendoit autre choſe que la mort. Animé à faire du bien „& aſſuré que l'air fixe ne lui pouvoit faire le moindre tort, „je dis au Médecin mes ſentimens, ſoutenant qu'un cly- „ſtere de l'air fixe, le même dont V. A. m'a donné la recette, „dans la lettre qu'Elle m'a fait l'honneur de m'addreſſer, étoit „le ſeul reméde pour le délivrer de la mort prochaine, tous „les autres même les mellieurs ayant déja été appliqués. Il „en rit & me répondit: Monſieur, je n'ai rien contre cette „application; mais je ſais & je ſuis certain, que ni elle ni „aucun reméde quelconque ne le peut aider, ou empecher „de mourir, même cette nuit. Le curé, les amis, les „parens, tout le village n'attendoient autre choſe. Jugez, je „Vous en prie, mon Prince, dans quel état fatal le malade „devoit être alors, & de ce qu'on pouvoit encore eſpérer de „quelque reméde! Cependant les clyſteres de l'air fixe ap- „pliqués trois ou quatre fois par jour & pendant quelques „jours de ſuite, a ſurpaſſé toute mon eſpérance."

"L'hémorragie a ceſſé tout à fait, environ deux heures „après que le premier clyſtere aërien a été appliqué, enſuite le „malade a peu à peu repris ſes forces, la tumeur de ſon corps a été

„lentement reſous, & quatre mois après il étoit parfaitement guéri. „Pendant cet intervalle il a toujours continué l'uſage de quin-„quina avec l'élexir de vitriol de Londres, jusqu'à ſa gueri-„ſon complette."

---

"Ooſterhout, le 10. Janvier 1783.

"J'ai l'honneur de Vous communiquer un cas ſingulier, „un des plus rares dans ſon genre, & dont on trouvera guères „de ſemblable: ſavoir une perte de ſang prodigieuſe des oreil-„les, occaſionnée d'une ſuppreſſion de menſtrues; cette hémor-„ragie ayant durée 17 jours de ſuite."

„La ſervante d'un aubergiſte à Ooſterhout nommé van „de Wygert, agée de 25 ans, d'une conſtitution ſanguine, „ayant le genre nerveux fort délicat, fut attaquée le 15 Novem-„bre 1782 d'une grande & continuelle hémorragie, premiere-„ment de l'oreille gauche, cauſée d'une ſuppreſſion de ſes men-„ſtrues de 7 ſemaines. Le 20 le ſang ſortit de ſes deux „oreilles, dans une telle abondance, qu'il fit frémir, & ſi quel-„que fois le ſang caillé bouchoit les cavités des oreilles, alors „il couloit par les narines & la bouche, & cela dura jus-„qu'au 1^er^ de Décembre. Ce jour commencerent à paroitre „des foibleſſes & de legers tréſſailliſſemens de nerfs; le viſa-„ge & tout le corps étoient cadavreux; le pouls étoit ſi foi-„ble, qu'on ne put presque pas le ſentir. Craignant beaucoup „pour ſa vie dont perſonne n'avoit plus d'eſpérance, je pris „la reſolution de faire paſſer dans ſes oreilles l'air fixe, après „avoir inutilement éprouvé les remédes les plus efficaces: ſavoir, „deux ſaignées de pieds, des ventouſes, des ligatures, des bains de „pieds, de l'Alkohol du vin, de l'éſprit de Térébenthine, de la

„pou-

„poudre de ſympathie diſſoute dans l'eau de Roſes, une mixture „de Vitriol & d'Alun, verſées dans les oreilles, des poſſaires „utérines, des ſuppoſitoires laxantes, avec pluſieurs remédes „internes, qui paroiſſoient être les meilleurs ſpécifiques à faire „une reſolution des oreilles à la matrice &c. je le fis à la ma„niere ſuivante, j'ajoutois à de la craye, de l'eau & de l'huile de vi„triol, ingrédiens propres à produire l'air fixe, une 30$^{me}$ partie „de la poudre de ſympathie, dont ſouvent j'avois vu dans des „autres hémorragies de très bons effets; je mis tout cela „dans une bouteille, propre à faire paſſer l'air fixe dans les „cavités des oreilles; l'ayant fortement remuée, j'appliquais „le cou à chaque oreille environ un demi quart d'heure. Une „heure après, l'hémorragie étoit beaucoup diminuée: le ſang „qui étoit auparavant rouge & caillé, devenoit pâle, délié & „aqueuſe, ſigne que les vaiſſeaux capillaires commençoient à „ſe ſerrer. Cela me fut d'un bon prognoſtic; mais quelle fut „ma ſurpriſe de voir, que peu de tems après elle fut atta„quée des convulſions épileptiques les plus horribles, dont „je n'avois jamais vû des pareilles dans tout le cours de ma „pratique de 25 ans; elles ſembloient à chaque moment met„tre fin à ſa vie: une ecume ſanguinolente ſortit & couvrit „continuellement ſa bouche, & de tems en tems il en ſortit „une glaire mucueuſe par des convulſions de l'eſtomac: une „roideur terrible de tout ſon corps empechoit presque toute „aſſiſtance & la tint toujours couchée ſur le dos; tous les ſens „internes & externes étoient disparus. Cette ſcène affreuſe a „durée à peu près 60 heures, ſans qu'elle n'aie pu prendre autre „choſe que le médicament, dont je lui fis verſer dans ſa bou„che toutes les deux heures une cuillière. C'étoit une mix„ture compoſée de la maniere ſuivante."

℞. Aq. Rutae unc. ij.
Liq. Anod. mineral. Hoffm.
Tincturae Caſtorii.
Extract. Cortic. peruv. inſpiſſ. ā ā drachm. ij.
Syr. Paeoniae drachm. vj.
M.

"Deux heures après que cet horrible accès eut commen-„cé, l'hémorragie ceſſa heureuſement. Cela me fit avoir quel-„que eſpérance ; quoique les grandes pertes de ſang accom-„pagnées de convulſions ſoient presque toujours mortelles: en-„fin j'ai été aſſez heureux quoique avec une grande peine, de „vaincre cette hémorragie avec tous les ſymptomes, & de la „guérir parfaitement. Le 8 de Décembre elle gagna ſes or-„dinaires & le 20 elle étoit parfaitement rétablie."

"Cette expérience & le merveilleux effet de l'air fixe dans „cette hémorragie & dans celle du nez, que j'ai eu l'honneur de „communiquer à V. A. le 17 de Novembre de l'année paſ-„ſée, ne doivent-ils pas encourager tous les Médecins pour „faire dans des cas ſemblables les mêmes expériences? De „quelle utilité ne pourroit-il pas être dans la dyſenterie, l'hé-„morragie uterine? &c."

Recher-

## Recherches ſur la nouvelle Planète découverte par M. Herſchel & nommée par lui Georgium Sidus. (*)

*Lu à l'Aſſemblée publique du* 11$^{me}$ *Mars.*

En refléchiſſant ſur les progrès conſidérables qu'a fait l'Aſtronomie pendant ce dernier ſiecle, tant par rapport à la Théorie du mouvement des corps céleſtes, que relativement à la perfection des inſtrumens, dont les Aſtronomes ſe ſervent pour faire leurs obſervations, & la grande ſcrupuloſité qu'on met dans l'art d'obſerver; il étoit à peine à ſuppoſer qu'il manquât encore aux Aſtronomes la connoiſſance de quelques uns des Aſtres, qui principalement conſtituent notre ſyſteme planétaire, ou qu'il reſtât à découvrir quelque nouvelle Planète. Comme il y a déja presque vingt deux ſiecles paſſés depuis qu'Eudoxe, célébre Philoſophe Grec, apporta d'Egypte la connoiſſance des cinq Planètes principales du ſyſteme ſolaire, il eſt certainement très ſurprennant, que pendant un ſi long éſpace de temps, quelque Planète ait pû échapper aux ſoins attentifs des Aſtronomes. Cependant ſi l'on conſidère que les cinq Planètes principales découvertes par les Egyptiens & Chaldéens, ne ſont pas plus éloignées du Soleil, qu'elles ne ſe préſentent à la vue ſimple, & qu'elles ſe font d'ailleurs aiſément diſtinguer des étoiles fixes par leur grandeur apparente & par leur lumiere; on doit préſumer que s'il exiſte des Planètes dont la diſtance du Soleil ſurpaſſe celle du Saturne deux ou pluſieurs fois, elles



(*) L'Académie s'eſt décidé depuis pour le nom *d'Uranus* propoſé par M. Bode Aſtronome de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Berlin: elle a auſſi choiſi le ſigne ⛢ pour repréſenter cette nouvelle planète.

les auront une lumiere bien foible, un diametre fort petit & un mouvement extrêmement lent; enſorte que leur découverte doit avoir incomparablement plus de difficulté que celle des cinq Planètes connues jusqu'ici.

C'eſt donc par un bonheur extrêmement rare & inattendu, que M. Herſchel, célébre par ſes nouvelles découvertes optiques & aſtronomiques, a réuſſi à découvrir au mois de Mars de l'année 1781, dans la conſtellation des Jumeaux une nouvelle étoile, à laquelle il remarquoit un mouvement propre très-ſenſible & dont toutes les apparences ſembloient indiquer, qu'elle méritoit d'être comptée parmi les Planètes. Car les Comètes étant environnées d'une nébuloſité, on ne remarque rien de pareil à cette nouvelle étoile, au contraire elle eſt très bien terminée, & quelque petite qu'elle ſoit, on obſerve pourtant que ſa lumiere différe aſſez de celle des étoiles fixes. D'ailleurs le peu de changement qu'on obſerve dans ſa latitude (par quoi il eſt aiſé de prouver, que l'inclinaiſon de ſon orbite à l'Ecliptique eſt fort petite) & ſon mouvement qui ſe fait ſelon les ordres des ſignes, comme celui des autres Planètes, ſont autant d'indications pour ranger cet Aſtre nouveau parmi les Planètes principales du ſyſteme ſolaire. C'eſt auſſi par ces raiſons, qu'auſſi-tôt que M. Herſchel eut fait part de cette importante découverte à la Société Royale des Sciences de Londres, le Docteur Maskelyne & les autres Aſtronomes Anglois qui avoient obſervé la nouvelle étoile, paroiſſoient perſuadés, qu'elle pourroit bien être une nouvelle Planète. Cependant comme les apparences ne ſont pas aſſez déciſives pour former une concluſion ſûre & infaillible ſur cette queſtion, il reſtoit encore à examiner, ſi le mouvement de cette nouvelle étoile pourroit être expliqué par une orbite fort peu elliptique ou presque circulaire.

De-

Depuis que pluſieurs Aſtronomes ſe ſont occupés de ce ſujet, & qu'ils ont même publié le reſultat de leurs recherches, j'eſpere qu'il me ſera d'autant plus permis de donner un expoſé des calculs que j'ai faits ſur cette matiere, que je ſuis certainement le premier, qui ait eſſayé de calculer le mouvement de cet Aſtre dans une orbite circulaire, comme je pourrois le prouver par le témoignage de pluſieurs Aſtronomes Anglois & François. En faiſant uſage de l'obſervation de la nouvelle étoile, faite par M. Herſchel lui-même en 1781 le 17 de Mars à $10^h. 40'$. temps moyen de Greenwich, & de celle que M. Maskelyne a faite à l'obſervatoire de Greenwich le 11 de May 1781 à $8^h. 28'$. temps moyen, j'ai trouvé qu'une orbite circulaire, dont le rayon eſt égal à $18\frac{93}{100}$ fois la diſtance moyenne du Soleil à la Terre, ſatisferoit à ces deux obſervations. Et quoique cette orbite circulaire ne différe pas trop conſidérablement des obſervations faites pendant l'intervalle de temps entre le 17 de Mars & le 28 de Mai, cependant comme l'angle que l'aſtre a décrit autour du Soleil entre ces deux obſervations employées dans le calcul, n'eſt que de $39'. 26''$ à peu près, il eſt aiſé de voir que de petits changemens dans l'une ou l'autre obſervation pourroient un peu changer l'orbite circulaire en queſtion.

Le mouvement de la nouvelle étoile étant extrèmement lent, parceque dans l'hypotheſe de l'orbite circulaire, il ne fait que $4°. 20'$. à peu près par an; j'ai bientôt conçu que pour les obſervations faites pendant la premiere apparition, c'eſt à dire depuis le 17 de Mars 1781 juſq'au 28 de Mai, on pourroit trouver des orbites paraboliques qui ſatisferoient, & que même la détermination de ces orbites admettroit une très grande latitude. Et ce ſentiment s'eſt trouvé enſuite vérifié par les calculs, qui m'ont convaincu que pour ſatis-

ſatisfaire aux obſervations du 17 de Mars & 28 de Mai, on peut employer des orbites paraboliques, dont les diſtances Périhélies varient depuis 6 ou 8 fois la diſtance du Soleil à la Terre, jusqu'à 20 ou 22 fois; ſans qu'il en reſulte des erreurs trop conſidérables dans les obſervations intermédiaires. Il eſt donc prouvé par ces recherches que pour ſatisfaire aux obſervations de la premiere apparition, on peut trouver une infinité d'orbites; ce qui doit d'autant moins paroitre ſingulier, que l'angle décrit par la Planète autour du Soleil n'eſt que de 51′ à peu près. Quoiqu'il en ſoit, même ces premieres obſervations ſervent à établir un élément fort eſſentiel du mouvement de la nouvelle Planète, ſavoir ſa diſtance actuelle au Soleil; quelle que ſoit l'eſpèce de ſon orbite, on ne ſauroit douter, que ſa diſtance au Soleil n'égale à peu près 19 fois la diſtance moyenne du Soleil à la Terre.

Ayant reçu après mon retour à St. Pétersbourg pluſieurs obſervations de la nouvelle Planète, faites vers la fin de l'an 1781 & au commencement de l'année précédente 1782, à Paris, Milan, Toulouſe, Stockholm, &c.; je croyois que ces obſervations me fourniroient un moyen très propre à déterminer l'orbite circulaire plus exactement que je n'avois fait & qu'elles ſerviroient même à examiner ſi une orbite parabolique ſatisfait aux obſervations ou non? Pour l'orbite circulaire je commençai d'abord mes recherches par la combinaiſon de l'obſervation de M. Herſchel du 17 de Mars 1781, avec celle qui a été faite à Milan par M. Oriani le 22 d'Octobre de la même année. Ces deux obſervations m'ont fourni une orbite circulaire dont le rayon eſt égal à $18\frac{92}{100}$ fois la diſtance moyenne du Soleil à la Terre. Comme presque tous les lieux calculés d'après ces élémens, ſe trouvent depuis l'obſervation du 22 d'Octobre en défaut, il en faut conclure, que le rayon de

de l'orbite circulaire doit être encore un peu diminué. Et en effet ſi l'on compare l'obſervation du 17 de Mars 1781 avec celle du 27 de Février 1782, on trouve qu'une orbite circulaire ſatisfait à ces obſervations, en prenant le rayon égal à $18\frac{86}{100}$ fois la diſtance moyenne du Soleil à la Terre. D'ailleurs l'obſervation du 17 de Mars étant peut-être ſujette à quelque caution, j'ai penſé d'y ſubſtituer celle du 9 d'Avril 1781; moyennant quoi j'ai trouvé que pour ſatisfaire aux obſervations du 9 d'Avril 1781 & du 27 Février 1782, on peut employer une orbite circulaire, dont le rayon égale $18\frac{87}{100}$ fois la diſtance moyenne du Soleil à la Terre. Enfin en faiſant la combinaiſon de l'obſervation du 9 d'Avril 1781 avec celle de M. de Wargentin, faite à Stockholm en 1782 le 21 d'Octobre à $8^h. 50'$. temps moyen de Greenwich; par laquelle il a trouvé la longitude de la nouvelle Planète $3^s. 7^\circ. 20'. 56''$, on parvient à une orbite circulaire, dont le rayon eſt égal à $18\frac{83}{100}$ fois la diſtance moyenne du Soleil à la Terre. Comme tous ces calculs s'accordent aſſez bien enſemble, il ſeroit ſuperflu d'entreprendre d'autres combinaiſons des obſervations; car comme il eſt prouvé par celles-ci, qu'une orbite circulaire s'accorde à peu de choſe près avec les obſervations; de même on a raiſon de préſumer que quelque exacte que ſoit une orbite circulaire pour une petite portion de l'orbe de la Planète, elle ne manquera pas de s'en éloigner à meſure qu'on augmente la portion de l'orbite décrite par cet aſtre. Et même parce-qu'en augmentant l'intervalle entre les obſervations, on eſt obligé de diminuer le rayon de l'orbite circulaire; cette diminution ſemble indiquer que l'orbite de la Planète ne ſauroit être exactement circulaire, mais qu'elle a une excentricité ſenſible. Cependant quelle que ſoit cette excentricité, il eſt bien vraiſemblable, que la diſtance moyenne dans la vraie orbite elliptique décrite par la Planète ne ſurpaſſera pas 19 fois la diſtan-

diſtance moyenne du Soleil à la Terre; d'où il faut auſſi conclure, que le temps de la révolution autour du Soleil ne ſurpaſſera pas 82 ans & 10 mois, comme de l'autre côté, il eſt prouvé, qu'il ſera certainement plus grand que 82 ans & 1 mois.

Quoiqu'il ſoit donc conſtaté, auſſi bien par les calculs que j'ai faits, que par des recherches faites par pluſieurs autres Aſtronomes, qu'une orbite circulaire eſt très bien d'accord avec les obſervations, cette preuve affirmative n'eſt pas encore aſſez concluante, pour démontrer que le nouvel aſtre ne ſauroit ſe mouvoir que dans une orbite à peu près circulaire. Mais pour établir la vérité de cette propoſition il faut commencer par prouver qu'une orbite parabolique ne ſatisfait pas aux obſervations, & enſuite que même des orbites elliptiques ne ſauroient être ſatisfaiſantes, à moins qu'elles n'ayent une excentricité très-peu conſidérable. Pour vérifier la premiere partie de cette diſcuſſion, j'ai cherché des orbites paraboliques, qui ſatisfiſſent aux obſervations faites le 17 de Mars 1781 & le 23 de Janvier 1782. Le reſultat de cette recherche fut, que pour une diſtance Périhélie 10 fois plus grande que la diſtance moyenne du Soleil à la Terre, la longitude obſervée le 28 de May 1781 ſurpaſſe la calculée de 3′. 33″, & que ſi on augmente la diſtance Périhélie, cette différence ira auſſi en augmentant. Mais pour l'obſervation du 22 d'Octobre la longitude obſervée différe de la calculée de 1′. 31″ & ſi l'on augmente la diſtance Périhélie, cette différence ſera diminuée & bientôt la longitude obſervée ſurpaſſera la calculée. Il faut donc en conclure, que ſi on vouloit rendre l'obſervation du 22 d'Octobre tout à fait d'accord avec le calcul, il faudroit qu'on augmentât un peu la diſtance Périhélie, mais en révange on augmentera en même temps l'erreur pour l'obſervation du 28 de Mai; & au contraire ſi l'on

tâchoit

tâchoit de diminuer l'erreur de l'obſervation du 28 de May, ce qui ne peut ſe faire, ſans diminuer la diſtance Périhélie, l'erreur de l'obſervation du 22 d'Octobre en ſera conſidérablement augmentée. Il eſt donc certain que quelques élémens d'une orbite parabolique qu'on choiſiſſe, on ne ſauroit éviter pour les obſervations faites depuis le 17 de Mars 1781 jusqu'au 23 Janvier 1782, des erreurs de trois minutes; & comme il n'eſt pas vraiſemblable, que de telles erreurs ſe ſoient gliſſées dans les obſervations, ſurtout lorsqu'on en trouve pour pluſieurs jours conſécutifs; il eſt, ce me ſemble, évidemment prouvé, qu'une orbite parabolique ne ſatisfait en aucune maniere aux obſervations.

Pour achever notre démonſtration, il ne nous reſteroit donc qu'à prouver que des orbites elliptiques, dont l'excentricité eſt un peu remarquable ne ſauroient ſatisfaire au mouvement de la nouvelle Planète; mais comme pour celle des orbites paraboliques, qui approche le plus des obſervations, on ne trouve que des erreurs de trois minutes; de même on peut s'imaginer, que pour les orbites elliptiques les erreurs ſeroient encore plus petites, & que par cette raiſon il faut des obſervations de quelques années pour déterminer la vraie quantité de l'excentricité. Tout ce qu'on peut faire en attendant, c'eſt d'exclurer ſucceſſivement pluſieurs ſortes d'Ellipſes & en continuant ce travail, on ne manquera pas à la fin, de trouver la vraie & celle, qui ſeule remplit les obſervations. Cependant on trouveroit moyen d'abréger cette diſcuſſion très conſidérablement, en faiſant uſage de la très importante remarque de M. Bode, Aſtronome de Berlin, lequel en ſe donnant la peine d'examiner pluſieurs étoiles fixes du Zodiaque, marquées dans les catalogues, remarqua qu'une de celles, que le célébre M. Mayer avoit obſervées l'an 1756 à Göttingue

dans le ſigne des poiſſons, ne ſe trouvoit plus dans cette place où M. Mayer l'avoit vue. En tenant compte des élémens de la nouvelle Planète, il paroit en effet bien vraiſemblable, qu'elle ſe ſoit trouvée le 25 Sept. 1756 dans la place, où M. Mayer a obſervé une étoile, qui ne ſe trouvoit pas dans les catalogues de Flamſtead, ou d'autres alors connus; au moins la différence qui ſe trouve entre le calcul & l'obſervation, peut être expliquée en partie par l'incertitude ſur la diſtance moyenne & en partie auſſi par l'équation du centre de la Planète encore inconnue. Cette obſervation ſervira donc aux Aſtronomes pour faciliter leurs recherches ſur cette Planète & on peut ſe flatter que l'excentricité ne manquera pas d'en être déterminée aſſez exactement, vu que le lieu de la Planète pour cette obſervation eſt éloigné de plus de 100° du lieu pour l'obſervation du 17 de Mars 1782.

J'ai toujours ſuppoſé, dans mes recherches ſur l'orbite de ce nouvel aſtre, qu'elle eſt décrite dans le plan de l'Ecliptique, croyant inutile de pouſſer l'exactitude plus loin, vu que l'inclinaiſon de l'orbite eſt extrèmement petite. Cependant la longitude du noeud & l'inclinaiſon de l'orbite étant des élémens très importans dans la Théorie du mouvement des aſtres, il me ſera permis d'obſerver, que faiſant pluſieurs combinaiſons des obſervations & prenant une quantité moyenne de tous les reſultats, qui en ont été déduits, j'ai trouvé la longitude du noeud $2^s. 12°. 50'$ & l'inclinaiſon de l'orbite $46'. 35''$. Mais comme dans ces déterminations il y a pour les expreſſions de la longitude du noeud des différences de $1°, 28'$, & pour celles de l'inclinaiſon de l'orbite, des différences de $4'. 28''$; les valeurs trouvées de ces élémens pourroient bien admettre des corrections fort ſenſibles. Un des moyens les plus ſûrs pour déterminer ces élémens avec plus d'exactitude, ſera

ſera de n'employer pour cet uſage que des obſervations faites dans les oppoſitions de la Planète; au moins on gagnera par ce moyen cet avantage, qu'il n'y aura presque aucune incertitude ſur les lieux heliocentriques, qui donnent l'angle décrit autour du Soleil entre les deux obſervations.

Le diamètre de la nouvelle Planète étant extrêmement petit, ce ſeroit en vain que les Aſtronomes tâcheroient de la déterminer au moyen des méſures faites par des Micromètres appliqués aux inſtrumens aſtronomiques: les erreurs qu'on pourroit commettre dans ces obſervations ne manqueroient pas de les rendre infructueuſes. Et ſi quelque Aſtronome en venoit à bout, ce ſeroit aſſurément M. Herſchel lui-même, qui ayant procuré à ſes Téleſcopes une force d'aggrandiſſement, qui ſurpaſſe de beaucoup celle que les meilleurs inſtrumens aſtronomiques, ſoit Teleſcopes, ſoit lunettes dioptriques, ont poſſedée jusqu'ici, pourroit auſſi déterminer le plus commodement & exactement de fort petites quantités & même jusqu'à des dixiemes parties de ſecondes. Cependant les eſſais qu'il a faits à l'égard de la nouvelle Planète n'ont pas trop bien réuſſi; car ayant trouvé le 17 de Mars 1781 que le diamètre étoit à peu près de 3″, il croit l'avoir trouvé le 15 d'Avril de 5½″ environ. Mais ſi l'on fait attention à la très grande diſtance de cette Planète à la Terre, on conçoit aiſément, qu'un ſi grand changement dans le diamètre ne ſauroit être admiſſible. Je ſoupçonnerois donc, que la différence dans ces méſures vient de ce que M. Herſchel employoit pour la derniere obſervation un oculaire beaucoup plus fort, que pour la premiere. M. Maskelyne ayant examiné cette Planète avec un Teleſcope de ſix pieds, qui eſt à l'Obſervatoire de Greenwich, évaluoit le diamètre à 3″. Les Aſtronomes de Milan l'eſtiment de 6 à 7″ & M. Mayer de Manheim croit le pou-

voir évaluer à 10″. Les ſentiments des Aſtronomes étant donc ſi peu d'accord entre eux par rapport à ce ſujet, j'ai cru que pour fixer mon jugement, le meilleur expédient ſeroit de comparer la nouvelle Planète avec quelque autre, dont le diamètre eſt connu. Et comme il arrivoit que la Planète ſe trouvoit l'année paſſée aux mois d'Avril & de Mai dans le voiſinage de Mars; j'ai examiné lequel des deux aſtres paroitroit le plus grand, & alors j'ai trouvé que le diamètre de Mars ſurpaſſoit conſidérablement celui de la Planète. Or Mars étant dans ce temps-là dans les environs de ſon Apogée, ſon diamètre ne ſurpaſſoit pas 5″; d'où je conclus que le diamètre de la nouvelle Planète eſt certainement plus petit que 5″ & même j'eſtime qu'il ne ſurpaſſe pas 3″. Suppoſant donc que ce diamètre ſoit effectivement de 3″, parceque la Planète eſt vue d'une diſtance preſque 19 fois plus grande que celle du Soleil à la Terre, ſi la Planète étoit auſſi éloignée de la Terre que le Soleil, elle ſe préſenteroit à nous ſous un angle de 57″ à peu près, d'où il faut conclure qu'elle ſurpaſſe en grandeur les autres Planètes, excepté Jupiter & Saturne & qu'elle eſt à peu près 36 fois plus volumineuſe que la Terre. Mais ſi ſon diamètre étoit comme M. Mayer le ſoutient de 10″, elle ſurpaſſeroit même Saturne en grandeur & ne différeroit que fort peu de Jupiter.

Le mouvement de cette nouvelle Planète, de même qu'il ſert à nous convaincre, que cet aſtre doit être compté parmi les autres Planètes du ſyſteme ſolaire, fait auſſi en même temps ſoupçonner, qu'il pourroit y avoir pluſieurs autres Planètes, placées à des diſtances plus conſidérables du Soleil. Car ſi l'on conſidère, que la diſtance des étoiles fixes, n'a preſque aucun rapport ſenſible aux dimenſions connues du ſyſteme planètaire; il n'y a rien qui empêche d'imaginer que les

les limites de ce ſyſteme s'étendent encore cent fois plus loin que l'orbe de Saturne & même au de-là ſi l'on veut. Le mouvement des Comètes qui d'après le ſentiment des Aſtronomes ſe fait dans des orbites elliptiques très excentriques, fait préſumer que parmi ces aſtres il y en a dont les Aphélies ſe trouvent pluſieurs centaines de fois plus éloignées du Soleil, que la Terre. Mais ſi on aimoit mieux croire que la plus grande partie des Comètes paſſent dans d'autres ſyſtemes, il faut au moins avouer, que celles des Comètes dont on connoit le retour, doivent être comptées parmi les habitans du ſyſteme ſolaire. D'abord on ſait que la célébre Comète obſervée en 1759 & dont la derniere Période de révolution étoit de 77 ans, eſt dans ſon Aphélie à peu près 36 fois plus éloignée du Soleil que la Terre, enſorte que ſa diſtance Aphélie ſurpaſſe presque deux fois la diſtance de la nouvelle Planète. Les Comètes obſervées en 1532 & 1661 ont des élémens fort reſſemblans, d'où on a conclu que la Comète obſervée en 1661 eſt la même que celle de 1532; ſon temps périodique ſera donc de 129 ans, par conſéquent ſa diſtance Aphélie ſurpaſſera la diſtance du Soleil à la Terre 50 fois. De même les élémens des Comètes obſervées en 1264, & 1556 ſe reſſemblent encore très bien, & ſi c'eſt la même Comète qui a reparu, ſon temps de révolution ſera de 292 ans, & ſa diſtance Aphélie à peu près 87 fois plus grande que celle du Soleil à la Terre. On voit donc que ſi on vouloit borner l'étendue de notre ſyſteme ſolaire à une diſtance ſeulement cent fois plus grande que celle du Soleil à la Terre, il y auroit pourtant aſſez de place depuis la Planète dernierement découverte jusqu'à ces limites pour y mettre pluſieurs Planètes. Quelque difficile que ſoit la découverte de ces corps céleſtes, qui par la foibleſſe de leur lumiere & la lenteur de leur mouvement, échapperont peut-être longtemps aux recherches des Aſtronomes; cette

tâche

tâche laborieuſe & pénible ne manquera pas pourtant de nous procurer des connoiſſances plus complettes & plus étendues ſur la vraie conſtitution du ſyſteme ſolaire.

---

Pour éclaircir les doutes qui pourroient ſe préſenter par rapport aux calculs, par lesquels j'ai prouvé qu'une orbite parabolique ne ſauroit ſatisfaire aux obſervations faites depuis le 17 de Mars 1781, jusqu'au 23 de Janv. 1782, ſi par hazard la premiere obſervation employée dans le calcul, qui eſt celle du 17 de Mars 1781, ne ſe trouvoit pas aſſez exacte; j'ai cru qu'il valoit la peine de faire le calcul de l'orbite parabolique en employant des obſervations plus éloignées entre elles. Pour cet effet ayant cherché une orbite parabolique dont la diſtance Périhélie ſurpaſſe 10 fois celle du Soleil à la Terre, & qui ſatisfait aux obſervations du 9 d'Avril 1781 & du 21 d'Octob. 1782, dont la derniere a été faite à Stockholm par M. Wargentin; j'ai trouvé que presque tous les lieux de la Planète calculés pour des moments qui tombent entre ces deux obſervations, diffèrent des lieux obſervés quelquefois même de 20 ou 25 minutes. Enſuite ſuppoſant la diſtance Périhélie 8 fois plus grande que celle du Soleil à la Terre, l'orbite parabolique qui remplit les deux obſervations mentionnées, ſe trouve un peu mieux d'accord que la précédente, avec les obſervations faites depuis le 9 d'Avril 1781 jusqu'au temps de l'oppoſition de la Planète avec le Soleil dans le mois de Décembre 1781, mais en revange pour les obſervations faites depuis cette oppoſition jusqu'au 21 d'Octobre 1782, elle ſe trouve plus en défaut, que la premiere. D'où il eſt aiſé de conclure, que ſi on tâchoit de trouver une orbite parabolique, laquelle en même temps qu'elle ſatisferoit aux

aux obſervations du 9 d'Avril 1781 & du 21 d'Octobre 1782, fût auſſi d'accord avec une troiſieme obſervation intermédiaire, cette orbite parabolique ſe trouveroit pour un grand nombre d'obſervations en défaut au moins de 30 minutes: enſorte qu'il eſt inconteſtablement prouvé, qu'une orbite parabolique ne ſauroit abſolument ſatisfaire aux obſervations; & même les erreurs devenant ſi conſidérables, on a raiſon de préſumer, que des Ellipſes dont les excentricités ſont un peu conſidérables, ſe trouveront tout à fait exclues.

Afin de mieux conſtater la longitude du noeud de la nouvelle Planète & l'inclinaiſon de ſon orbite, j'ai comparé l'obſervation de M. Mayer faite le 25 de Sept. 1756, avec celle du 17 d'Avril 1782 faite à Stockholm par M. Wargentin: car l'intervalle de temps entre ces deux obſervations étant ſi conſidérable, il eſt évident que quand même on ſe ſeroit trompé un peu par rapport aux lieux héliocentriques de la Planète, cela ne changeroit que fort peu dans les élémens que je me ſuis propoſé de déterminer. On trouve par ces deux obſervations, la longitude du noeud $2^s. 11^\circ. 55'. 27''$ & l'inclinaiſon de l'orbite $44'. 58''$; & ſi l'on ſuppoſe qu'il y a une correction de $10'$ à ajouter pour l'angle que la Planète a décrit autour du Soleil entre ces deux obſervations, il en reſultera une erreur négative de $21''$ pour la longitude du noeud, & l'inclinaiſon ſe trouvera $44'. 57''$. Mais les erreurs commiſes dans la latitude de la Planète obſervée le 25 de Sept. 1756, ſont d'une plus grande conſidération pour changer les élémens cherchés; car ſuppoſant, qu'il y a une correction additive de $30''$ pour cette latitude, la longitude du noeud ſe trouvera $2^s. 12^\circ. 10'. 6''$ & l'inclinaiſon de l'orbite $45'. 27''$. En tout cas, l'obſervation du 25 de Septembre 1756, eſt fort propre à déterminer l'inclinaiſon de l'orbite de la Planète, ayant

 été

été faite lorsque cet Aſtre ſe trouvoit vers la limite de ſa plus grande latitude auſtrale.

Enfin pour achever l'Hiſtoire de la nouvelle Planète, nous remarquerons, que M. Herſchel, ayant fait la découverte de cet Aſtre, & ayant ſans conteſtation le plus grand droit de lui donner un nom, a choiſi celui de *Georgium Sidus*: que M. Bode de Berlin a propoſé de le nommer *Uranos*, ce qui conviendroit aſſez à ſa place dans le ciel, laquelle eſt plus diſtante du Soleil que celle de Saturne; comme auſſi que M. Proſperin Aſtronome d'Upſale, a propoſé de le nommer *Neptune.* Quoique les Aſtronomes ſoient très libres de lui donner tel nom qu'ils jugeront à propos, cependant il faut avouer, que celui de *Georgium Sidus* n'eſt pas trop convenable, parceque par le mot de *Sidus* on entend plutôt une étoile fixe qu'une Planète; & par cette raiſon on pourroit plutôt nommer cette nouvelle Planète, le *Neptune de George III*, ou le *Neptune de la grande Bretagne*, afin d'éterniſer la mémoire des grands exploits, que les flottes angloiſes ont faits pendant les deux dernieres années. Un habile Mathématicien & Aſtronome de Dresde M. Koehler a propoſé de lui conſacrer pour ſigne celui de la Platine del Pinto, qu'on pourra marquer par un de ces charaćteres ♀, ⊙→; ce qui paroit aſſez convénable.

*A. J. Lexell.*

# Reflexions,
## ſur la néceſſité d'étudier la vertu des plantes indigènes.

*Lues à l'Aſſemblée publique du 11^me^ Mars.*

Traduit du Ruſſe.

En conſidérant le globe que nous habitons, nous y voyons partout empreintes la ſageſſe & la bonté inexprimables du Créateur; nous admirons ſes loix, ſuivant lesquelles notre Terre ſuspendue dans l'eſpace immenſe des cieux, conſerve ſon mouvement invariable, & correſpondant avec celui des autres corps céleſtes. Un tranſport divin ſaiſit notre eſprit, lorsque nous voulons par le raiſonnement fixer le poids réciproque des continens, qui forment les deux hémisphères, & que de vaſtes abymes d'eaux environnent. Nous ſommes remplis de vénération pour le Créateur, quand nous contemplons ces différentes prolongations de chaînes de montagnes, dont les ſuperbes ſommets nous fourniſſent des ſources d'eaux pûres, attirées de l'Atmosphère qui les entoure. Le ſein de ces montagnes nous donne les métaux néceſſaires pour ſoulager nos travaux, & que l'art emploie à nos embelliſſemens. En un mot; chaque production de notre globe, chaque phénomène, ſi nous l'examinons bien, nous annonce clairement la main toute puiſſante du Créateur, qui à donné l'exiſtence à tout & qui a établi dans la nature une harmonie inalterable, pour l'utilité réciproque de toutes les créatures. (*a*)



(*a*) Le célèbre Naturaliſte Linnaeus nous a marqués les traces de cette harmonie, dans ſes différens ouvrages, publiés ſous le titre de *Recréations Aca-*

De tous les objets qui excitent en nous une curioſité, mêlée d'un ſaint reſpect pour l'Être ſuprème, nous ne parlerons dans ce discours, que des magnificences, dont la ſuperficie de la Terre eſt ornée de toutes parts, & dans lesquelles ſe reconnoit principalement l'utilité qu'en retirent les habitans qui la couvrent. Nous ſavons qu'elles ſont repandues dans toutes les parties de notre globe, nous ſavons auſſi que différentes plantes y occupent différens lieux.

La principale cauſe de cette différence dans les végétaux, vient des différens degrés de chaleur, que répand ſur la ſurface de la Terre l'aſtre bienfaiſant, qui échauffe & éclaire les autres corps de notre monde, ainſi que le globe même incliné dans ſon orbite que nous habitons. S'il étoit donc poſſible de contempler ſeulement la moitié de notre globe, quel champ magniſique & émaillé de différentes productions, ne ſeroit point offert à nos yeux. En parcourant la Terre depuis les contrées brulantes du midi jusqu'aux extremités qui s'étendent vers le nord, nous verrions dans chaque climat, des plantes qui lui ſont propres, & toutes différentes de celles, qui croiſſent dans d'autres climats. Où regne une chaleur perpétuelle, nous trouverions des plantes de formes diverſes, pleines de ſucs & ſpongieuſes, qui ſe nourriſſent de la moindre humidité; des bois de différente eſpéce, de palmiers toujours verts dont les tiges nues s'élévent pour ne réunir qu'au ſommet leurs branches touffues, & former contre l'ardeur du Soleil un ombrage impénétrable, où l'habitant vient chercher un aſyle qui le garantiſſe des feux brulans de l'Orion; d'arbres fruitiers charmeroient

*Académiques;* & ſurtout dans ſon ouvrage *de la bonne diſpoſition dans la Nature* (Tome V. Opusc. CII.) & dans celui *de l'Oeconomie de la Nature.* (Tome II. Opusc. XIX.).

roient notre vue; les arbres & les plantes d'une odeur ſuave flatteroient agréablement notre odorat. Mais ſi nous promenions enſuite nos regards ſur les extremités du nord, tout nous paroitroit au premier coup d'oeil dans un état de langueur; cependant après un examen plus refléchi, nous trouverions auſſi dans ces contrées une grande quantité de plantes, que la main toute-puiſſante du Créateur y a placées, & qui couvrant en grande partie des marais qui ne deſſechent jamais, ſe diſtinguent aſſez par leur nature aride. En traverſant le milieu entre ces deux extrémités du chaud & du froid, nous rencontrerions partout des variétés étonnantes dans les plantes, augmentées encore par d'autres circonſtances. Les plus hautes chaînes de montagnes, toujours couvertes de neige & qu'on peut comparer aux contrées les plus reculées du nord, quoiqu'elles ſe trouvent dans les climats brulans du midi, s'embelliſſent de plantes qui leurs ſont propres, les vaſtes déſerts, les mers immenſes, les rivieres, les ſables &c. s'enorgueilliſſent de végétaux tous particuliers.

Ces richeſſes ſi variées, que les végétaux répandent ſur la terre, ſont ſans doute, deſtinées à l'utilité de ſes habitans; car on ſait qu'elle eſt partout peuplée de différentes eſpéces d'animaux, qui doivent pour la plupart ſe nourrir des plantes qu'ils trouvent; c'eſt pourquoi ils ont reçu chacun une différente complexion, une conformation différente, des inclinations diſtinguées, & qu'à chacun d'eux il a été aſſigné une nourriture particuliere & divers moyens de ſe la procurer: auſſi chacun d'eux a ſon habitation propre entre certaines bornes qui lui ſont préſcrites, & qu'il ne peut franchir ſans danger pour ſa vie, à moins qu'il ne ſoit aidé des ſoins de l'homme. Nous voyons par exemple, que les contrées polaires plaiſent aux immenſes baleines & aux autres habitans des mers gla-

ciales; ces monſtres marins ſont préſervés du froid par une epaiſſe couche de lard étendue ſous la peau, & qui dans une contrée chaude leur deviendroit à charge. Le lion eſt doué d'un naturel très ardent, & ſa grande chaleur intérieure qui lui vient d'une circulation du ſang, infiniment plus rapide chez lui que dans les autres animaux (*a*), lui rend les contrées brulantes de l'Afrique, non ſeulement ſupportables, mais même indiſpenſablement néceſſaires: en effet s'il reſſentoit le froid de contrées ſeptentrionales, il perdroit certainement beaucoup de ſa férocité. Le renne (*b*) couvert d'un double poil ſupporte tranquillement le froid toujours rigoureux du nord, la mouſſe (*c*) qui eſt ſa meilleure nourriture, le rend capable de vivre dans les lieux marécageux & ſtériles qu'il habite. Le chameau vit commodément dans les deſerts ſablonneux & presque ſans eau de l'Afrique (*d*), parce qu'il eſt pourvu de pluſieurs bourſes ſeparées dans l'eſtomac, pour garder de l'eau en reſerve, & par là même il rend de grands ſervices à ceux qui voyagent dans ces contrées arides & brulantes; & ſi nous examinons toutes les eſpéces d'animaux qui habitent ſur la terre, qui nagent dans les eaux, qui planent dans les airs, ainſi que cette quantité innombrable d'inſectes, nous pourrons clairement voir que des cauſes naturelles & invincibles les obligent de vivre, chacun dans les contrées qui lui ſont preſcrites, & hors desquelles il ne pourroit pas ſubſiſter.

Mais

(*a*) Mr. Wolff dans les Commentaires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. Tome XIV. p. 498.

(*b*) Cervus tarandus. Linn. Syſtema Naturae.

(*c*) Lichen rangiferus. Linn. ſp. pl. T II. p. 1620.

(*d*) Camelus Dromedarius. Linn. Syſt. Natur.

Mais l'homme, créé pour dominer ſur toutes les créatures, quoique doué d'une nature égale, quoiqu'il ait la même conſtitution, la même complexion, les mêmes organes; habite cependant dans toutes les parties du monde. Il ſeroit, en effet, difficile de trouver ſur la terre un eſpace de quelque étendue, que l'homme ne pût habiter; il vit & ſous l'équateur & ſous le poles.

Il eſt inconteſtable ſans doute, que l'habitation des ancêtres du genre humain leur fut d'abord aſſignée dans les contrées chaudes, qui ſe trouvent entre les tropiques, où regne un été presque continuel & où la terre produit, en tout tems & d'elle même avec une abondance étonnante, tout ce qui eſt néceſſaire à la nourriture de l'homme; c'eſt du moins ce qu'on doit préſumer de la bonté & de la ſageſſe du Créateur: car l'eſprit humain ne parvient que par l'expérience à connoitre ce qui peut lui être utile, & il a fallu beaucoup de tems à l'homme, pour inventer les armes & les inſtrumens, à l'aide desquels il pût abattre & prendre les animaux, & les moyens ſuffiſans de ſe garantir des intempéries de l'air; comme on le voit aſſez par l'hiſtoire de la raiſon humaine: mais que l'homme n'ait été créé que pour habiter ces contrées que nous nommons heureuſes, comme quelques auteurs à ſyſtêmes le concluent de la nudité du corps humain & de la conformation de ſes membres dépourvus de défenſes, cela eſt ſans doute contraire à l'expérience & à la ſage économie que l'on reconnoit dans la Nature. Les animaux mêmes qui ſont deſtinés à vivre dans les contrées brulantes, & que ces auteurs citent en témoignage de leur opinion, ne ſont pas tous dépourvus de laine; pluſieurs au contraire en ſont couverts: comme toutes les eſpéces de ſinges, de lions, de chameaux & autres, qui devroient donc ſelon ces auteurs vivre dans les contrées,

où le froid & le chaud ſe font alternativement ſentir dans les différentes ſaiſons de l'année. Mais l'induſtrie humaine procure aux hommes des armes qui ſurpaſſent toutes celles, dont les autres animaux ſont pourvus.

Ainſi conſidérons premierement, par quels moyens l'homme, dans des climats ſi différens, peut vivre ſans inconvenient, c'eſt-à-dire, comment il peut y jouïr d'une bonne ſanté & d'une longue vie.

Les premiers principes de la phyſique nous inſtruiſent de l'influence de la chaleur ſur les corps: elle les dilate en tout ſens & par là elle en affoiblit les reſſorts; d'où il ſuit, que les hommes qui vivent ſous les climats chauds, environnés au déhors d'un air brulant & l'inſpirant au dedans, doivent être d'un tempérament mou & débile. Le prompt accroiſſement & la puberté précoce des jeunes garçons & des jeunes filles dans ces climats, nous le prouvent ſuffiſamment. Ceux qui ont écrit de l'état des maladies du corps humain, font venir delà différens accidens; la diminution de la chaleur néceſſaire; la molleſſe des parties ſolides; la foibleſſe dans les articulations; une force vitale rapide, mais courte; une diſſipation des humeurs ſubtiles, & delà une rigidité dans les fibres qui compoſent les parties du corps; un épanchement du ſang dans les canaux qui ne lui ſont pas deſtinés, ce qui provient d'une trop foible reſiſtance des vaiſſeaux; l'epaiſſiſſement & la viscoſité du ſang, qui ſont néceſſairement accompagnés d'obſtructions dans les vaiſſeaux ſanguins, d'une diſpoſition à l'inflammation dans les différentes parties & d'où naiſſent diverſes eſpéces de fievres, qui en excitant un violent mouvement du ſang, le diſpoſent à l'acreté & à la corruption (*a*). Ainſi

(*a*) Gaubii Pathologia. p. 202. et 203.

Ainſi la vie humaine ne pourroit réſiſter à tant d'actions des cauſes exterieures, ſi le climat même ne produiſoit pas les moyens à ces maux.

Le ſein fécond de la Terre, en fourniſſant abondamment à l'homme dans ces contrées, les fruits néceſſaires pour ſa nourriture, lui ôte l'embarras de ſe la procurer; auſſi voyons-nous les peuples, qui occupent les contrées où ſont nés le premiers peres du genre humain & les autres climats chauds, ne ſe nourrir presque que de fruits. Les Indiens, ſans parler du riz & des autres productions que la terre leur fournit, trouvent dans le ſeul Cocotier, qui rapporte trois fois l'année, & leur nourriture & tout leur néceſſaire: c'eſt pourquoi les Indiens comparent l'homme le plus parfait, ſelon eux, au cocotier. D'autres peuples, comme les Egyptiens, ne ſe nourriſſent que de dattes; les autres de figues &c.

Aſſurement ce n'eſt pas la diſette d'autres nourritures, qui oblige les Orientaux à ſe nourrir des productions de la terre; mais le climat même & le deſir de conſerver leur ſanté, les y engagent. La chair des animaux facile à ſe gâter & qui ſe porte promptement à la putréfaction, pourroit ſans doute, vû la foibleſſe cauſee par la chaleur du climat dans les organes de la digeſtion, la communiquer facilement aux ſucs du corps & par là augmenter encore leur diſpoſition à la corruption. Les fruits des arbres & les plantes, au contraire, par leurs mucilages & leurs particules huileuſes, renouvellent facilement les parties du corps, qui comme on le ſait, ne ceſſent pendant toute la vie de ſe diſſiper à chaque inſtant. L'acide ſenſible ou inſenſible qu'ils contiennent, corrige leur penchant à la corruption, & en s'uniſſant à l'alkali, qui acquiert par la circulation du ſang cette proprieté, il ſe forme de cette

union un mélange neutre. Leur ſuc, ſous la forme d'une ſubſtance combinante purge les inteſtins, & en chaſſe les impurétés qui y étoient reſtées; en ſe mélant avec le ſang, il en diſſipe la viſcoſité & diminuant par là le frottement dans les vaiſſeaux, il conſerve tout le corps frais & dispos.

Mais comme les fruits contiennent beaucoup d'air fixe, qui pourroit nuire aux foibles eſtomacs des habitans, les cannes à ſucre qui croiſſent chez eux en abondance, leur fourniſſent non ſeulement le moyen d'empêcher cet inconvenient, mais encore de rendre par la douceur de leur ſuc leur nourriture plus ſubſtantielle (*a*). L'exceſſive quantité qu'ils poſſedent de plantes odoriferantes & d'arbres à épices, corrige par des exhalaiſons ſuaves les miasmes qui s'élèvent dans l'air des ſubſtances animales, tombées ſubitement en putréfaction par l'ardeur du Soleil; & leur nourriture qui en eſt aſſaiſonnée, aidant l'eſtomac à faire la digeſtion, donne une nouvelle vivacité aux forces vitales, & rétablit l'activité du ſang affoibli par la chaleur: par conſéquent ces peuples trouvent ſous la forme de mets, les plus ſalutaires remèdes rélativement à leurs climats brulans. C'eſt auſſi ce que nous pouvons voir dans nos contrées pendant les chaleurs de l'été; nous ſentons alors un certain penchant qui nous porte à manger des végétaux; & nos fruits ſauvages qui rafraichiſſent le corps mûriſſent auſſi dans le même tems.

Quoi-

(*a*) M. Pringle attribue la diminution des maladies putrides au grand uſage que l'on fait aujourd'hui du ſucre en Europe, & prouve ſa vertu antiputride qui agit; dit-il, en affoibliſſant l'acreté des ſucs du corps &c. Piſon confirme la vertu nutritive du ſucre par ce qu'on obſerve de la nourriture des négres, à qui on ne donne que le marc des ſyrops, aprés que le ſucre a été clarifié, & qui pendant les plus grandes chaleurs de l'été ſont cependant employés aux pénibles travaux des moulins.

Quoique la doctrine de la transmigration des ames, enſeignée par les ſages de l'Orient, prêchée enſuite dans la Grece par Pythagore, ſoit couverte du voile impénétrable de l'antiquité, & forme dans leur religion un point de ſuperſtition ſujet à un égarement déplorable; il paroit cependant poſſible d'en conclure, que ce n'eſt que le beſoin qui a donné naiſſance à cette doctrine d'ailleurs très ingénieuſe. Le penchant inſurmontable de l'homme à varier ſa nourriture, l'obligea à faire uſage de la chair des animaux pour ſe raſſaſier: delà durent indiſpenſablement provenir des maladies putrides, c'eſt ce qu'on remarque encore aujourd'hui chèz les Indiens & chez les Egyptiens qui ſe nourriſſant de poiſſons & d'autres animaux, ſont ſujets à différentes maladies de la peau, & quelques fois même à la peſte; (*a*) ce fut d'après cette importante conſidération que les ſages eſſayerent en ſuggerant aux peuples le dogme de la métempſychoſe, d'abolir l'uſage qu'ils avoient de ſe nourrir de la chair des animaux, & d'arrêter par là le mal qui en provenoit. Moïſe même, ce legislateur inſpiré de Dieu, qui en donnant aux Israëlites des préceptes concernant l'uſage des alimens, leur défendit la chair de pluſieurs animaux, n'avoit, il ſemble, d'autres motifs que de prévenir le mal, qui en réſultoit dans ces contrées brulantes. On peut prendre ici pour exemple la chair de porc. Cette chair, comme le prouvent les expériences de Sanctorius, en diminuant beaucoup la tranſpiration inſenſible du corps, produit une certaine âcreté dans le ſang, d'où indépendamment des maladies inflammatoires, naiſſent encore pluſieurs maladies de

m 2 la

(*a*) Le celebre Linnéus attribue ces maladies aux vers qui ſe nichent ſous la peau, & il cherche à confirmer ſon opinion par les moyens qu'on emploie en Angleterre pour s'en guerir. *Recreations Academiques.* T. VII. Art.. 131.

la peau qu'augmente de jour en jour l'action d'un ſoleil brulant, & qui peuvent occaſionner à tous ceux qui ſe nourriſſent de chair de porc & d'autre chair ſemblable, la lepre, maladie inconnue dans nos contrées. (*a*)

Un autre point de religion fondé auſſi ſur l'erreur des Orientaux, ne contribue pas peu à la conſervation de leur ſanté. Tout le monde ſait, combien de motifs les obligent à la Purification légale, qui conſiſte à ſe laver tout le corps dans l'eau; mais cette obſervation ſi elle ne ſert pas à purifier l'ame de ſes ſouillures, comme ils le penſent, nettoie du moins le corps des âcretés portées à la ſurface de la peau par la ſueur, & la garantit de pluſieurs eſpéces de la gratelle.

Plus les hommes ſont éloignés de l'Équateur & plus l'hyver leur devient ſenſible, plus ils uſent de la chair des animaux pour leur nourriture. Ceux qui habitent dans les contrées les plus ſeptentrionales, n'en ont preſque point d'autre; tels ſont les Groënlandois, les Lapons, les Islandois, & toutes les nations nomades qui peuplent les bords de l'Océan glacial.

Parmi tous ces peuples qui ménent une vie dure, & dont nous avons été temoins oculaires, ſe diſtinguent les Samoïedes errans ſur les bords marécageux de la mer glaciale; ainſi

(*a*) La lepre, décrite par Linnaeus dans l'Ouvrage ci-deſſus mentionné, qui attaque les habitans de la Botnie & de la Finlande ſe nomme en ruſſe, *maladie noire*; celle qui attaque les Coſaques d'Ural, ci-devant de Jaik, eſt nommée à Aſtracan, *maladie de Crimée*. Voyez les Voyages de M. Pallas, Partie I. p. 302. 415 & 420. Les Voyages de Mr. Gmelin, Tom. II. p. 169. & ſuivantes. Je laiſſe à d'autres à juger ſi c'eſt la même maladie que la lepre des Orientaux.

ainſi nous les prendrons pour exemple (*a*). Ils donnent leurs principaux ſoins au Renne, dont nous avons parlé plus haut. Cet animal leur procure de quoi ſe faire une maiſon facile à transporter d'un endroit à l'autre; il leur fournit les vêtemens, la nourriture, & leur ſert de bête de charge. D'ailleurs ils ſe nourriſſent de toutes ſortes d'animaux & ne dédaignent pas même la chair & le lard des animaux marins, comme par exemple, des différentes eſpéces de chiens de mer, de vache marine, de marſouin & d'autres animaux ſemblables, qu'ils péchent eux mêmes, ou qui ont été jettés par la mer ſur le rivage.

Quand nous nous repréſentons la maniere de vivre de ces peuples, & que nous la comparons avec celle des peuples qui demeurent dans les contrées où la terre produit d'elle même tout ce qui eſt néceſſaire à l'homme, il nous paroit au premier coup d'oeil, que ceux-ci menent une vie heureuſe, & que celle des autres n'eſt qu'une ſuite de peines & de maux.

Mais la nature crée tout pour le bien de l'homme, & cette vie dure fait le bonheur, c'eſt-à-dire, la ſanté des habitans de ces contrées froides. Si nous conſidérons l'effet du froid ſur les corps, nous concevons bien, que les comprimant tous en général, il comprime auſſi le corps humain; & c'eſt

 pour

(*a*) Aujourd'hui les Samoïedes habitent les pays marécageux, depuis le golfe de Mezen tout le long des côtes de l'Océan glacial; mais ils y ſont en petit nombre & ces petites peuplades ont des noms différens, & quelque différence dans leur langage; au reſte ils ſe reſſemblent presque tous par la maniere de vivre. Ceux qui demeurent au cap de Kanin, qui ſépare la mer blanche de la mer glaciale, jouiſſent peu de la chaleur du ſoleil, & dans les tems les plus chauds le fond de leur marais eſt toujours couvert de glace; les vents qui ſouſſlent du côté de la Nouvelle-Zemla, leur apportent des neiges même au milieu de l'été.

pour cela que nous voyons les habitans du nord avoir une taille ſi petite: Delà proviennent la grande élaſticité & la force du corps, la compreſſion des vaiſſeaux qui produit plus de frottement entre les parties fluides & les parties ſolides, & par une ſuite néceſſaire un mouvement plus rapide du ſang, une digeſtion plus facile des alimens, la continuelle diſſipation des ſucs nourriciers & par conſéquent le beſoin indispenſable d'une nourriture plus ſubſtantielle.

L'art & l'expérience journaliere des Médecins nous apprennent, que les particules glutineuſes des animaux rétabliſſent bien mieux les parties du corps que la vie même altere, & leur fourniſſent une nourriture plus forte que les ſucs des végétaux; mais comme les animaux, ſelon la nature du climat ſous lequel ils habitent & les alimens qu'ils y trouvent, diffèrent par la ſolidité de leur chair, ceux qui ſervent de nourriture aux habitans du Nord, ont auſſi une chair plus ferme. Hippocrate & Galien, ces peres de la Médecine, avoient déja remarqué que l'eſtomac ne digère pas aiſément la chair du véritable cerf; il n'eſt donc pas difficile de concevoir quelle doit être celle du renne, qui ne ſe nourrit que de mouſſe. La dureté & la ténacité de la chair des animaux marins ſe reconnoit aſſez à ſa ſeule couleur; car les particules tendres & huileuſes en ſe raſſemblant dans la couche épaiſſe de lard, qui eſt ſous leur peau pour les préſerver du froid, comme nous l'avons dit plus haut, privent la chair de ſucs, & la rendent par là très difficile à être digérée. Mais le froid preſque continuel dont les habitans du Nord ſont entourés & pénetrés, en tendant ſans relâche les reſſorts des organes deſtinés à la digeſtion, ces orgânes demandent auſſi une nourriture proportionnée à leurs efforts, ce que les productions de la terre ne pouvant fournir aux habitans du Nord, ils auroient

été

été expoſés aux maladies, que cauſe dans les contrées froides le défaut d'une nourriture ſuffiſante. (*a*) C'eſt pourquoi leur ſuperſtition les conduit en grande cérémonie à la recherche des monſtres marins jettés ſur la côte pour leur ſervir de nourriture. Les peines mêmes qu'ils ſe donnent pour ſe procurer les alimens que la vigueur de leurs corps leur rend ſupportables, ne contribuent pas peu à la conſervation de leur ſanté; car une vie ſédentaire & oiſive leur épaiſſiroit trop les humeurs faute de mouvement, ce qui augmenteroit conſidérablement le phlegme ſanguin, d'où il s'enſuivroient néceſſairement des maladies humides; & la quantité des ſucs augmentée aux dépens de la tranſpiration, appéſantiroit toutes les parties intérieures. Par cette raiſon ils changent en été leur maniere de vivre. Les rivieres alors ſe rempliſſent d'une grande quantité de différentes eſpèces de poiſſons, qui leur procurent une nourriture plus legére & plus facile à digérer.

Le plus grand danger auquel la vie de l'homme ſoit expoſée, provient des tems humides qui arrivent de bonne heure dans ces contrées, & des brouillards épais dont le ciel eſt couvert & qui regnent dans le Nord pendant l'été. Car l'humidité pénétrante de l'air en diminuant les forces vitales, affoiblit tout le corps & occaſionne le ſcorbut.

Mais la nature bienfaiſante n'a pas manqué de prévenir ce danger viſible, en préſcrivant à propos aux froids les plus rudes, d'arrêter tout d'un coup ces humidités pernicieuſes, &

(*a*) Gaubius dans ſa Pathologie, p. 207. N. 4. dit: que pendant les grands froids l'appétit eſt ſi violent, que s'il n'eſt pas ſatisfait à tems, il cauſe une langueur dans tout le corps, des évanouiſſemens, & quelquefois même une mort ſubite.

& à la terre de produire des fruits & des plantes propres à s'oppoſer à cette maladie. Les Samoïedes emploient pour cela, outre pluſieurs autres plantes alcalines, les fruits de *Rubus Chamaemorus* & *d'Empetrum nigrum*, qui croiſſent plus abondamment & dans une plus grande perfection à méſure que le pays s'étend plus au Nord. L'effet du premier contre cette maladie eſt prouvé par le témoignage de Simon Pauli & par celui de Bartolin, par l'expérience des habitans de la Norvège & de tous nos mariniers, qui ſont quelquefois obligés de paſſer l'hyver dans la Nouvelle Zemla, où pour ſe garantir du ſcorbut dont ils ſeroient infailliblement attaqués, ils ſont uſage de ces fruits fermentés. Les Grönlandois & les Islandois ſe ſervent pour ſe préſerver du ſcorbut, de l'*Herbe aux cuilliers* (*a*). Les Kamtchadals uſent de la décoction de *Vitis idaea*, de *Pinus cembra*, & d'*Ail ſauvage* (*b*). Les Zélandois de *grande Soude* (*c*). Nos payſans emploient le *Raifort*, le *Creſſon d'eau*, l'eau de bouleau, l'écorce tendre, jeune & intérieure, dont le pin & les autres arbres ſe revêtent au printems, *les Choux aigres*, dont l'uſage fut introduit par nos ancêtres, & qui ont ſervi de préſervatif contre le ſcorbut au célébre voyageur Cook. Pluſieurs de nos fruits ſauvages ſont doués d'une vertu antiſcorbutique.

Ainſi nous voyons que les habitans du Nord trouvent dans toutes les plantes indigénes, qu'ils emploient ſous la forme d'alimens ſolides ou liquides, les plus ſurs remédes pour ſe préſerver des principales maladies, qui regnent dans leurs

(*a*) Kranz dans ſon hiſtoire de Grönland. Tom. I. p. 87. Bergius dans ſa Matiere médicale Tom. I.

(*b*) Krachéninnikoff dans ſa déſcription du Kamtchatka Tom. II. p. 193 & 201.

(*c*) Bergius dans ſa Matiere médicale. p. 9.

leurs climats. Et ſi nous conſidérons la ſimplicité de la vie de ceux, qui habitent ſous les différens climats ſitués entre les deux extrémités du froid & du chaud, nous découvrirons ſans doute des traces qui nous indiqueront que les fruits & les plantes que la terre y produit par elle même & dont on s'y nourrit, ſont les préſervatifs les plus ſûrs contre les maladies naturelles à ces climats.

Le climat influe non ſeulement ſur la figure de l'homme, mais auſſi ſur la conſtitution, & par conſéquent ſur toutes les maladies du corps humain.

Sur le premier point nous avons une preuve journaliere; car on peut facilement diſtinguer, malgré leur mélange, les nations de l'Europe par leur ſimple figure. L'Abbé Nauton paroit avoir aſſez bien démontré, que la couleur extérieure des hommes dépend de leur pays ou de leur climat reſpectif: c'eſt à dire, du concours des différentes cauſes phyſiques, qui proviennent de la ſituation des lieux & des circonſtances locales. (*a*) L'Abbé de Manet dit, (*b*) que les enfans des malheureux Portugais, qui ſe ſont établis ſur la côte occidentale de l'Afrique, depuis 1721 jusqu'à 1764, ne different des vrais négres que par des tâches blanches; que les deſcendans des Portugais qui allerent habiter ces mêmes endroits en 1450 ſont devenus négres parfaits; que les reſtes des Arabes qui ont conquis une partie de la Nubie

(*a*) Eſſai ſur la cauſe phyſique de la couleur des différens habitans de la terre, par Mr. l'Abbé Nauton. Journal de phyſique de l'Abbé Rozier. Septembre 1781.

(*b*) Dans l'hiſtoire de l'Afrique.

bie dans le ſeptieme ſiecle, ne différent en rien aujoud'hui des véritables négres; que le Rabin Benjamin Tudéle, qui eſt devenu ſi célébre par ſes voyages, a remarqué, que les Juiſs qui formerent des colonies dans l'Afrique, il y a plus de ſix ſiecles, & qui ſe choiſirent pour habitations ces contrées méridionales de l'Afrique, ne différent point par la couleur des naturels du pays; & que ceux qui s'étoient rétirés dans l'Abyſſinie, étoient devenus auſſi noirs que les Abyſſins mêmes. (*a*) Le ſecond point eſt aſſez connu des Médecins experts qui ſçavent combien doit être différente la doſe du même médicament pour des hommes qui habitent ſous différens climats, & quelle eſt l'influence du climat ſur la maladie même. Notre propre expérience nous apprend, que quand nous allons nous établir dans un pays éloigné de notre lieu natal, ſi nous ne ſommes pas d'abord attaqués de maladies, nous éprouvons du moins un changement ſenſible au dedans de nous.

Ainſi ce n'eſt point ſans fondement que nous concluons, que la prévoyante Nature, qui veille avec tant de ſoin à la conſervation de toute créature vivante & plus particulierement à celle de l'homme, a produit abondamment dans chaque climat, des ſubſtances propres à la guériſon des maladies du corps humain. Ce n'eſt pas inutilement qu'elle a parſemé de tant de différens végétaux la ſurface de la terre, & que ſous la même élévation du pôle elle à placé presque les mêmes plantes; (*b*) que dans quelques endroits elle en fait croître

(*a*) D'après l'hiſtoire des Juifs & la conſidération de ceux qui ſont aujourd'hui diſperſés entre nous, il ſembleroit qu'ils auroient du être préſervés de cette alteration, par l'obſervation conſtante de leur loi, qui ne leur permet point le mélange avec les nations étrangéres.

(*b*) Voyés l'ouvrage de Linnéus ſur les lieux deſtinés aux végétaux. Recréations academ. Tom. V. Article LIV.

tre certains genres & certaines eſpéces qu'on chercheroit envain dans d'autres endroits. Par là elle a voulu donner à chaque pays un ſecours particulier dans les maladies qui varient exactement ſuivant le climat; car en examinant la foule des végétaux, nous remarquons, ſi nous y faiſons bien attention, qu'il n'y en a aucun, qui ne ſoit deſtiné ou pour la nourriture de l'homme, ou pour la ſubſiſtance des animaux, ou pour l'embelliſſement de la Nature, ou enfin pour la guériſon de nos maladies. C'eſt pour cette raiſon que les plantes anti-ſcorbutiques, ne croiſſent que dans les contrées du Nord, où cette maladie eſt dangereuſe, & que les épiceries & les aromates ſe trouvent dans les pays du Midi, où la chaleur continuelle affoibliſſant les vaiſſeaux du corps humain qui font mouvoir le ſang, exige des moyens propres à leur procurer une activité néceſſaire. Les climats tempérés ſelon le beſoin de ceux qui les habitent, produiſent des plantes & des fruits rafraichiſſans, qui rétabliſſent les forces, qui facilitent la tranſpiration & la ſueur, qui adouciſſent les humeurs &c. Nous ſavons que notre Bas-Volga & les autres endroits abondans en ſalines, où les habitans ſouffrent des âcretés que contracte leur ſang, produiſent à foiſon les différentes eſpéces de régliſſe (*a*) qui eſt le meilleur adouciſſant contre l'âcreté des humeurs.

L'exacte & ſçavant voyageur Steller (*b*) en faiſant l'énumération des plantes du Kamtſchatka, nous aſſure qu'il n'y

 croit

(*a*) Glycyrrhiza glabra, echinata, hirſuta, aſpera.

(*b*) George-Guillaume Steller, Adjoint de l'Académie de St. Pétersbourg, fut par elle envoyé en Sibérie dans l'Année 1738, pour aider des ſes lumieres les expéditions envoyées en 1733. Il reſta au Kamtchatka jusqu'en 1741;

croît point, à proprement parler, de plante antifébrile, ni aucune qui ſoit vomitive, par la raiſon que ni les habitans du pays, ni les étrangers qui le fréquentent, n'en ont béſoin (*a*).

Les contre-poiſons ſont principalement un exemple qui confirme cette vérité: l'humanité frémit, quand on lit de quelle

---

1741; & à cette année il s'embarqua pour un voyage de mer avec les perſonnes de l'expédition deſtinée par ordre de SA MAJESTÉ, à tenter différentes découvertes ſur les côtes de la mer glaciale, & ſurtout ſur l'Océan oriental, aux environs de Kamtchatka, de l'Amérique & du Japon. Il mourut au retour de ſes voyages d'une fiévre chaude, dans la ville de Tiumene, le 12 Novembre 1745; & cette mort prématurée ne lui a pas permis de recueillir le fruit de ſes grands travaux, en publiant lui même dans notre Patrie ſes nombreuſes & utiles découvertes.

(*a*) Feu le Profeſſeur Krachenínnikoff, compagnon des travaux de Steller, dans ſa déſcription de Kamtchatka, Tom. III. p. 120. & ſuiv. en décrivant les maladies, qui regnent au Kamtchatka, ne fait point du tout mention de fiévres; & les nouvelles les plus récentes, ſoit par écrit, ſoit par tradition orale de ceux qui ont été au Kamtchatka, aſſurent que ces maladies ſont inconnües aux habitans de cette contrée. Quoique pluſieurs plantes amères, comme la grande Gentiane (*Gentiana campeſtris*) qu'on employe au Kamtchatka ſous le nom de thé d'Ochotsk, & d'autres plantes de cette eſpèce, telles que la grande pyrole à feuilles arrondies (*Pyrola rotundifolia*), la *Suertia corniculata* &c. puiſſent par leur amertume diſſiper les humeurs fébriles; il n'eſt pas encore bien ſur que ces plantes aient la force d'aſſoupir l'agitation des nerſs, en quoi conſiſte la cure parfaite des fiévres. Au reſte, l'intention de la nature, qui a placé ces plantes au Kamtchatka, ſe manifeſte dans d'autres maladies.

quelle grande quantité de divers ſerpens mortellement dangéreux fourmillent les Indes orientales & l'Amérique, en comparaiſon des autres parties de la terre. Munis d'un venin qui agit différemment, leur morſure porte presque toujours la mort.

Le reptile le plus dangereux chez les Indiens, c'eſt le ſerpent à large col nommé *Naïa* (*a*); ſa morſure eſt ſuivie de ſpasmes, de convulſions affreuſes, de longs évanouiſſemens & enfin d'une mort inévitable: (*b*) mais la nature a placé chez eux l'*Ophiorrhiza* (*c*), ou l'arbre à ſerpent, qui eſt un arbuſte ſauvage dont elle leur a appris à ſe ſervir contre ce terrible ennemi de la vie de l'homme, pour empêcher l'effet de ſon mortel venin (*d*).

 L'Amé-

(*a*) Coluber Naïa Lin.

(*b*) Le célèbre voyageur Kämpfer, qui a vû dans l'Inde ce ſerpent, dit, " que „ c'eſt le plus féroce & le plus dangéreux des reptiles; qu'il verſe un „ mortel venin dans la plaie qu'il fait: que ceux qui en ſont mordus, „ ſe ſentent ausſitôt oppreſſés de la poitrine, & ont peine à reſpirer, „ qu'ils tombent dans de longs évanouiſſemens, & que quand on n'em„ploie pas d'abord d'antidôtes ſpécifiques, ils meurent dans des con„tractions de nerfs & des convulſions affreuſes; que lors même qu'on „ les emploie, s'il eſt déja tard, ſouvent la gangréne ſe forme & ne „ laiſſe réuſſir presque aucun traitement: que comme les Indiens vont „ toujours nu-pieds, ils craignent extrêmement ce reptile; que lorsqu'il „ eſt en fureur, la peau du col lui enfle des deux cotés en forme d'é„cuelle, ſur laquelle on voit une figure de lunettes exactement décrites „ par une ligne blanche &c.„ *Amoenitatum exoticar. p.* 565.

(*c*) Ophiorrhiza Mungos. Linn. Spec. plant. T. I. pag. 213.

(*d*) On dit qu'un animal a enſeigné aux Indiens l'uſage de cette plante contre le poiſon du Naïa. Cet animal appellé chez eux *Mungos* eſt beaucoup plus

L'Amérique renferme preſque le même nombre d'eſpèces différentes de ces reptiles: & chacune de ces eſpéces y eſt très multipliée. Le plus terrible & le plus vénimeux de tous, eſt celui à qui la nature a placé une ſonnette (*a*) à l'extremité de la queue; à fin que les animaux & ſurtout l'homme puiſſent être avertis de l'approche de ce dangéreux ennemi. Sa morſure cauſe une mort prompte & douloureuſe, & ſon venin qui enflamme d'abord violemment la poitrine, fait en quelques heures, & quelquefois même en peu de minutes, (*b*) pourrir tout

plus connu ſous le nom d'*Ichneumon*, duquel on raconte beaucoup de choſes fabuleuſes, à l'occaſion du Crocodile. Kämpfer parle de l'Ichneumon p. 574. "cet animal, dit il, chaſſe le Naïa, comme nos chats „ les ſouris, & dès qu'il l'apperçoit il commence à ſe battre avec lui. „ S'il en eſt mordu, il court d'abord chercher une ſorte de plante & auſſitôt qu'il en a mangé, ſans héſiter il retourne au combat. Les Indiens „ ſe ſont aſſurés que cet animal lorsqu'il eſt bleſſé, mange une racine, „ appellée Mungos dans leur langue, & qui le garantit de l'effet du venin". Ce célébre voyageur avoit chez lui un de ces animaux apprivoiſé & il le prenoit toujours avec lui dans ſes voyages; il l'a vu même combattre avec le ſerpent, mail il n'a pû remarquer exactement la plante qu'il cherchoit

Un Ichneumon fut apporté vivant de la Perſe à l'Académie & vécut longtemps chez M. Laxmann: il devint à la fin ſi familier, qu'il ſe laiſſoit prendre de la main; du reſte il étoit toujours vif & voleur.

(*a*) Crotalus horridus Linn.

(*b*) Catesbi dans ſon hiſtoire naturelle de la Caroline, de la Floride & des isles des Bahama, parle de ce ſerpent & dit: que lorsqu'il enfonce ſes dents, qui ont ſouvent un pouce de long, il cauſe les accidens les plus fâcheux; & particulierement ſi ſes longues dents offenſent les gros vaiſſeaux, ce qui arrive fort ſouvent. Une déplorable expérience a

tout le corps. On n'avoit pu d'aucune façon, en arrêter parfaitement les effets, & l'art même des plus habiles Médecins y avoit échoué, jusqu'à ce que Mr. *Teinnint* ait enfin tiré des ſauvages leur ſecrét, qui conſiſta dans l'uſage de la petite racine d'une plante qui croit d'elle même en Amérique, & qui eſt appellée racine de *Senega*, (*a*) laquelle employée à temps, produit un effet ſalutaire contre ce poiſon.

Quoique les contrées que nous habitons, ne nourriſſent pas un auſſi grand nombre de ces reptiles dangéreux, elles n'en ſont cependant pas tout à fait exemptes. Entre autres les plus vénimeux ſont *la Vipere du Nord*, (*b*) & *le Cherſea*, ou *l'Aſpic du Nord*, dont la morſure cauſe ſouvent la mort. Nous n'allons pas dans les pays éloignés chercher à ce

a appris, que celui qui eſt mordu de cette maniere peut à peine ſurvivre au delà des 5 ou 10 minutes, & quelquefois même pas plus de deux minutes. Si ſes dents ont porté dans un endroit charnu, ſans avoir endommagé quelque partie principale, les Américains recourent à une ſorte de racine, comme au reméde le plus ſalutaire & le plus ſur, & pour cette raiſon ils en portent toujours ſur eux. Ceux qui ſont bleſſé en machent & puis l'avalent; ils en appliquent auſſi de toute machée ſur la plaie même.

(*a*) Polygala ſenega Linn.

(*b*) Coluber Berus Linn. Quand on a été mordu de cet animal, on reſſent continuellement dans la plaie une douleur pareille à celle, que cauſeroit la piqûre d'une aiguille; après quoi ſurviennent l'enflure de la partie bleſſée, une paleur froide, un clignement d'yeux, un écoulement involontaire de larmes, des douleurs aigües accompagnées des friſſonnemens, un pouls foible & inégal, la ſoif, une ſueur froide, des tranchées, la diarrhée & des vomiſſemens, une difficulté de reſpirer, des angoiſſes, un ſommeil profond, enfin des crampes & des convulſions, dans lesquelles l'homme expire.

ce mal un reméde, que nous fournit le *Frêne*, arbre ſauvage (*a*) qui croît chez nous, & dont quelques uns comparent avec raiſon les autres vertus médicinales à celles du bois de *Gayac*, (*b*) production de l'Amérique méridionale. (*c*).

Ajoutons à tout ceci les remédes domeſtiques, dont ſe ſert utilement chez nous le commun du peuple, malgré ſa grande ignorance en médecine. Qui ne ſçait pas au reſte que les habitans des Indes orientales & occidentales n'empruntant aucun reméde d'ailleurs, ſçavent dans chaque contrée ſe guérir avec les propres ſubſtances que produit la contrée, & l'on dit même qu'ils ont fait des progrés dans la médecine beaucoup plus conſidérables, que toutes les écoles des différens ſiecles. (*d*) Auſſi nos habitans du Kamtchatka, ſelon le témoignage de Steller, trouvent-ils (*e*) dans une petite quantité de plantes tout ce qui leur eſt néceſſaire. Car il aſſure que le gout des Kamtchadales pour les plantes, la connoiſſance qu'ils ont de leurs vertus, & l'uſage qu'ils en font dans les alimens & la médecine, ſont tels qu'ils ne peuvent être ſurpaſſés en cela par les autres peuples ſauvages des contrées lointaines, ni même par les nations les plus éclairées; qu'ils connoiſſent par leur nom toutes les plantes qui croiſſent chez eux, leurs vertus particulieres, & la différence de ces vertus dans les plantes, ſelon les différens endroits qui les produiſent &c.

Si

(*a*) Les Actes de l'Acad. Royal. des Sciences de Suede. Tom. XXVI. p. 101.

(*b*) Guajacum officinale Linn.

(*c*) Spielmann Matiere médicale p. 215.

(*d*) Brunner ſur les glandes p. 149. Tournefort dans la préface à l'hiſtoire des végétaux, &c.

(*e*) Kracheninnikoff dans ſa déſcription du Kamtchatka. Tom. II. p. 205.

Si nous conſidérons les premiers tems où la médecine prit naiſſance dans notre pays, nous verrons que les ſimples les plus communs que nous foulons aux pieds, & qui étoient ailleurs employés avec ſuccès à la cure des maladies aux quelles l'homme eſt ſujet; nous verrons, disje, que ces ſimples furent tirés des autres contrées; mais avec la perfection de l'art, on vit auſſi ſe perfectionner la collection de nos plantes indigènes pour l'uſage de la médecine: on n'y a auſſi introduit que de nos jours, pluſieurs plantes naturelles à la Ruſſie qui non ſeulement occupent avec avantage, la place de celles qu'on apportoit de l'étranger; mais qui enrichiſſent encore les pharmacies de nouveaux moyens de guériſon; par exemple la *Serratula amara*, (*a*) dont l'effet médicinal eſt renfermé en une forte, mais agréable amertume, & qui ſans compter ſa vertu de fortifier les premieres voies, eſt encore employée chez les habitans de nos provinces éloignées au lieu de Quinquina dans le traitement des accès de fievre. La *Bénoite*, (*b*) qui croit particulierement dans les lieux ſecs & qui a l'odeur du clou de girofle, a fait voir auſſi ſon effet ſalutaire dans les fievres intermittentes. La *Pivoine* (*c*) qui a un goût aromatique, eſt uſitée dans toute la Sibérie comme un reméde infaillible dans ces mêmes maladies. Les écorces de pluſieurs arbres qui croiſſent dans le Nord, ont un goût ſemblable à celui de la célébre écorce febrifuge du Kina, & n'attendent peut-être que notre examen, pour nous convaincre de leurs vertus (*d*). L'ar-

(*a*) Voyages de M. Pallas dans la Ruſſie. Part. I. p. 275.

(*b*) Geum urbanum Linn. Roudolphe Boukhan, Remarques ſur l'effet de la racine de bénoite dans les fievres, & ſurtout dans les fievres intermittentes.

(*c*) Poeonia anomala. Linn. Sp. Pl. T. I. 1747.

(*d*) Le Quinquina que l'on regarde encore jusqu'aujourd'hui comme le ſeul remé-

L'arbuſte appellée en latin *Rhododendron Chryſanthum* (*a*) eſt un remède efficace pour ceux qui habitent des pays montagneux, lorsque par la contrainte où ils ſont, de toujours monter & deſcendre, ils éprouvent une laſſitude dans les membres, & qu'ils ſont tourmentés de la maladie articulaire qui nait de cette laſſitude (*b*). Les Médecins étrangers (*c*) y ont même trouvé de ſemblables vertus. Le *raiſin de mer* (*d*) qui donne de la fluidité au ſang qui s'épaiſſit, qui appaiſe la ſoif, & procure une ſueur abondante ſans agiter ſenſiblement le ſang, promet un des meilleurs remédes dans les rheumatismes & autres maladies de cette nature. La *Buſſerole* ou *raiſin d'ours* qui remplit nos forets du Nord, & qui de tout tems n'a été employée que dans les tanneries, obtient aujourd'hui la préférence ſur presque tous les autres remédes pour les maladies de reins (*e*). Et qui auroit cru que notre *Sorbier ſauvage*, [Rebina]

---

remède capable d'arrêter les mouvemens fievreux, fait ſurtout voir notre négligence à faire des expériences ſur les vertus de nos plantes indigénes. On ne peut pas s'imaginer, que la nature bienfaiſante en tout ait réfuſé aux autres parties de ce Globe, des remédes contre une maladie presque univerſelle, & que cette même nature n'en ait gratifié que le ſeul empire du Pérou. M. Gerhard dans ſa matiere médicale. p. 301 & ſuiv. aſſure qu'il a trouvé dans l'écorce de ſaule, une vertu antiſébrile qui répond à celle de l'écorce du Pérou. M. Speckbouk, dans ſon ouvrage intitulé: *Diſſertatio de ſalice laurea odorata. Trajecti ad Viadr.* 1769. attribue à l'écorce du ſaule commun le même effet &c. Mais combien reſte-t-il encore d'arbres de cette eſpece, qui croiſſent dans nos contrées & ſur lesquels on n'a point fait d'expériences.

(*a*) Rhododendron Chryſanthum. Voyages de M. Pallas. T. III. p. 729.

(*b*) Flora Sibirica. T. I. p. 121.

(*c*) Kelpin, Remarques pratiques ſur l'uſage du Rhododendrum Chryſanthum dans les maladies rheumatiques. A Berlin & Stettin, 1779.

(*d*) Ephedra monſtachia. Linn. Flora Sibirica. Part. I. p. 173.

(*e*) Arbutus uva urſi Linn. Girard & le célébre Haen dans l'art de guerir. 2. p. 159.

[Rebina] qu'on abandonne en proie aux oiſeaux, eut pu procurer dans ces mêmes maladies le plus grand effet, quand pluſieurs aûtres remédes y avoient été inutilement employés (*a*). Au lieu de la Racine de *Salep*, qui nous vient de Turquie, & qui ſert tant à nourrir, qu'à purger les Phthiſiques &c., on a introduit l'uſage de differentes racines de plantes du Nord connues ſous le nom de *larmes de Kokou* (*b*). La racine de *Carex araneria* qui croit chez nous ſur le bord ſablonneux de toutes les rivieres, peut être comparée, quand il s'agit de purifier les fluides, à la racine qu'on nous apporte de la Chine & de l'Amérique méridionale. Le *Genièvre* qui vient chez nous dans les endroits les plus ſtériles eſt, ſelon les expériences les plus récentes, non ſeulement égal en vertu médicinale (*c*) aux productions de l'Amérique, telles que le *Gayac* & le *Saſſafras*, mais même il les ſupaſſe. Le *Ledum paluſtre* qui embellit nos marais, eſt un reméde efficace non ſeulement dans la toux ſpasmodique, mais en diviſant puiſſamment & purgeant les phlegmes, il promet encore un effet ſouverain dans toutes les maladies de cette eſpèce (*d*). Dans l'écorce de *Bourgene* (*e*), dans le fruit du *Nerprun* (*f*), dans l'agaric du *Mélèze* (*g*), dans la racine du *Thalictron aquilegifolium*, dans le *Lycopodium ſelago*, dans le *Lichen aphthoſus*, & peut-être dans pluſieurs autres plantes de ce genre; dans

O 2 la

(*a*) M. Henniucke dans les nouvelles Actes Phyſico-Médecinales. A. N. C. Part. II. p. 115.

(*b*) Orchides. M. Lund dans les Actes de l'Acad. Royale de Sciences de Stockholm. Tom. XXXII. p. 310.

(*c*) M. Spielmann Matiere médicale. p. 273.

(*d*) Linnéus dans ſes Recréations Académiques. Tom. III. p. 68.

(*e*) Rhamnus frangula Linn.

(*f*) Rhamnus catharcticus.

(*g*) Agaricus Laricis.

la racine du grand *Liſeron* (*a*), dans la *Rhubarbe* de Siberie (*b*) &c. nous trouvons des remèdes infaillibles pour purger les premieres voies. L'écorce de notre arbuſte ſauvage, connué ſous le nom d'écorce de *Bois genti*, ou de *Saint-bois* (*c*), produit les mêmes effets que l'écorce de *Garou*, qui nous vient de l'étranger: je ne finirois pas, ſi je voulois rapporter en détail, tous les exemples qui reviennent à ce ſujet.

Il eſt donc certain, que ce n'eſt point au défaut des plantes médecinales indigénes, que nous devons nous en prendre, lorſque nous nous voyons ſouvent trompés dans notre attente; mais à nos préjugés ſeuls, qui nous font négliger nos plantes propres, auxquelles la nature, comme il paroit, a donné des vertus médecinales relatives aux circonſtances du climat, & d'après cela mettre toute notre confiance en des plantes exotiques. Les Médecins ſçavent à leur grand regrèt, combien il arrive ſouvent que les productions que nous recevons du Levant & de l'Amérique, & qui forment la partie la plus importante de nos pharmacies, ont perdu toute leur vertu, ſoit pour avoir été trop longtems, ou mal, conſervées, ſoit ce qui n'eſt pas rare, parce qu'elles ont été falſifiées & mélangées, par des gens qui ne cherchent que leur interêt. Quels inconvéniens ne peut-on pas éviter en employant nos plantes indigènes.

C'eſt en vain, que nous fondons notre eſpérance ſur les plantes connues & adoptées dans la médecine, & que l'on cultive dans les jardins & dans les potagers; car comme on le ſait par pluſieurs expériences, en changeant de figure elles per-

(*a*) Convolvulus ſepium Linn.

(*b*) Rheum undulatum.

(*c*) Daphne mezereum.

perdent déja beaucoup de leur vertu médecinale, en comparaiſon des plantes qui croiſſent en liberté.

En pourſuivant les recherches que je ne fais ici qu'indiquer, quels nouveaux traits de lumiere n'eclaireroient pas la médecine, ſi avec le temps & redoublant les ſoins, nous parvenions à connoitre les vertus & les effets de toutes nos plantes par rapport au pays qui leur eſt naturel. Ce n'eſt pas la grande quantité de moyens qu'il faut à un Médecin, mais le choix qu'il doit en faire. Il n'y a point d'inconvénient à commencer, (*a*) & un travail aſſidu peut tout conduire à un heureux degré de perfection.

Cette recherche, la principale dans la médecine, établie par les anciens, mais obſcurcie & defigurée par les qualités occultes d'Ariſtote (*b*) & des ſes disciples, embarraſſée par les expériences forcées de la chymie, & par les raiſonnemens qu'on fit ſur ces experiences (*c*), aujourd'hui pluſieurs Médecins, imitant en cela le louable exemple de Gesner, s'efforcent à l'envie de la renouveller; & dans l'heureux ſiecle où nous vivons, elle peut être ſans doute amenée au

 point

(*a*) Voyez l'ouvrage de Haſſelquiſt *de l'Effet des Herbes*, dans le Recueil des recréations académiques de Linnéus. T. I. p. 418. & Gmelin dans les Nouveaux Commentaires de l'Académie des Sciences de St. Pétersb. T. XII. p. 522. La Pharmacopée de M. Spielmann & Bergius.

(*b*) Galien mis au nombre des premiers peres de la médecine, introduiſit ces qualités occultes, ſous le nom *de Chaud*, *de Froid*, *de Sec*, & *d'Humide*, & l'ecole des Médecins l'a ſuivi pendant pluſieurs ſiecles.

(*c*) Voyez Tournefort dans la Flora de Paris. p. 94. Tauvri dans ſon traité des Médicamens. M. Chomel dans l'Hiſtoire dés plantes. p. 37. dit: que les Chymiſtes de l'Académie des Sciences de Paris ont éprouvé chymiquement jusqu'à 2000 différentes plantes: mais que de toutes leurs peines ils n'ont rien retiré, que la reſolution d'abandonner les préjugés ſur l'utilité des expériences chymiques des plantes.

point de ſa perfection. CATHÉRINE LA GRANDE, qui nous gouverne avec autant de ſageſſe que de douceur & dont l'eſprit pénétrant embraſſe tout, n'a pas manqué parmi pluſieurs inſtitutions incomparables qui promettent le bonheur de Ses ſujets & la gloire de Son empire, de préſcrire non ſeulement des regles à ſuivre pour retrancher les inutilités en médecine, mais encore les moyens d'étendre les progrès de cette ſcience (*a*). Son amour pour Ses ſujets, & Sa généroſité bienfaiſante L'ont portée à établir partout des aſyles aſſurés en faveur des indigens malades (*b*), qui par leur maniere de vivre ſimple & uniforme ne demandent que des remédes ſimples. Elle a ordonné de pourvoir tous les diſtricts de l'empire de Ruſſie (*c*), de Médecins habiles: & de tels hommes peuvent par leurs lumieres réunies améner, pour le bien de l'humanité, cet objet à ſa perfection. Ils trouvent déja pluſieurs matériaux préparés pour cet effet, dans les déſcriptions phyſiques des voyages entrepris par l'ordre de cette Souveraine éclairée; bientôt recevront-ils auſſi une exacte collection de deſſins des principales plantes de la Ruſſie, qu'on va donner à grands fraix au public, de l'exprès commandement de SA MAJÉSTÉ; (*d*) & parmi ces plantes il s'en trouvera pluſieurs, qui ſont reſtées jusqu'à préſent inconnues, & dont aujourd'hui les vertus médecinales ſont éprouvées & aſſurées par l'expérience.

*J. Lepechin.*

(*a*) Voyez l'inſtruction donnée en 1763 au Collége de Médecine.

(*b*) Reglemens pour l'adminiſtration des Gouvernemens de l'Empire de Ruſſie. Ch. XXV. §. 386. & ſuiv.

(*c*) Etat des Gouvernemens-généraux-

(*d*) M. Pallas dans l'annonce de cette édition du 28 de Juillet 1782.

Rapport

# Rapport au ſujet d'un nouvel Inſtrument du Capitaine Burdett, nommé Compas Optique,

par

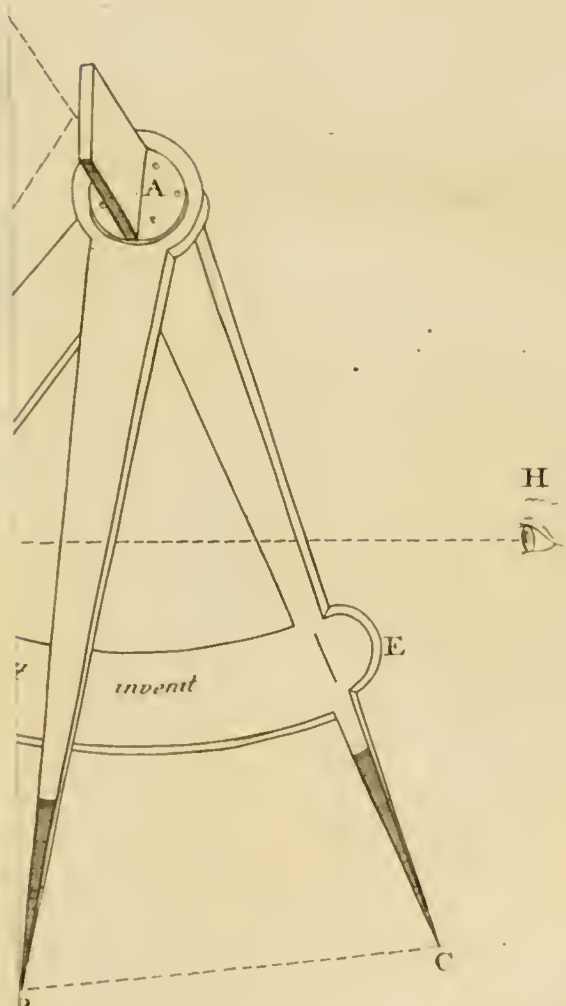
M. *A. J. Lexell.*

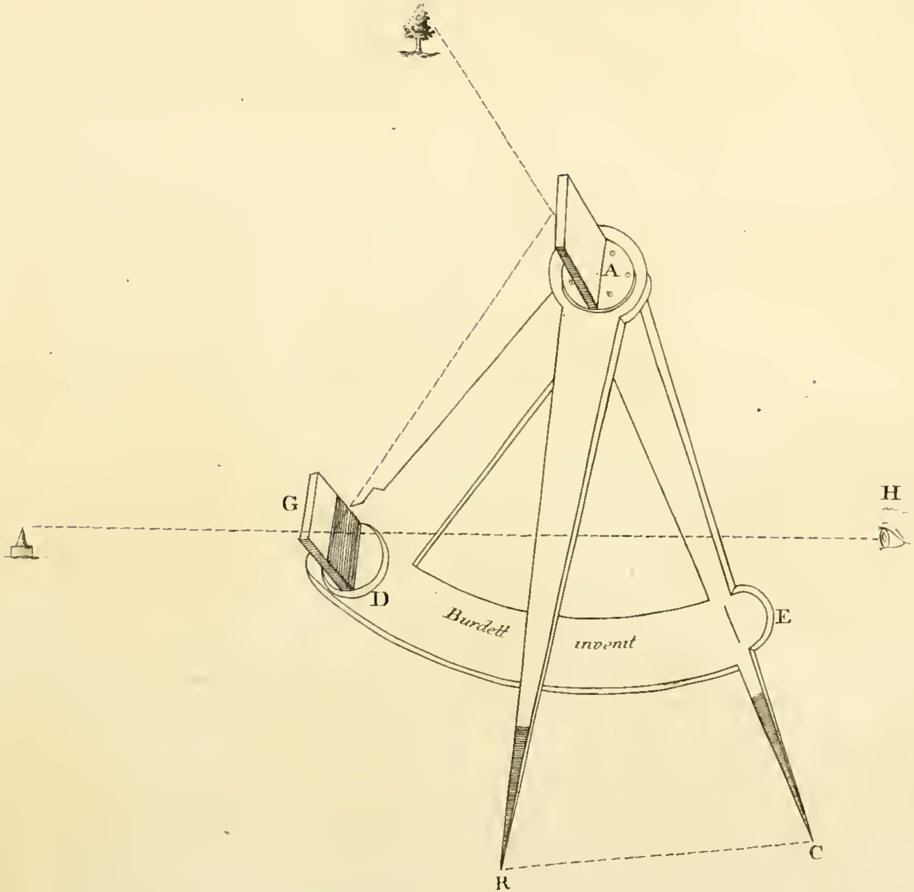
*Lu à l'Académie le* 13 *Mars.*

Je ne m'arreterai pas aux réflexions de M. Burdett ſur le degré d'exactitude des inſtrumens dont on fait uſage pour méſurer des angles, ni au détail qu'il fait des avantages que ſon inſtrument doit poſſeder, en me reſervant pourtant de revenir à ce dernier article, après avoir donné la déſcription de l'inſtrument, où je tâcherai autant que poſſible de ſuivre le mémoire préſenté par l'Auteur. La Figure deſſinée par l'Auteur repréſente l'inſtrument tout entier; A R eſt un index mobile Planche * autour du centre A, ſur lequel le grand miroir eſt attaché, dont la partie averſe eſt celle qui eſt tournée vers A. Cet index étant pointu en R fait un des bras du compas; l'autre bras A C eſt immobile & à lui eſt attaché l'arc E D de 60°, dont l'extremité D eſt jointe avec le centre par la barre A D, enſorte que cet arc E D ſoit parfaitement dans le même plan que le bras A E C & la barre A D. Le grand miroir en A étant attaché à l'index A R tourne avec lui dans ſon mouvement depuis le point de coïncidence des deux barres C, juſqu'au point de l'arc D E le plus diſtant de E, qui eſt D, l'arc E D

E D étant de 60°; où il eſt eſſentiel que dans ce mouvement le plan de l'index A R reſte toujours parallele avec celui de l'arc E D. D G eſt le petit miroir placé en D dans une poſition parallèle au grand miroir A & qui doit être conſtruit enſorte qu'on puiſſe l'incliner un peu ou vers A, ou dans une direction contraire, afin d'ajuſter ſon plan perpendiculaire à l'arc D E, ſi par hazard il y a quelque faute dans la conſtruction primitive. Ce petit miroir D G eſt tourné vers le grand miroir A, & il n'y a de ce miroir D G que la moitié argentée, la moitié ſupérieure reſtant transparente, afin que le ſpectateur placé en H puiſſe voir les objets, qui ſont dans la direction de cette partie du miroir G, en même temps qu'il voit quelque autre objet reflechi par la partie du miroir argentée, dont l'image vient d'être reflechie par le grand miroir. Par ce moyen il eſt aiſé de faire que l'image d'un objet éloigné, qui ſe repréſente par la réflexion des deux miroirs, ſoit coïncident avec quelque autre objet vû par la viſion directe, ou que deux objets quelconques, entre lesquels l'angle formé à l'oeil du ſpectateur ne ſurpaſſe pas 120°, peuvent être rendus coïncidents & paroiſſent ſe toucher. La plaque D à laquelle le miroir G eſt attaché, eſt auſſi mobile ſur ſon centre, afin de rendre le miroir G parallele au miroir A, lorsque les deux point R & C coïncident. La grandeur de l'Inſtrument & la matiere dont il eſt conſtruit, ſont arbitraires & dépendent du choix que chacun ſera. Celui de l'Auteur eſt conſtruit de bois d'ébéne d'après une échelle double de celle de la figure.

Les avantages que l'Auteur attribue à cet Inſtrument ſont les ſuivans: 1°. Pendant une obſervation faite ſoit par terre, ſoit par mer, l'exactitude de l'obſervation ne ſouffre pas par le mouvement de l'Inſtrument. 2°. Cet Inſtrument n'a beſoin


A
H
E
invenit
R
C


A
G
D
E
H
Burdett
invenit
R
C

béſoin d'aucun ſupport. 3°. On peut l'employer dans des places, où d'autres Inſtrumens plus volumineux & avec des ſupports reſteroient inutiles: comme pour des Officiers du génie chargés de dreſſer des cartes dans un païs ennemi & pendant des ſiéges. 4°. Il eſt arbitraire où l'oeil eſt placé, lorsqu'on employe cet Inſtrument, pourvû qu'il ſoit dans un plan, qui paſſe par la ligne qui diviſe la partie transparente du petit miroir de la partie couverte. Pour obtenir de l'exactitude ſur ce point, on peut attacher à A C une plaque qui ait une fiſſure parallele à la ligne qui ſépare les deux parties du petit miroir. Enfin l'Auteur finit ſa déſcription par quelques remarques ſur l'uſage practique à faire de cet inſtrument, ou comment on doit s'en ſervir.

D'après cette eſquiſſe que j'ai donnée de l'Inſtrument de M. Burdett, il eſt aiſé de s'appercevoir que cet Inſtrument eſt conſtruit d'après les mêmes principes ſur lesquels la conſtruction du Sextant de Hadley eſt fondée, & qu'il a les défauts de ce Sextant ſans en poſſéder tous les avantages. Le Sextant étant un Inſtrument inventé pour l'utilité des navigateurs, qui à cauſe du continuel mouvement du vaiſſeau ne ſauroient employer des Quarts-de-cercle ou d'autres Inſtrumens aſtronomiques munis de ſupports; on conçoit auſſi que l'Inſtrument de M. Burdett pourroit être utile dans des cas où il faut néceſſairement avoir un Inſtrument portatif & qui prend peu de place. Mais lorsque M. Burdett ſoutient que cet Inſtrument ou le Sextant de Hadley eſt préférable aux autres Inſtrumens aſtronomiques, dont on fait uſage pour la méſure des angles, il ſoutient une propoſition qui n'obtiendra jamais l'approbation des Aſtronomes. D'ailleurs je penſe que c'eſt un defaut aſſez eſſentiel dans l'idée de la conſtruction de l'Inſtrument de M. Burdett, qu'il n'a pas détaillé la maniere de la-

 quel-

quelle on méſure les angles ſur l'arc D E: & je ne ſaurois me perſuader, qu'il faille ne pas être trôp ſcrupuleux ſur ce point, comme l'Auteur le ſemble penſer. Si les diviſions des angles ne ſe trouvent pas marquées ſur l'arc E D, je ne comprends pas comment on peut déterminer les valeurs des angles méſurés, ſi ce n'eſt peut-être par les cordes R C tirées entre les deux pointes des bras du Compas R & C. Or il eſt bien à craindre, qu'en méſurent ces cordes on en commette des fautes aſſés ſenſibles.

---

Rapport

## Rapport fait à l'Académie au ſujet d'un Ouvrage de M. l'Abbé Rochon qui a pour tître: Recueil de mémoires ſur la Méchanique & la Phyſique.

*Lu à l'Academie le 30 Juin. 1783.*

Nous Commiſſaires nommés par l'Académie, Meſſieurs Roumovsky, Fuſs & moi *, avons examiné un Ouvrage imprimé de M. l'Abbé Rochon qui a pour titre: *Recueil de mémoires ſur la Méchanique & la Phyſique*; & comme le deſſein de l'Académie, en nous chargeant de cet examen, n'a certainement pas été, que nous entraſſions dans des détails auſſi longs qu'inutiles ſur tous les ſujets dont traite ce livre, nous avons cru ſatisfaire à notre commiſſion, en propoſant notre ſentiment ſur les principaux inſtrumens inventés & exécutés par M. l'Abbé, lesquels ſont: 1°. ſon Diasporamètre ou l'inſtrument qui ſert à méſurer la diſperſion des rayons de lumiere, 2°. ſon Micromètre à prisme; & 3°. ſa Machine à graver.

On ſçait le principe ſur lequel la conſtruction des lunettes achromatiques eſt fondé, c'eſt que parmi différens corps pellucides, il y en a dans lesquels les rayons de lumiere ſouffrant la même réfraction, leur diſperſion eſt très-différente, d'où l'on conclut qu'il eſt poſſible de compoſer de deux matières diverſes, deux prismes qui joints enſemble détruiſent les couleurs, mais qui pourtant donnent un déplacement de l'objet repréſenté. Pour faire uſage de ce principe, il eſt donc néceſſaire de connoître au juſte la quantité de la diſperſion des

p 2 rayons

* M. Lexell.

rayons de différentes couleurs dans les corps pellucides. Or quoiqu'on ait pour cet effèt employé pluſieurs moyens, comme par exemple la méſure de la largeur des ſpectres colorés, repréſentés par différens prismes, ou bien deux prismes dont l'angle eſt variable; il ſemble cependant que l'idée qu'a ſuivie M. l'Abbé Rochon eſt préferable à tous les moyens connus avant l'invention de ſon nouvel inſtrument, auquel il a donné le nom de Diasporamètre & qui eſt composé de deux prismes dont l'un tourne ſur l'autre par un mouvement circulaire. Car en réfléchiſſant un peu ſur le méchanisme de cet inſtrument, il ne reſte aucun doute que les réſultats trouvés par ce moyen pour la diſperſion des rayons de différentes couleurs ne ſoient très-ſurs & très-précis.

Quelque ingénieux que ſoient les Micromètres appliqués aux objectifs des lunettes achromatiques ou aux téleſcopes, on y a pourtant remarqué des défauts très-eſſentiels, qui tirent leur origine principalement d'une eſpèce de parallaxe dont la viſion eſt affectée & qui fait qu'auſſitôt que la poſition de l'oeil n'eſt pas coïncidente avec l'axe de l'inſtrument, les deux images ſont répreſentées un peu différentes, de ce qu'elles ſont lorsque l'oeil ſe trouve dans cet axe. Par cette raiſon M. l'Abbé Rochon a inventé un nouveau Micromètre qui doit ſervir à méſurer de petits angles: cet inſtrument eſt composé d'un prisme de cryſtal de roche combiné avec deux prismes de verre ordinaire; & cet aſſortiment de prismes étant placé entre l'objectif & l'oculaire dans une lunette, ſi on le meut le long de l'axe de l'inſtrument, on trouvera aiſément le point, où les deux images repréſentées par la double réfraction du cryſtal de roche ſe touchent; & alors au moyen d'une échelle qui indique la diſtance entre les prismes & le verre objectif, on évaluera les angles à méſurer.

Quel-

Quelque convaincu que M. l'Abbé Rochon paroiſſe être de la bonté de cette invention, nous aurions ſouhaité néanmoins, qu'il en eut conſtaté l'utilité par pluſieurs obſervations faites ſur les diamètres des Planètes; parce qu'une répétition aſſidue de ces obſervations auroit mis les Aſtronomes en état de juger de l'exactitude qu'on doit ſe promettre de cet inſtrument. D'ailleurs ſi d'un côté il paroit très-avantageux d'avoir presque toute la longueur de la lunette pour échelle du Micromètre, par lequel les angles ſont méſurés, il nous paroit de l'autre côté très-décidé que les réſultats trouvés par ce moyen ne ſauroient être exacts, à moins que la poſition des prismes ne demeure toujours la même, c'eſt à dire parallèle au verre objectif; ce qui ſera très-difficile à effectuer dans une lunette dont la diſtance du foyer eſt un peu conſidérable. Enfin l'épreuve qu'a faite M. l'Abbé Rochon de cet inſtrument par la méſure du diamètre de la nouvelle Planète ne conclut pas trop en ſa faveur, parce qu'il paroit prouvé par des raiſons aſſez probables que le diamètre de ce nouvel aſtre ne ſauroit ſurpaſſer 3″. Au reſte la déciſion de Meſſieurs de l'Académie des Sciences de Paris nommés pour examiner cet inſtrument nous paroit très-judicieuſe & ſage, lorsqu'ils déclarent *que la practique ſeule peut apprendre jusqu'à quel point l'uſage de cet inſtrument ſera commode.*

Pour ce qui regarde la machine à graver de M. l'Abbé Rochon, ſon méchanisme nous a paru très-ingénieux & nous n'avons certainement aucune objection à faire par rapport à l'invention de cet inſtrument; mais ſi nous conſidérons le deſſein que l'Auteur s'eſt propoſé, nous croyons qu'on eſt obligé de le regarder plutôt comme un objet de curioſité, que comme quelque choſe d'utile & d'important. Quelque aiſé qu'en ſoit le méchanisme, perſonne ne doutera que cette ma-

niere de graver, ne démande un temps beaucoup plus conſidérable que l'Imprimerie ordinaire & il nous paroit par l'échantillon qu'a donné M. l'Abbé Rochon de cette ſorte de gravure, que l'exécution n'a pas eu un ſuccès aſſez heureux, pour qu'elle puiſſe être miſe en parallele avec les belles éditions de livres imprimés, qui de nos jours ſont aſſez communes. En regardant cette épreuve, on trouvera qu'elle ne ſauroit ſe recommander, ni par la beauté des caractères, ni par l'égalité des diſtances entre les lettres, ni enfin par la juſteſſe des alignemens. Et quand même M. l'Abbé Rochon remédieroit à ces défauts en procurant à ſa Machine plus d'exactitude, nous ne laiſſons pas de douter, que la peine qu'il faudroit ſe donner pour exécuter une Machine ſi parfaite, pût être compenſée par l'utilité qu'on en retireroit.

Voilà nos ſentimens ſur les inſtrumens, que M. l'Abbé Rochon a exécutés; pour ce qui regarde les autres inventions, dont il n'a fait que propoſer les idées, nous croyons être diſpenſés d'en dire notre avis, puiſqu'il n'y a que l'exécution & la practique qui fourniſſent des jugemens ſolides & ſurs par rapport aux inſtrumens de quelque genre qu'ils ſoient. Cependant il nous ſera permis de remarquer par rapport à l'inſtrument, qu'il a propoſé pour méſurer la diſtance vraie de la Lune aux étoiles fixes, que ſi l'on doit compter pour un avantage eſſentiel celui de ſe débaraſſer du calcul, par lequel on eſt obligé de conclure la diſtance vraie de la diſtance apparente, on riſque auſſi de commettre de très-grandes fautes en multipliant le nombre des obſervateurs & des inſtrumens; & quand même on tâcheroit d'y remédier par la répétition des obſervations, comme elles démandent du temps & que la Lune change ſa diſtance d'une étoile fixe aſſez vite, il ſeroit néceſſaire pour faire uſage de ces obſervations, de les interpoler.

poler. Or cette tâche d'interpoler les obſervations demande certainement autant de ſagacité, que celle de calculer un triangle ſphérique.

Au reſte nous ſommes obligés d'applaudir, à cette heureuſe fécondité de génie & à ce zèle infatigable pour les ſciences aſtronomiques & méchaniques, dont les ſçavantes recherches de M. l'Abbé Rochon font foi, & nous lui ſouhaitons du loiſir & de la ſanté pour exécuter & perfectionner ſes inventions de quelque genre qu'elles puiſſent être.

*Etienne Roumovski. Nicolas Fuſs. André Lexell.*

---

Lettre

## Lettre de M. le Conſeiller d'Etat Alexandre de Khrapovitski à M. le Conſeiller de Collèges Pallas.

*Lue à l'Académie le 7 Juillet.*

M. le Conſeiller de Collèges Rytschkof, chargé de l'inſpection de la culture des ſoyes à Achtoubinsk, a envoyé une proviſion d'épis & de graines d'un froment ſauvage, qui croit dans les terres baſſes ſur la gauche du Volga & de l'Achtouba, aux endroits ſablonneux & non-expoſés aux inondations. Ce blé diffère conſidérablement de celui qu'on cultive. La petiteſſe de ſes épis & de ſes graines ne provient peut-être que de la ſechereſſe de cette année: car on ne s'en eſt pas encore ſervi pour faire d'autres eſſais. Sa Majeſté Impériale ayant entendu ce rapport, m'a ordonné de vous envoyer ces épis & ces graines, pour faire vos obſervations: ce que je fais en conſéquence, étant &c.

Obſervations de M. Pallas ſur ce blé ramaſſé par M. Rytſchkof & cru ſauvage.

Cette eſpéce ſauvage de blé qu'on m'a envoyée, n'a à l'exception de ſes longues ſoyes, aucune reſſemblance avec le froment, mais elle eſt proprement notre ſeigle ordinaire, *ſecale cereale*, dans ſon état ſauvage. J'ai trouvé & ramaſſé moi même ce ſeigle, par-ci par-là, dans le déſert ſur la Sarpa, & M. l'Adjoint Zouyef l'a auſſi apporté de la Crimée. Les épis de ce blé ſauvage ayans été ſémés dans le jardin de M. le Conſeiller d'État Demidof à Moscou, ont dès la premiere année augmenté de beaucoup en grandeur, & leurs ſoyes en même temps

temps ſont devenues moindres & plus foibles: auſſi n'y a-t-il pas de doute, qu'en continuant la culture de ce blé ſauvage, on le rendroit parfaitement ſemblable à notre ſeigle domeſtique, auquel il reſſemble déja ſi fort par ſa ſtructure & par la compoſition des parties des épis, autant que par ſes grains; tandis qu'il diffère entiérement du froment par les pointes qu'il a en fleuriſſant, & qui ne ſont raſſemblées que par paires dans un calice.

Cette aſſertion étant tout-à-fait avérée, il eſt au contraire fort incertain encore, ſi l'on doit regarder ce ſeigle ſauvage, qu'on trouve dans les déſerts d'Aſtrachan & de la Crimée, comme réellement propre au païs & croiſſant naturellement dans un état ſauvage, ou ſeulement comme du ſeigle provenu de grains diſperſés, & dévenu ſauvage avec le temps. Les peuples du déſert, en voyageant ou en changeant d'habitations, peuvent avoir perdu & ſémé ſans deſſein de pareilles graines, & la nature en auroit conſervé & augmenté l'eſpèce dans un climat doux & favorable, ſans avoir pu prévenir la diminution de l'épi. Ceci paroit auſſi être le cas du blé ſauvage de la Sicile.

Le ſeigle ſauvage au reſte pouſſe en gros buiſſons, & pourroit peut-être, étant cultivé, développer pluſieurs qualités avantageuſes: tel que le blé de Ruſſie, devenu célébre dans les païs étrangers par le nom de ſeigle d'Aſtrachan, a montré une fertilité & une conſervation tout-à-fait remarquable, dans le doux climat & les champs engraiſſés de l'Allemagne.

# Précis
## des mémoires couronnés par l'Académie ſur le mouvement diurne de la Terre.

*Lu dans l'Aſſemblée publique du 10 Octobre.*

par

M. *Etienne Roumowsky.*

Traduit du Ruſſe.

Avant d'en venir à l'expoſition des pièces où l'on réſout la queſtion propoſée par l'Académie des Sciences, je crois néceſſaire d'éclaircir la queſtion même: „ Ne peut-on „ pas, demandoit l'Académie, trouver de véritables cauſes „ qui prouvent le mouvement uniforme de la Terre autour „ de ſon axe? ou, ſi le mouvement diurne de la Terre eſt „ réellement ſujet à quelque mutation occaſionnée par la ré- „ ſiſtance de l'air, ou de l'éther, ou de quelqu'autre puiſſance „ qui influe ſur la Terre, par quels phénomènes peut-on re- „ connoître ce léger changement dans le mouvement diurne „ de la terre, & quel ſeroit le moyen convenable de rectifier „ la méſure du temps, afin de pouvoir en tirer une comparai- „ ſon certaine entre la méſure du temps dans nos derniers „ ſiecles & celle dans les ſiecles paſſés?"

Le temps a cela de commun avec toutes les autres quantités, qu'il peut varier en étendue; mais il n'y a pas d'autre moyen

moyen de le méſurer ou de comparer un temps avec un autre, que par le mouvement d'un corps quelconque. Si tous les corps que nous voyons devenoient immobiles, nous ne ſerions plus en état de méſurer la durée du temps, & dans le cours de la nature nous ne pourrions diſtinguer que ce qui dans l'univers arriveroit avant & ce qui arriveroit après. Le temps coule uniformement; ainſi pour le méſurer, le mouvement uniforme eſt le plus naturel; parceque les temps dans lesquels un corps quelconque, qui ſe meut d'une maniere uniforme, parcourt deux eſpaces égaux, doivent être égaux entre eux, & que de deux temps, celui dans lequel ce corps parcourt un eſpace double, eſt double de l'autre.

Pour méſurer le temps, on ſe ſert communément du mouvement du Soleil qui ſe diſtingue de tous les autres corps par ſa grandeur & ſon éclat; & l'eſpace qu'il y a du moment où ſa lumiere nous éclaire, jusqu'à celui où, après nous avoir laiſſé dans les ténèbres, elle reparoit, eſt ce qu'on appelle le jour naturel. Mais comme il n'eſt pas poſſible de remarquer exactement l'inſtant où cette lumiere commence & celui où elle finit, à cauſe des vapeurs qui chargent toujours l'horizon & de l'inconſtance de la réfraction des rayons qui le frappent, les Aſtronomes qui tendent à toute l'exactitude dont l'homme ſoit capable, placent le commencement du jour au moment où le Soleil quitte le méridien d'un lieu quelconque, & ſa fin, lorsque le lendemain le Soleil revient au même méridien; parce que ces inſtans ne dépendent pas de la réfraction des rayons, & que l'on a trouvé les moyens de les déterminer avec toute la précision poſſible.

Quoique les jours aſtronomiques, à cauſe de leur différence peu remarquable, ſemblent être tous égaux, cependant ils ne le ſont pas réellement, & même on a découvert les cauſes de leur inégalité. La Terre, en même temps qu'elle tourne ſur ſon axe d'occident en orient, décrit en un an autour du Soleil une ligne qui répond aux ſignes du zodiaque; d'où vient qu'il nous paroit que c'eſt le Soleil qui fait autour de la Terre le chemin, que fait réellement la Terre autour du Soleil. Pour expliquer l'inégalité des jours entre eux, attribuons au Soleil le mouvement avec lequel la Terre accomplit ſa révolution annuelle autour de cet aſtre: repréſentons-nous auſſi la Terre fixe dans un point de l'univers, mais tournant ſur ſon axe, & ſuppoſons que le centre du Soleil ſe trouve actuellement dans le méridien d'un lieu quelconque; alors il eſt midi pour les habitans de ce lieu; après quoi le Soleil, à cauſe du mouvement rotatoire de la Terre ſur ſon axe, s'approchera de l'occident; enſuite il avancera vers l'orient, & enfin il arrivera au même méridien d'où il eſt parti, & voilà l'accompliſſement d'un jour entier. Si donc la Terre n'avoit de mouvement qu'autour de ſon axe, tous les jours ſeroient égaux au temps qu'elle emploie à faire ce tour; mais tandis que la Terre fait ſon tour, le Soleil avance un peu vers l'orient ſuivant les ſignes du Zodiaque; il faut donc pour que le même lieu ſe retrouve ſous le centre du Soleil, que la Terre, après avoir achevé une révolution, anticipe encore autant de la révolution ſuivante, que le Soleil avance en attendant d'occident en orient: delà il paroit clair que les jours doivent être plus longs que le temps qu'emploie la Terre à faire une révolution autour de ſon axe; & comme les parties du chemin que parcourt le Soleil dans l'écliptique, pendant que la Terre fait ſes révolutions, ne ſont point

point égales entre elles, il ne peut non plus y avoir d'égalité dans les jours naturels entre eux.

La ſeconde cauſe de l'inégalité des jours vient de ce que l'axe de la Terre eſt incliné vers le plan des la route apparente du Soleil; ainſi quand même le ſoleil auroit un cours régulier, ou qu'il parcourroit des parties égales de l'écliptique dans des tems égaux, cependant à ces parties égales de l'écliptique il répondroit des parties inégales de l'équateur, ce qui influeroit ſur la durée du jour naturel.

L'inégalité des jours qui vient de ces deux cauſes, eſt non ſeulement connue des Aſtronomes, ils en déterminent encore en tout temps la quantité; ainſi elle ne peut engendrer aucune erreur dans d'autres calculs. Mais dans cette occaſion, ainſi que dans tous les calculs où il s'agit du mouvement des corps celeſtes, on ſe fonde ſur ce que le temps même de la révolution de la Terre ſur ſon axe ne ſoit ſujet à aucune variation. Si donc ce principe, pris pour certain, eſt faux, toutes les tables aſtronomiques qui ſervent à calculer le cours des aſtres & à prédire leurs apparitions, doivent avec le temps s'éloigner de la vérité, & après quelques ſiecles il doit enfin ſe trouver de la confuſion, même dans les calculs civils.

Quoiqu'on n'ait encore pu aſſurer, que depuis le commencement du monde jusqu'à préſent la révolution de la Terre autour de ſon axe ait toujours été uniforme & conſtante; cependant il eſt certain auſſi, que depuis qu'on a commencé d'obſerver avec exactitude le mouvement des aſtres, on n'a remarqué aucune inégalité dans la révolution diurne de la Terre; par conſéquent, s'il y en a, elle eſt ſi petite, qu'on n'a point encore pu la reconnoitre & en montrer le réſultat. Ce n'eſt

donc pas ſans raiſon que les auteurs des deux ouvrages, que l'Académie a jugé dignes du prix, ont entrepris de décider la queſtion qu'elle a propoſée, non ſuivant les obſervations, mais en examinant, s'il n'y a pas, & s'il ne peut pas y avoir dans la nature quelques puiſſances capables d'opérer un changement ſenſible dans le mouvement diurne de la Terre.

M. Hennert ſuppoſe dans ſa ſolution de la queſtion propoſée par l'Académie, deux ſortes de cauſes capables de changer le mouvement diurne de la Terre; dans la premiere il renſerme les cauſes aſtronomiques, ou qui viennent de l'action des corps céleſtes ſur la Terre, & dans la ſeconde les cauſes phyſiques; il diviſe ces dernières, en cauſes intérieures, & en cauſes extérieures. Par cauſes intérieures il entend celles qui ſont renfermées dans les entrailles de la Terre & peuvent opérer un changement dans ſa révolution ſur ſon axe; & par cauſes extérieures, celles qui ſont à ſa ſurface, comme la réſiſtance de l'éther, les vents, le flux & le reflux de la mer.

On ſait que les corps céleſtes, & ſurtout le Soleil & la Lune, influent ſur la Terre de différentes manières; ainſi pour réſoudre la queſtion propoſée par l'Académie, il étoit néceſſaire d'examiner d'abord, ſi le Soleil & la Lune n'occaſionnent pas quelque inégalité dans le mouvement diurne de la Terre. C'eſt pourquoi M. Hennert prouve, qu'en ſuppoſant que la Terre n'eût pas de mouvement autour de ſon axe & fut un corps purement ſphérique, quelleque fut ſa ſituation à l'égard du Soleil & de la Lune, elle ne pourroit pas recevoir de leur action la plus legère impulſion à ſe mouvoir ſur ſon axe; parce qu'autant chacun de ces corps, ou ſéparément ou tous les deux enſemble, agiroient ſur une moitié du globe terreſtre, pour lui imprimer un mouvement autour de ſon axe

dans

dans un ſens; autant ils agiroient ſur l'autre moitié, pour lui imprimer un mouvement dans un ſens contraire, ces deux actions devroient donc ſe détruire réciproquement. Mais comme le Soleil & la Lune, agiſſant ſur la Terre, entant qu'elle n'eſt pas une ſphère parfaite, mais applatie vers ſes poles, accélerent chaque année l'équinoxe, M. Hennert, entreprenant de chercher ſi de l'action du Soleil & de la Lune ſur la matière ſurabondante vers l'équateur, & qui fait que la Terre ſort de la perfection de la ſphère, ou pour s'exprimer autrement, ſi de l'accélération de l'équinoxe il ne peut pas arriver de changement dans le mouvement diurne de la Terre, a démontré que le Soleil & la Lune étant dans la poſition la plus avantageuſe où ils puiſſent être pour y cauſer de l'inégalité, ne peuvent pendant une année entiere en opérer au delà d'une ſeconde & un tiers. Une ſi legère différence doit encore diminuer & enfin devenir inſenſible, parce que le Soleil & la Lune, changeant ſans ceſſe leur poſition réciproque & leur poſition à l'égard de la Terre, détruiſent eux-mêmes dans la ſuite l'effet de leur propre action, & ſont quelquefois dans une poſition telle qu'ils ne peuvent avoir aucune action ſur le mouvement de la Terre.

Après avoir ainſi démontré que l'action des corps céleſtes n'occaſionne aucun changement dans le mouvement diurne de la Terre, M. Hennert paſſe à l'examen des cauſes phyſiques qui, outre le vent & l'éther, peuvent avoir part au mouvement rotatoire du globe terreſtre, en raiſon de ce qu'elles peuvent de différentes manieres diſpoſer la matière qui le compoſe, & comme les changemens que peuvent cauſer les tremblemens de terre dans ſes entrailles ne nous ſont point connus, pour réſoudre la queſtion propoſée il ne lui reſtoit dautre moyen que d'examiner & de calculer, en ſuppoſant

poſant divers changemens dans le ſein de la Terre, qu'elle altération ils peuvent produire dans ſa révolution uniforme autour de ſon axe. Le réſultat de ſes calculs, aux quels je n'ai pas deſſein de toucher aucunement dans cet expoſé, lui a fait voir que les changemens qui ſe font au centre de la Terre, ne peuvent qu'opérer une bien petite différence dans ſa révolution diurne autour de ſon axe; au contraire, les changemens qui arrivent vers ſa ſurface ſont capables de produire un effet remarquable, & ceux qui peuvent ſe faire entre le centre de la Terre & ſa ſurface operent un effet aſſes ſenſible, enſorte que ſi dans le lieu même où ſe fait un changement la Terre, en conſervant toutefois ſa figure, devenoit plus denſe que dans les autres endroits, elle devroit ſe mouvoir plus lentement: mais ſi dans l'endroit ſoumis au changement, la matière devenoit plus rare, le mouvement de la Terre deviendroit plus rapide.

Si les changemens imaginés par M. Hennert dans l'intérieur de la Terre, arrivoient en effet, bientôt ſon mouvement diurne changeroit ſenſiblement, & après avoir reçu un nouveau ſyſtême de révolution, elle continueroit uniformement à ſe mouvoir ou plus vîte ou plus lentement qu'auparavant: mais on n'a jamais obſervé de changement ſubit & ſenſible dans ſa révolution; le globe terreſtre n'a donc jamais éprouvé les grands changemens que ſuppoſe M. Hennert dans ſes recherches. Pour ce qui eſt des îles qui ſortent de la mer après des tremblemens, & ailleurs des montagnes qui s'affaiſſent; elle ne ſont pas capables d'opérer ſur un corps énorme tel que la Terre, des changemens dans ſon mouvement rotatoire.

Au nombre des cauſes extérieures que l'on peut imaginer avec quelque vraiſemblance, pouvoir influer ſur le mouvement

vement uniforme de la Terre autour de ſon axe, M. Hennert place avec raiſon les vents, l'éther & la marée. Pour l'éther qui paſſe librement au travers de tous les autres corps, il prouve que la révolution de la Terre n'en peut reſſentir le moindre effet; car ſi nous nous repréſentons la Terre nageant dans l'éther & diviſée en deux parties par la direction de ſon mouvement par le centre, quel que ſoit ce mouvement, il agira autant ſur une partie, qu'il agira ſur l'autre. À l'égard du vent, en ſuppoſant que la Terre ſoit unie, M. Hennert prouve que ſoufflant pendant vingt-quatre heures du levant au couchant, il ne peut par ſon frottement retarder le mouvement diurne de la Terre que d'une $133^{me}$ partie de ſeconde. Mais comme cette ſuppoſition ne s'accorde pas avec la réalité, & que ce n'eſt point par ſon frottement, mais en heurtant les montagnes répandues ſur toute la ſurface du globe, que le vent peut opérer quelque action ſur ſon mouvement diurne; pour donner un exemple ſenſible du changement que peut occaſionner le vent le plus impétueux, M. Hennert ne ſuppoſe qu'une montagne de figure conique, & de plus de $4\frac{1}{2}$ verſtes d'élévation, mais ſituée à l'équateur & qui en occupe la quatrieme partie, parceque les zones froides, au Nord depuis le $80^{me}$ degré de latitude & au midi depuis le $70^{me}$ jusqu'à leurs poles reſpectifs, ſont perpétuellement couvertes de glaces, & que la Terre ferme ſous l'équateur n'eſt que la quatrieme partie de toute la circonference du globe.

Cela poſé, M. Hennert démontre que le vent le plus impétueux & qui parcourt plus de 15 ſagenes par ſeconde, doit continuer ainſi pendant plus de 72 jours, pour qu'il s'enſuive un changement d'une ſeconde dans la révolution diurne de la Terre. Il a ſuppoſé une montagne à l'équateur, parceque c'eſt ſurtout vers l'équateur que ſe trouvent les plus

hautes montagnes, & que le vent ſoufflant dans la direction de l'équateur, il doit y avoir plus d'effet que dans une autre direction oblique à l'équateur. Si donc un vent qui ſouffle dans la direction de l'équateur, a ſi peu d'effet, il eſt clair qu'un vent oblique à l'équateur en doit encore avoir moins ſur le mouvement diurne de la Terre; car ce vent n'y peut point agir de toute ſa force, mais ſeulement d'une partie. Or comme il eſt impoſſible qu'un ſi grand vent continue dans la même direction & pendant un temps auſſi long que celui qui a reſulté des calculs, on doit conclure que les vents ne peuvent aucunement ni accélerer ni retarder le mouvement diurne de la Terre.

Le flux & le reflux de la mer que produit l'action réunie du Soleil & de la Lune charie les eaux d'un lieu à l'autre, & leur tranſport continuel ſur le globe terreſtre, raſſemblant dans un endroit plus de matiere que dans un autre, on pourroit croire que du flux & reflux de la mer il s'enſuivroit un changement dans le mouvement de la Terre. Mais comme ſur le grand Océan le flux & reflux n'a jamais plus de huit pieds & que l'élévation des eaux obſervée en quelques endroits aller jusqu'à 56 pieds, doit être attribuée à la poſition & à la rencontre des rivages, que le flux, obéiſſant au cours du Soleil & de la Lune, paſſe ſucceſſivement d'un endroit à l'autre, on peut conclure avec raiſon que quand même le flux s'éléveroit, partout jusqu'à la hauteur de 56 pieds, cependant il ne s'enſuivroit de là aucun changement dans le mouvement rotatoire de la Terre. Quelque fondé que ſoit ce raiſonnement, M. Hennert, ſachant qu'en pareilles occaſions la méſure eſt la meilleure conviction, a montré, en calculant le changement que peut produire le flux & reflux dans le mouvement diurne de la Terre, qu'il ne peut aucunement être ſenſible.

La

La Lune a d'autant plus de part au flux & reflux de la mer, qu'elle eſt plus près de la Terre, & ſi l'élévation des eaux que l'on a remarqué aller jusqu'à 56 pieds aux environs des détroits reſſerrés, n'eſt uniquement attribuée qu'à l'action réunie du Soleil & de la Lune, il s'enſuit qu'en comparaiſon reſpective de leur grandeur & de leur diſtance à la Terre, on doit en attribuer 42 à la Lune & 14 au Soleil. Mais comme quelques unes des comètes peuvent s'approcher de la Terre ſix fois & demie plus que la Lune, il ſemble qu'elles ont la force de produire un flux incomparablement plus grand. Car en ſuppoſant une comète égale à la Lune & qui puiſſe s'approcher $6\frac{1}{2}$ fois plus qu'elle, de la Terre, ſon effet ſera de $42\frac{1}{2}$ fois plus grand que celui de la Lune, & l'élévation des eaux pourroit aller jusqu'à 1774 pieds; mais on ſçait que toutes les comètes ſont fort petites & que celle qui s'approcheroit ainſi de la Terre ne peut, ſuivant M. Du Séjour, reſter à cette petite diſtance plus de $2\frac{1}{2}$ heures; or pour exciter ſur l'océan un ſeul flux & reflux, il faut environ 11 heures; il eſt donc a préſumer que vu le rapidité propre à toutes les comètes, celle-ci que nous ſuppoſons ici, paſſera près de la Terre ſans opérer l'effet ſusmentionné, & cela d'autant plus qu'en pleine mer l'élévation des eaux occaſionnée par l'action réunie du Soleil & de la Lune ne va pas à plus de 8 pieds. Par conſequent les comètes mêmes qui s'approchent fort près, & dont le principal effet doit être de produire le flux & reflux, ne peuvent opérer aucun changement dans la révolution diurne de la Terre.

Outre le flux & reflux, on obſerve en quelques endroits ſur le grand Océan un mouvement commun des eaux d'Orient en Occident. Quelle que ſoit la cauſe de ce mouvement, qu'il vienne du flux ou du reflux de la mer, qu'il tire ſon

principe de celui de la Terre ſur ſon axe, ou des vents, ou que, comme l'a penſé M. Daniel Bernoulli, l'éther ou la matiere ſubtile qui forme l'atmoſphère du Soleil, ne pouvant aſſez tôt céder au mouvement rotatoire de la Terre, imprime d'abord ſon mouvement de preſſion à notre atmoſphère, & notre atmoſphère enſuite communique le ſien aux eaux? quelle que ſoit, dis-je, la cauſe de ce mouvement, il ne peut occaſioner dans le mouvement diurne de la Terre un plus grand changement que le flux & reflux même. Car ſi cette précipitation des eaux dans l'océan pouvoit avoir quelque effet ſur la rotation du globe, elle auroit depuis long-temps miné les rivages occidentaux de l'Amérique, & ſurtout de l'Amérique méridionale aux environs du détroit de Magellan, où l'impulſion eſt la plus forte. D'ailleurs on obſerve auſſi que dans d'autres endroits le eaux de la mer coulent de différens côtés en différens temps; d'où il eſt facile de voir, que l'action que peut produire ſur la rotation de la Terre le cours des eaux d'orient en occident, doit néceſſairement diminuer & devenir inſenſible. M. Hennert, en faiſant, on peut le dire, des hypothèſes forcées, a tenté de calculer combien ce déplacement des eaux pourroit accélerer ou retarder la révolution diurne de la Terre, & il a trouvé que du cours des eaux de la mer il ne devoit réſulter aucun changement ſenſible.

Après avoir montré de quelle maniere M. Hennert a réſolu la queſtion propoſée par l'Académie, je paſſe à l'expoſition de l'autre ouvrage, jugé digne de partager le prix. Nous allons voir que le réſultat en eſt exactement le même, mais la maniere d'y parvenir toute differente.

Le grand argument du Pere Friſi, auteur du ſecond Mémoire, pour démontrer que le temps de la rotation diurne de la Terre a été conſtamment le même juſqu'à préſent, conſiſte en

en ce que le rapport du temps dans lequel la Terre accomplit ſa révolution autour du Soleil, avec celui dans lequel s'accomplit ſa révolution ſur ſon axe, a toujours été le même. Pour le prouver il entre dans l'examen des obſervations tant anciennes que les plus modernes, & trouve par celles de la certitude desquelles perſonne ne doute, que la grandeur de l'année eſt la même à préſent qu'elle a été autreſois, & que 356 jours 5 heures 48 minutes 48 à 50 ſecondes ſont une année commune à préſent, comme ils l'ont été il y a près de 2000 ans; & quant aux obſervations qui donnent une autre étendue à l'année, il a fait voir les cauſes de leur incertitude.

Malgré le rapport conſtant de ces deux révolutions, il peut ſe faire que le temps de la révolution de la Terre ſur ſon axe ne ſoit pas le même que celui qu'elle employoit autreſois; car ſi ſes deux révolutions, tant annuelle autour du Soleil, que diurne ſur ſon axe, ont changé proportionnellement l'une à l'autre, alors malgré le changement de la rotation diurne, la longueur de l'année ſeroit aujourd'hui comme elle étoit autreſois, d'un égal nombre de jours. Il falloit donc auſſi prouver que la révolution annuelle n'étoit ſujette, ni ne pouvoit l'être à aucun changement, afin de pouvoir enſuite conclure que le mouvement diurne n'avoit point changé.

Le Pere Friſi conſacre un chapitre entier à prouver que la gravité réciproque des corps céleſtes ne peut rendre ni plus lente ni plus prompte la révolution annuelle de la Terre autour du Soleil. En ſuppoſant deux corps céleſtes qui agiſſent réciproquement l'un ſur l'autre, il tire des loix communes du mouvement des corps une équation, qui repréſente l'or-

l'orbite du corps attiré, & en l'examinant il démontre que cette orbite n'eſt en effet ni raccourcie ni alongée. Faiſant enſuite à la Terre & à Jupiter l'application de cette équation, il trouve que l'action de Jupiter pourroit alonger l'orbite de la Terre autour du Soleil & augmenter ſa révolution annuelle d'une ſeconde & $\frac{3}{5}$; ſi les orbites des deux planètes étoient immobiles, & que leurs axes principaux ſe coupaſſent à angle droit. Il faudroit auſſi s'attendre à une action ſemblable de la part des autres planètes qui ſe meuvent audeſſus de la Terre autour du Soleil; mais l'action de Mars à cauſe de ſa petiteſſe, & celle des autres planètes à cauſe de leur éloignement, doivent être inſenſibles. Et comme les planètes qui ſe meuvent en dedans de l'orbite de la Terre, exercent ſur elle une action ſemblable, mais qui doit ſe faire ſentir en ſens contraire, le petit changement trouvé ci-devant arriver dans ſa révolution annuelle par l'action de Jupiter, doit encore diminuer; & ſi l'on conſidère que ce calcul pour plus de facilité eſt fondé ſur l'hypothèſe, que les orbites de la planète attirante & de la planète attirée ſont immobiles, & que leurs grands axes ſe coupent réciproquement à angle droit, que cependant ces ſuppoſitions n'ont pas lieu en effet, & que ſous tout autre angle d'inclinaiſon des axes, l'action de Jupiter doit être moindre que celle qu'on a trouvée dans l'hypothèſe, alors il deviendra clair que la révolution annuelle de la Terre autour du Soleil ne peut varier ſenſiblement par la gravité des corps céleſtes. Comme donc les plus nouvelles obſervations, ainſi que les anciennes, montrent que le rapport entre la révolution annuelle & la rotation diurne de la Terre eſt conſtamment le même, il ſuit néceſſairement que le mouvement diurne de la Terre autour de ſon axe doit auſſi être aujourd'hui le même qu'il a été autrefois.

Quoi-

Quoique cette démonſtration ſoit de nature, qu'en l'appliquant à toutes les autres puiſſances qui agiſſent conſtamment ſur le globe terreſtre, on puiſſe conclure qu'elles ne peuvent détruire l'uniformité de ſa révolution ſur ſon axe, puiſque depuis un ſi grand nombre de ſiecles, elles n'ont pas été capables d'y cauſer le moindre changement; cependant le P. Friſi, examinant ſi l'action immédiate du Soleil & de la Lune ſur la Terre ne peut pas opérer quelque changement dans ſa révolution, ſurtout parce qu'elle n'eſt pas une ſphère parfaite, démontre la même choſe que M. Hennert, quoique d'une autre maniere. Mais autant la différence des preuves qui confirment cette vérité eſt agréable & utile à ceux qui s'appliquent à ce genre d'étude, autant l'expoſition en ſeroit ſuperflue dans l'occaſion préſente.

Il y a deux opinions ſur la propagation de la lumiere, les uns penſent que la lumiere en venant du Soleil ſe propage comme le ſon; les autres que les rayons du Soleil ſont des émanations de matiere qui en découlent continuellement. Dans l'un & l'autre ſyſtème les eſpaces céleſtes ne peuvent être vides; ſuivant l'un ils doivent être pleins d'une matiere ſubtile & élaſtique au ſuprème degré que l'on nomme éther; & des rayons mêmes du Soleil ſuivant l'autre. M. Hennert a démontré que la matiere ſubtile, où ſont comme plongés les corps céleſtes, quel que ſoit ſon mouvement, ne peut communiquer à un corps ſphérique aucun changement dans la révolution ſur ſon axe; & cela ſuffiſoit à ſon deſſein. Mais pour le P. Friſi qui fonde ſa principale preuve de l'immutabilité de la révolution diurne de la Terre ſur ce que ſa révolution annuelle autour du Soleil eſt la même aujourd'hui qu'elle étoit autrefois, il étoit néceſſaire d'examiner ſi l'éther ou la matiere qui émane du Soleil ne cauſoit pas quelque changement dans la révolution annuelle de la Terre.

Si

Si la lumiere eſt formée des émanations de la matiere ſolaire, il ſemble que, vu ſa diffuſion continuelle depuis tant de ſiecles, il doit s'être enſuivi une diminution & dans la grandeur du Soleil, & enſuite dans ſon action ſur les planetes, puiſque l'action réciproque des corps céleſtes eſt en raiſon de la quantité de matiere qui les compoſe. De la diminution de grandeur du Soleil, les orbites des planètes doivent être devenues plus grandes, & les temps de leur révolution autour de cet aſtre peu à peu plus longs. Mais le P. Friſi ſoutient que la diminution du Soleil doit être inſenſible, parce que la ténuité & la rareté de la matiere lumineuſe eſt inconcevable; peutêtre cette diminution eſt-elle auſſi réparée par de nouvelles parties de lumiere que le Soleil reçoit des autres aſtres, ou par des vapeurs des comètes qui tombent au Soleil; car depuis que l'on a découvert les moyens de méſurer la grandeur apparente des aſtres, on n'a obſervé presque aucun changement dans le diamètre du Soleil, & le peu qui s'en eſt manifeſté, vient de la bonté ou de la différence des inſtrumens, & non pas d'une diminution réelle de ſubſtance. Si l'on conſidère enſuite les phénomènes des rayons du Soleil qui paſſent librement au travers des plus petits pores, qui s'y rompent ſans s'embaraſſer & ſans nuire à la repréſentation des objets dont chacun émane, & qui, parcourant par ſeconde une diſtance de plus de 180000 miles, ne laiſſent aucun veſtige de mouvement aux plus petits corps qu'ils ont pénétrés, on doit conclure que les molécules lumineuſes ſurpaſſent en ſubtilité tout ce que l'imagination peut concevoir. Le P. Friſi démontre cette vérité par des calculs. D'après la hauteur où ſe manifeſte la lumiere boréale, il évalue combien la matiere lumineuſe doit y être ſubtile, enſuite il conclut de ſa ſubtilité à celle de la lumiere du Soleil lors qu'elle nous eſt déja parvenue; & ſuppoſant ſelon les obſervations qu'à chaque intervalle de $7\frac{1}{2}$ minutes de temps le Soleil envoie jusqu'à

juſqu'à nous de nouveaux rayons, il trouve que la quantité de matiere qui ſort du Soleil en une année entière, eſt autant de fois moindre que le Soleil, qu'une unité ſeule eſt moindre qu'une unité accompagnée de 63 zéro. Delà il conſte qu'un million de ſiecles ne ſuffiroit pas pour qu'il arrivât quelque diminution dans la quantité de matiere du Soleil, & enſuite dans ſon action ſur les planètes.

Après avoir démontré que la diminution du Soleil, ſi la lumiere eſt une émanation de ſa matiere, ne peut occaſionner de changement dans la révolution de la Terre & des autres planètes, le P. Friſi paſſe à d'autres recherches. La matiere de la lumiere en occupant les eſpaces du ciel & diminuant par ſa réſiſtance la viteſſe de la Terre & des planètes, ne peut-elle pas auſſi cauſer quelque altération dans leur révolution? Quoique d'après le problème qu'en avoit propoſé en 1762 l'Académie Royale des Sciences de Paris, il ait été décidé que l'éther, en s'oppoſant au mouvement des planètes, ne diminue pas ſenſiblement leur viteſſe, & que dans l'occaſion préſente on eut pu faire uſage de cette déciſion; cependant le P. Friſi ne s'eſt pas cru exempt d'apporter une nouvelle façon de prouver que la diminution de viteſſe cauſée par la réſiſtance de l'éther dans la révolution de la Terre eſt au moins 20 fois au deſſous de ce qu'elle peut être dans la révolution de la Lune. Or quelques aſtronomes admettent une équation de ſept ſecondes par ſiecle pour le mouvement moyen de la Lune, l'équation ſeculaire du mouvement moyen de la Terre ſera donc d'un quart de ſeconde à peu prés. Mais comme les anciennes obſervations des Chaldéens, des Egyptiens & des Arabes comparées aux nouvelles, ne prouvent pas complettement que le mouvement moyen de la Lune ait beſoin d'une pareille correction, on doit conclure la même choſe à l'egard du mouvement moyen de la

la Terre, & conſéquemment que ſa révolution annuelle ne ſubit aucun changement par la réſiſtance de l'éther ou de cette matiere ſubtile qui remplit les eſpaces celeſtes.

Enfin le P. Friſi conſidérant les changemens qui arrivent dans le globe même de la Terre, prétend qu'ils ne peuvent contribuer uniquement qu'à l'accélération de ſa révolution diurne; car il penſe que les corps péſans ſéparés des autres corps par la violence des vents & des eaux, & par les tremblemens de terre, ne peuvent être transportés ailleurs que vers ſon centre, & qu'en paſſant des lieux où la viteſſe circulaire eſt plus grande, dans ceux où elle eſt moindre, ils doivent néceſſairement, de l'excès de leur propre viteſſe, augmenter celle de la révolution même de la Terre. La même conſéquence doit avoir lieu, ſi les corps péſans preſſent la Terre, compriment ſa ſphère & la rendent plus petite. En jugeant par les ouvertures qui ſe prolongent perpendiculairement dans l'intérieur de la Terre, le P. Friſi croit qu'après le grand nombre de ſiecles qu'il y a qu'elle exiſte, elle eſt enfin parvenue à un état de compreſſion tel que ſa ſurface ne peut plus s'affaiſſer; & il prouve par des calculs, que ſi l'on enlevoit partout également une épaiſſeur de deux pieds de la ſuperficie de la Terre, & que l'on précipitât cette ſomme de matiere dans un gouffre de 1000 pieds de profondeur, il ne s'en ſuivroit aujourd'hui pas le moindre changement dans ſa révolution diurne; raſſemblant enſuite toutes ſes preuves en un point, il conclut que la révolution de la Terre autour du Soleil & ſa révolution diurne ſur ſon axe ſont conſtantes, qu'elles ne ſont ſujettes à aucun changement & ne peuvent l'être.

On ne peut diſputer que le raiſonnement du P. Friſi ſur l'effet des vents & de l'eau, entant qu'ils ne transportent d'une

d'une place à l'autre les corps péſans qu'à la ſurface du globe, ne s'accorde avec la vérité; mais quant aux tremblemens de terre, ils peuvent non ſeulement transformer ſa ſurface, en abymant les corps qui s'y trouvent, ils peuvent auſſi, en lançant d'autres corps de l'intérieur à la ſurface, produire jusques dans ſes entrailles les plus grands bouleverſemens. Auſſi ſuivant le ſentiment de M. Hennert, ſont-ils les ſeules cauſes qui puiſſent accélérer ou retarder la révolution de la Terre. Et quoique jusqu'à préſent on n'ait pas remarqué de ſi grands changemens qu'ils aient pu d'abord produire un effet ſenſible ſur ſon mouvement rotatoire, cependant on ne peut nier qu'il ne puiſſe en arriver de tels. Or comme les tremblemens de terre ſont des phénomènes inopinés, & que ce n'eſt pas en un inſtant, mais par la ſucceſſion des temps que le mouvement rotatoire de la Terre ſur ſon axe peut être changé, il eſt très vrai de dire qu'il vaut la peine d'obſerver ſouvent & avec exactitude s'il n'arrivera pas quelque changement dans la révolution de la Terre.

Mais ſur quel genre d'obſervations peut-on s'aſſurer que la révolution diurne de la Terre ſoit conſtamment la même ou ſujette au changement? les horloges, inſtrumens ordinaires de la méſure du temps, ſont inutiles dans cette occaſion, parce qu'un changement qui ſeroit produit par un tremblement de terre ne pourroit être ſenſible qu'après qu'il ſe ſeroit écoulé pluſieurs ſiecles & qu'il n'y a pas d'horloge qui puiſſe reſter auſſi longtemps dans un même état de perfection. Mais quand même une horloge conſervée pour cet uſage, marqueroit enfin dans quelqu'endroit, toutes circonſtances d'ailleurs égales, une autre révolution diurne de la Terre, que celle qu'on a obſervée jusques à préſent; cependant on ne pourroit en conclure qu'elle fut autre en effet, puisque la révolution de la Terre

 reſtant

reſtant la même, la marche de l'horloge pourroit auſſi changer par le changement local de péſanteur qui fait balancer le pendule.

Le moyen le plus ſur de découvrir ce myſtere, eſt une obſervation faite en différens lieux avec attention & exactitude de la longueur d'un pendule qui accomplit juſte une vibration par ſeconde, & ſurtout près de l'équateur; car ſi contre toute attente, la révolution de la Terre venoit à changer, ce changement ſe feroit mieux ſentir dans la longueur du pendule ſous l'équateur, que partout ailleurs. La longueur du pendule, qui convient au mouvement rotatoire actuel de la Terre, a été non ſeulement ſous l'équateur, mais dans pluſieurs autres lieux, déterminée avec tant des ſoins, qu'il eſt douteux que l'on puiſſe parvenir à une plus grande exactitude; ainſi il ne reſte plus à l'avenir qu'à obſerver la longueur du pendule dans les mêmes lieux, & ſi l'on trouve que partout elle ait ſubi un changement rélatif à leur ſituation, on devra conclure que la révolution de la Terre eſt auſſi changée; mais tant qu'un pareil changement ne ſe manifeſtera pas dans la longueur du pendule, nous pouvons être aſſurés que la révolution diurne de la Terre eſt uniforme, & n'a ſubi aucune altération. Le pendule nous a conduit à cette importante vérité que la Terre n'eſt pas un globe parfait; il peut auſſi nous découvrir un changement dans ſa révolution diurne, ſi un jour il en arrivoit un, opéré par les cauſes qu'elle recèle en ſon ſein. Tout cela prouve clairement la liaiſon qu'ont entre elles les vérités phyſiques, & que ſouvent il arrive que les ſçavans travaillent moins pour eux que pour la poſtérité.

---

Rapport

# Rapport
## au ſujet d'un nouvel inſtrument nautique envoyé & ſoumis à l'approbation de l'Académie, par M. de Magellan.

*Lu à Aſſemblée publique le 10 Octobre.*

Parmi tous les moyens qui ont été propoſés pour obſerver la Longitude par mer, indépendamment des calculs faits ſur le mouvement du vaiſſeau, il n'y en a que deux dont on a trouvé l'uſage aſſez avantageux pour être conſervé. Le premier eſt celui des horloges ou montres marines, dont le mouvement eſt ſi bien reglé, qu'on en peut conclure le temps pour un certain méridien donné, même après une navigation de trois ou quatre mois. Le ſecond eſt celui qui ſe pratique par des obſervations faites ſur la diſtance de la Lune au Soleil ou aux étoiles fixes. La Lune étant parmi tous les aſtres le plus proche de la Terre, ſon mouvement ſe fait avec une viteſſe aſſez remarquable, car le mouvement moyen étant de 13 degrés par jour, elle parcourt avec ce mouvement dans une heure un peu plus d'un demi-degré; par conſéquent s'il eſt poſſible d'obſerver ſur mer la poſition de la Lune par rapport à quelque autre aſtre avec la préciſion d'une minute, on en peut conclure la longitude avec la préciſion au moins de deux minutes en temps, ou d'un demi-degré. Quoique cette methode ait été connue depuis quelques ſiecles, on n'en

a preſque tiré aucun uſage, tandis que le mouvement de la Lune n'étoit pas encore exactement calculé. C'eſt donc à feu M. Mayer, Aſtronome de Göttingue, que les Navigateurs auſſi bien que les Aſtronomes ont la plus grande obligation pour le ſervice ſignalé qu'il leur a rendu, en publiant ſes Tables du mouvement de la Lune, auxquelles il a ſçu procurer une exactitude ſi ſurprenante, que l'erreur ne ſurpaſſe preſque jamais une minute, & qu'à l'ordinaire elle eſt plus petite que de 20″. Mais outre le défaut des Tables lunaires, il y avoit encore un autre obſtacle, qui pouvoit empêcher l'uſage de cette méthode, ſavoir le manque d'un inſtrument propre à obſerver les diſtances de la Lune aux étoiles fixes. M. Mayer ſoigneux de rendre ſes nouvelles tables auſſi utiles qu'il étoit poſſible, propoſa donc auſſi un nouvel inſtrument, dont il croyoit l'uſage propre à obſerver ces diſtances. Auſſitôt que le Bureau des longitudes établi à Londres eut reconnu le grand mérite des nouvelles tables de M. Mayer, il nomma deux célébres Aſtronomes anglois, M. Campbell aujourd'hui Amiral de la grande Brétagne, & M. Bradley pour examiner l'inſtrument propoſé par M. Mayer. Or apparemment que les premiers eſſais faits avec cet inſtrument n'avoient pas aſſez bien réuſſi, pour que ces Meſſieurs euſſent cru convénanable de le préférer aux Octans ou Sextans de Hadley; & c'eſt ſans doute par cette raiſon, que la Marine angloiſe a toujours continué depuis ce temps là de ſe ſervir des inſtrumens de Hadley. Cependant comme les avantages de l'inſtrument de M. Mayer ne pouvoient être méconnus des Aſtronomes, qui ſçavent combien la forme circulaire des inſtrumens aſtronomiques eſt avantageuſe par-deſſus toute autre; M. de Magellan après avoir tâché de perfectionner les inſtrumens de Hadley & trouvant pourtant quelquesfois ſon attente fruſtrée, s'eſt enfin déterminé à rendre l'inſtrument propoſé par M.

M. Mayer ſi parfait, que ſon uſage en devient beaucoup plus commode que celui des inſtrumens de Hadley.

Sachant avec combien de zèle Son Excellence Madame la Princeſſe qui dirige l'Académie Impériale des Sciences, s'intéreſſe pour les découvertes utiles dans les ſciences & combien elle prend à coeur, d'en diriger l'uſage vers le bien public de ſa patrie; M. de Magellan lui a préſenté un de ſes inſtrumens, pour qu'elle daignât le faire examiner par l'Académie des Sciences, en ſe flattant que le jugement de l'Académie pourroit ſervir de quelque recommandation à cet inſtrument, pour en introduire l'uſage dans la marine de Sa Majeſté Impériale. Son Excellence ayant agréé la propoſition de M. de Magellan Elle a nommé Mrs. les Académiciens Roumovsky, Krafft & moi pour examiner l'inſtrument qu'il a préſenté, & c'eſt l'expoſé des réſultats trouvés par cet examen, dont j'aurai l'honneur d'entretenir cette Illuſtre Aſſemblée.

Parceque dans les obſervations faites par mer il eſt impoſible à cauſe du roulis des vaiſſeaux, de garder long-temps deux objets dont on veut méſurer la diſtance dans le champ de la lunette, il faut ſurtout que l'inſtrument employé pour méſurer les diſtances ait auſſi peu de poids qu'il eſt poſſible, & que ſa forme ſoit telle que la main qui ſupporte l'inſtrument en ſoit fort peu chargée. Or on voit bien que la forme circulaire eſt la plus convenable pour obtenir ces avantages. Tenant l'inſtrument de M. de Magellan par ſon manche, il eſt évident qu'il y a équilibre dans la charge dont la main eſt affectée, ce qui certainement ne ſe trouve pas dans les ſecteurs de Hadley. D'ailleurs la forme circulaire eſt auſſi la plus propre à donner à l'inſtrument telle poſition qu'on ſouhaite; car comme il s'agit de trouver le plan qui paſſe par l'oeil de l'ob-

l'obſervateur & par les deux aſtres dont on ſe propoſe de méſurer la diſtance, il eſt évident qu'il eſt plus aiſé de trouver ce plan l'oeil étant placé à la circonférence du cercle qui doit paſſer par les aſtres, que dans quelque autre point que ce ſoit; & cet avantage, combiné avec le premier, eſt d'autant plus eſſentiel, qu'on eſt auſſi en état de rétrouver plus aiſément la juſte poſition de l'inſtrument après l'avoir perdue, avec l'inſtrument circulaire qu'avec quelque autre. Les Aſtronomes du temps préſent étant presque tous d'accord qu'un cercle entier de 2 pieds eſt très préférable à un quart de cercle de 4 pieds, il me paroîtroit ſingulier que les raiſons qui font préférer la forme circulaire pour des obſervations faites par terre, ne fuſſent pas du même poids pour celles qu'on fait par mer.

Il ſemble qu'il n'y a rien à objecter contre les raiſons, par lesquelles je viens de prouver que l'inſtrument de M. de Magellan eſt préférable aux ſecteurs de Hadley, par rapport à la commodité, avec laquelle on s'en ſert; il reſte donc encore à prouver qu'il a auſſi de très-grands avantages par rapport à la certitude des réſultats. On ſait que cette certitude dépend principalement de la facilité qu'on trouve à faire toutes ſortes de vérifications avec l'inſtrument dont on ſe propoſe de faire uſage; or ces vérifications ſe font dans l'inſtrument de M. de Magellan très-aiſément & avec la plus grande exactitude. La premiere vérification à faire eſt celle par laquelle on examine l'exactitude des diviſions du limbe, & s'il y a quelque excentricité pour les deux alidades. Pour faire cette vérification on choiſit un objet éloigné mais bien diſtinct, & après avoir placé l'alidade principale ou celle de la lunette ſur le 720°, on regarde cet objet par la partie transparente du miroir placé ſur cette alidade, enſuite on fait tourner

ner la ſeconde alidade, jusqu'à ce que l'image du même objet vue par réflexion ſoit coïncidente avec celle qui eſt vue par les rayons directs, & on marquera les degrés du Nonius de la ſeconde alidade. Alors ayant pouſſé l'alidade de la lunette à un certain nombre de degrés, par exemple au 45°, on rendra de nouveau les deux images, l'une vue par la viſion directe, l'autre par la réflexion, coïncidentes & on marquera les degrés de la ſeconde alidade. Si cet arc du limbe exprime en degrés ſurpaſſe 45°, du même nombre de degrés que marquoit la ſeconde alidade pour la premiere obſervation, c'eſt une preuve de l'exactitude des diviſions du limbe & que les alidades n'ont point d'excentricité. En repétant cette vérification on s'aſſurera parfaitement qu'il n'y a point d'erreur à craindre par rapport à ces deux circonſtances. Dans l'eſſai que j'ai fait avec l'inſtrument de M. de Magellan, ayant changé la poſition de l'alidade principale de 45° à 45°, depuis le 720° jusqu'au 360°, & enſuite de 60° à 60°, depuis le 360 jusqu'au 720°, j'ai presque toujours trouvé la même différence entre les nombres des degrés marqués par les deux alidades, en ſorte que parmi 14 eſſais faits en différens points de la circonference de l'inſtrument, il n'y en avoit pas un ſeul, où le réſultat differât du nombre de 212°, 49′ de plus d'une minute. D'ailleurs n'ayant pas donné à cette vérification toute l'exactitude dont elle eſt ſuſceptible, parceque je n'ai fait qu'un ſeul eſſai pour chaque diviſion du limbe, je ne doute pas qu'en repétant ces eſſais pluſieurs fois pour chaque diviſion, j'aurois réuſſi à faire diſparoitre toutes les différences qui ſe trouvent entre les réſultats. La ſeconde choſe dont il faut s'aſſurer au moyen des vérifications, c'eſt la poſition des deux miroirs par rapport au plan de l'inſtrument, c'eſt à dire qu'il s'agit d'examiner ſi les deux miroirs ſont parfaitement perpendiculaires au plan de l'inſtrument. Voici comment on

 s'y

s'y prend pour faire cette vérification; ayant pris les images de deux objets que je nommerai A, B, l'une à gauche par la viſion directe; l'autre à droite par la réflexion & ayant tourné l'alidade ſecondaire juſqu'à ce que les deux images tombaſſent l'une ſur l'autre; l'alidade principale reſtant toujours fixée au même point de la circonférence, par exemple à celui de 720°, ſi l'on place la ſeconde alidade enſorte que l'image de l'objet A, vue par réflexion, coïncide avec celle de l'objet B, vue par les rayons directs, alors ſi les deux miroirs ſont bien placés, la moitié de la ſomme des arcs marqués ſur la ſeconde alidade dans l'une & l'autre poſition, ſera égale à l'arc marqué par la ſeconde alidade, lorſque les deux images du même objet tombent l'une ſur l'autre. Ayant trouvé avec l'inſtrument de M. de Magellan l'angle entre deux objets A, B de 255°, 0′, lorſque je prenois l'objet B par réflexion & A par les rayons directs, en changent cet ordre l'alidade ſeconde marquoit 170°, 38′, la moitie de ces deux arcs eſt 212°, 49′, qui étoit auſſi l'arc marqué par la ſeconde alidade, lorſque les deux images du même objet ſont miſes enſemble, l'alidade principale étant à 720°. Enfin cette vérification ſe fait encore d'une autre maniere & qui même eſt plus avantageuſe. Ayant fixé l'alidade principale au point de 720°, qu'on faſſe tomber l'image de l'objet B à droite, vue par réflexion, ſur l'image de l'objet A à gauche, vue par les rayons directs, & qu'on marque le degré du limbe, auquel eſt fixé le Nonius de la ſeconde alidade, enſuite cette ſeconde alidade reſtant fixée, & ayant relachée l'alidade principale, qu'on meuve celle-ci juſqu'à ce que l'objet B vu directement tombe ſur l'image de l'objet A vue par la réflexion, alors la moitié du nombre des degrés marqué par l'alidade principale, donnera la diſtance des deux objets; en repétant cette opération on trouvera des arcs, dont la quatrieme

trieme, ſixieme, ou huitieme partie, &c. exprimera la diſtance des objets, & par conſéquent, en multipliant le nombre de ces opérations, on a le très-grand avantage de diminuer l'influence des erreurs. Ayant choiſi deux objets bien diſtincts marqués par A, B, j'ai trouvé l'arc marqué par l'alidade principale

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| par la I$^{ere}$ Opération | 84°, 25′ | dont la moitié eſt | | 42°, 12$\frac{1}{2}$′. |
| II$^{de}$ | - | 168, 45 | - | 4$^{me}$ partie — | 42, 11$\frac{1}{4}$. |
| III$^{me}$ | - | 253, 8 | - | 6$^{me}$ partie — | 42, 11$\frac{1}{3}$. |
| IV$^{me}$ | - | 337, 31 | - | 8$^{me}$ partie — | 42, 11$\frac{3}{8}$. |

Et comme les valeurs trouvées par ces différentes opérations, pour la diſtance entre les objets A, B, s'accordent aſſés bien, c'eſt une preuve déciſive, qu'il n'y a aucun doute par rapport à la poſition des miroirs. En réflechiſſant un peu ſur la conſtruction des Secteurs de Hadley, on voit aiſément que ces vérifications n'y peuvent être appliquées & qu'en général ces inſtrumens ne ſe prêtent pas autant à la facilité de ſe faire vérifier, que celui qui eſt propoſé par M. de Magellan.

Après avoir donné l'explication des manieres employées pour vérifier l'inſtrument en queſtion, & comment ces vérifications ont réuſſi, il me reſte encore à ajouter quelques mots ſur les épreuves que j'ai faites avec cet inſtrument pour prendre les diſtances de la Lune au Soleil, aux Planètes ou aux étoiles fixes. Le $\frac{9}{30}$ de Septembre par un temps extrêmement beau & ſerein, j'ai eu la ſatisfaction d'obſerver un très grand nombre de diſtances du Soleil à la Lune, lesquelles m'ont paru être fort exactes. Car ayant déterminé depuis 11$^h$. 31′ du matin, jusqu'à 1$^h$. 22′ l'après midi 24 différentes diſtances entre les deux bords du Soleil & de la Lune, le mouvement apparent de la Lune rélatif au Soleil étant pour cette obſervation à peu près de 24′ par heure, j'en ai tiré une preu-

t 2 ve

ve, que dans mes obſervations on n'avoit pas raiſon de ſoupçonner des erreurs qui ſurpaſſent une minute. Cependant pour m'aſſurer tout à fait de l'exactitude de mes obſervations, j'ai jugé à propos de calculer les dix premieres & comme la longitude de St. Pétersbourg eſt très-bien déterminée, je me ſuis propoſé de chercher pour les temps obſervés les diſtances apparentes entre les bords du Soleil & de la Lune d'après la Théorie, afin de déterminer de combien ces réſultats s'éloigneroient des diſtances obſervées. Or par ces dix calculs j'ai conclu que la différence ſurpaſſoit à peine une minute pour aucune des obſervations & que la différence moyenne d'après les dix comparaiſons eſt ſeulement de 8″, ce qui ne produit qu'une faute de quatre minutes étant évaluée en degré.

| Temps vrai de St. Pétersbourg. | | Diſtance des bords du Soleil & de la Lune. Calculée. | | Obſervée. |
|---|---|---|---|---|
| 1783 le $\frac{9}{20}$ Sept. $11^h$, 31′ | - | 69°, 34′, 18″ | - | 69°, 35′, 0″. |
| 33 | - | 69, 33, 31 | - | 69, 34, 0. |
| 41 | - | 69, 30, 22 | - | 69, 30, 0. |
| 43 | - | 69, 29, 31 | - | 69, 30, 0. |
| 49 | - | 69, 27, 2 | - | 69, 28, 0. |
| 53 | - | 69, 25, 28 | - | 69, 26, 0. |
| $12^h$, 3 | - | 69, 21, 28 | - | 69, 21, 30. |
| 5 | - | 69, 20, 41 | - | 69, 20, 0. |
| 13 | - | 69, 17, 28 | - | 69, 17, 0. |
| 17 | - | 69, 15, 22 | - | 69, 15, 30. |

Le ciel ayant été pendant cette derniere lunaiſon presque toujours couvert, il ne m'a réuſſi qu'une ſeule fois, ſavoir le $\frac{3}{14}$ du mois préſent, de prendre quelques diſtances de la Lune à la planète de Mars & à deux étoiles fixes, dont l'une eſt l'étoile *α* dans

dans la conſtellation du Bélier, & l'autre celle de Pollux dans la conſtellation des Gémeaux. Et comme je n'ai pas encore eû le loiſir ni de calculer ces obſervations, ni même de vérifier leur temps vrai, je me contenterai d'en donner l'expoſé, afin qu'on puiſſe juger par l'accord qui ſe trouve entr'elles, du degré de confiance qu'elles méritent.

| | | | Diſtance entre le bord de la Lune & la planète de Mars. |
|---|---|---|---|
| $\frac{3}{14}$ Octobre | $7^h, 53'$ | - - - | $68°, 5'$. |
| | 55 | - - - | 68, 4, |
| | | | & l'étoile $\alpha$ du Bélier. |
| | 7, 29 | - - - | $37°, 29'$. |
| | 30 | - - - | 37, 29. |
| | 34 | - - - | 37, 33. |
| | 37 | - - - | 37, 35. |
| | 9, 12 | - - - | 38, 19. |
| | 25 | - - - | 38, 24. |
| | 28 | - - - | 38, 26. |
| | 34 | - - - | 38, 29. |
| | | | & Pollux. |
| $\frac{4}{15}$ —— | $3^h, 43'$ | - - - | 34, 23. |
| | 48 | - - - | 34, 22. |
| | 52 | - - - | 34, 20. |
| | 56 | - - - | 34, 18. |
| | 4, 1 | - - - | 34, 15. |
| | 5 | - - - | 34, 13. |
| | 10 | - - - | 34, 11. |

C'eſt donc par la plus intime conviction, que les Académiciens Roumovsky, Krafft & moi, croyons être obliges d'accorder nôtre approbation & nos éloges les plus favorables

 à l'in-

à l'inſtrument de M. de Magellan, étant perſuadés qu'il ſeroit de la plus grande utilité d'en introduire l'uſage dans la Marine de Sa Majeſté Impériale, notre très-gracieuſe Souvéraine, ſurtout parceque l'uſage de cet inſtrument ne ſe borne pas uniquement à l'obſervation des diſtances de la Lune au Soleil & aux étoiles fixes pour la détermination de la longitude; mais qu'on peut encore s'en ſervir avec autant de commodité que d'exactitude pour lever des cartes hydrographiques en obſervant les giſſemens des côtes & parages de la mer, & il nous paroît hors de doute, que même par rapport à ce dernier emploi, un inſtrument de forme circulaire a des grands avantages par-deſſus ceux qui ne ſont faits que de ſecteurs de cercle.

*Etienne Roumovski. W. L. Krafft. André Lexell.*

Extrait

## Extrait du Programme pour le Prix de 1785.

*Diſtribué à l'Aſſemblée publique le 10 Octobre.*

Dans ce Programme l'Académie commence par expoſer l'importance de la Geographie phyſique, ſon imperfection, les moyens d'en avancer les progrés, & les avantages qui en réſulteroient. Il s'agiroit ſurtout de faire l'attention la plus exacte à la diverſité des pierres, ce qui conduiroit à découvrir les principales époques de la nature. Il y a des pierres d'une origine aſſés recente, d'autres qui remontent à des temps fort reculés, quelques-unes qui paroiſſent auſſi anciennes que le monde. Les unes paroiſſent l'ouvrage du feu, les autres celui de l'eau; & l'on en trouve qui paroiſſent avoir été produites par l'action alternative du feu & de l'eau. En faiſant ces recherches on ſe mettroit au fait des veines métalliques, & du profit qu'on peut eſpérer de l'exploitation des mines; opérations dans lesquelles on s'eſt conduit jusqu'ici presque à l'avanture, & comme feroit ſur mer un pilote ſans bouſſole. La nature des pierres auxquelles les métaux tiennent, fourniroit des indications certaines ſur la quantité de ces métaux & ſur leur qualité. Cette partie de la Minéralogie a été fort négligée jusqu'ici; & il regne dans ce qu'on a ecrit ſur ce ſujet de grandes obſcurités, & même des contradictions. On donne ſouvent des noms différens à la même eſpèce de pierres, ou un même nom à differentes eſpèces. Tout cela bien conſidéré, l'Académie croit propoſer une queſtion également importante & utile, en demandant:

“ Une

“ Une méthode exacte & naturelle, par laquelle les pierres (*Saxa*) qui conſtituent l'écorce de la terre, ſoient rangées ſuivant leurs genres, leurs eſpèces & leurs variétés; de façon que toutes les pierres formées par aggrégation, ou par des mélanges méchaniques, qui ſe rencontrent dans les montagnes, & dans les couches de la terre, ſoient non ſeulement reconnoiſſables d'une maniere plus ſûre & plus facile, par des caracteres diſtinctifs, tant externes que chymiques, & par des dénominations fixes, (ſans faire pourtant à cet égard ſans néceſſité des innovations qui ne ſervent qu'à produire de la confuſion;) mais encore qu'on puiſſe aſſigner la diverſité de leur origine & de leur ancienneté, en faiſant connoitre par quelle opération de la nature, elles ont été formées dans le cours des révolutions ſucceſſives de notre globe, & les diſtribuer en claſſes rélatives à ces époques, & enfin déterminer quelle eſpèce de pierre ſert principalement de matrice à tel ou tel métal. Toutes ces diſcuſſions doivent être appuyées ſur des obſervations minéralogiques dignes de foi, qui ſervent de fondement aux diviſions ſusdites & aux autres aſſertions. “

Les pieces ſeront reçues au concours jusqu'au 1 Juillet 1785. Elles peuvent être écrites en Ruſſe, en Latin, en Allemand & en François. On les adreſſera au Secrétaire de l'Académie, & l'on obſervera les formalités connues par rapport aux deviſes & aux billets cachétés. Tous les ſçavans exceptés les membres ordinaires de l'Académie, peuvent concourir. Le jugement de l'Académie ſera déclaré dans l'Aſſemblée publique qui ſuivra le terme ſusdit.

l'Aca-

L'Académie attend encore des réponſes à la queſtion phyſiologique propoſée pour le Prix de l'année 1784 & conçue en ces termes:

" Comme la nutrition & l'accroiſſement de diverſes par-
„ ties du corps animal qui n'ont point de vaiſſeaux, telles
„ que l'épiderme, les ongles, les cheveux, les cornes, auſſi
„ bien que de celles où le petit nombre des vaiſſeaux eſt
„ trop-éloigné pour pouvoir atteindre à tous les points de
„ leur ſubſtance, par exemple, les os; enfin, comme la ra-
„ pide végétation de l'embryon dans un temps où il n'exi-
„ ſte en lui ni coeur, ni vaiſſeaux, ou peu après, quand
„ on n'apperçoit encore que les premiers rudimens du coeur,
„ mais ſans aucun mouvement; comme, dis-je, toutes ces
„ circonſtances réunies démontrent qu'outre l'action du coeur
„ qui ſuffit pour imprimer le mouvement au ſang & aux
„ humeurs, pourvu qu'ils ſoient contenus dans des vaiſſeaux
„ qui communiquent avec lui, il faut qu'il y ait encore
„ une autre force propre à la ſubſtance animale, laquelle
„ faſſe parvenir les ſucs nourriciers à tous les points des
„ parties qui croiſſent, dans des proportions convenables à
„ leur accroiſſement, d'autant plus que dans les plantes, où
„ l'on ne découvre rien qui puiſſe être comparé à l'action
„ du coeur, ou regardé comme une force dont la preſſion
„ s'étende partout, il ſe fait néanmoins de ſemblables mou-
„ vemens des ſucs, avec les opérations végétales qui en
„ dépendent, telles que l'introduction du ſuc dans les ra-
„ cines, ſa préparation & ſon mouvement dans toutes les
„ parties, la nutrition & l'accroiſſement de ces parties, en-
„ fin la végétation continuelle de nouvelles parties, ce qui
„ manifeſte encore plus diſtinctement une ſemblable force;
„ on demande: *quelle eſt cette force?* Eſt-elle la même que

„ la force d'attraction commune aux ſolides & aux fluides „ des corps, ou bien appartient-elle proprement & uniquement à la ſubſtance vivante des animaux & des plantes? Sont-ce peut-être des forces différentes, ou des „ cauſes d'où dépendent les diverſes opérations qui viennent d'être détaillées, par exemple, l'abſorbtion des ſucs „ par les racines, la continuation de leur mouvement dans „ les vaiſſeaux, leur ſéparation pour ſervir à la nutrition, „ enfin leur évaporation, ou bien ne ſeroit-ce autre choſe „ qu'une ſérie d'opérations dont la ſuivante dépendroit toujours immédiatement de la précédente, de maniere que „ toutes provinſſent originairement d'une ſeule & même „ force? Le méchaniſme & l'organiſation contribueroient-ils „ à ces effets, ou bien ces cauſes ne pourroient-elles jamais y avoir aucune influence eſſentielle, de façon qu'au „ contraire l'organiſation réſulteroit de ces diverſes opérations, tant dans les animaux que dans les plantes? Enfin n'y auroit-il dans la nature aucune autre opération „ connue qui pût être comparée à ces divers mouvemens „ des ſucs dans les plantes & dans les animaux, qui ſeroient alors une eſpèce ſubordonnée à ce genre, ou pourroit lui être rapportée?"

---

Exa-

## Examen du Livre intitulé:
# Parerga hiſtorica,
### Par M. l'Aſſeſſeur *Stritter* à Moscou.

*Lu à l'Académie le 27 Octobre.*

L'hiſtoire des anciens peuples de la terre principalement de ceux du Nord, eſt ſi obſcure & ſi incertaine à l'égard de leur origine, de leurs différens tribus, de leurs demeures, & de leur chronologie, que toutes les recherches ſur ce ſujet ne peuvent qu'être utiles & agréables au monde littéraire. Pluſieurs grand ſçavans de notre ſiecle en ont fait de profondes ſur quelques-uns d'entr'eux, mais il n'y en a aucun, qui ſe ſoit propoſé un champ auſſi vaſte que l'Auteur des *Parerga hiſtorica.* Nourri d'une vaſte lecture des ouvrages hiſtoriques les plus importans, anciens & modernes, il a répandu avec beaucoup de ſagacité une nouvelle lumiere ſur pluſieurs de ces objets, & donné des indices, qui dans la ſuite pourront ſervir à ceux qui étudient l'hiſtoire. Des noms étant ſouvent les ſeules dâtes fournies par les écrivains pour l'hiſtoire ancienne & pour celle du moyen âge, & les notices géographiques étant incertaines & défectueuſes, ſi elles ne manquent pas entiérement, il eſt impoſſible, qu'une grande partie de ces recherches ſur les anciens peuples ne reſtent de pures conjectures. Cependant notre ſçavant auteur a très bien mis à profit les indices, qu'il a trouvés dans quelques uns de ces écrivains, pour porter ſes aſſertions à un haut degré de probabilité. Il

eut été à ſouhaiter ſans doute, que l'auteur eut facilité au lecteur les moyens de ſaiſir l'enſemble par une claſſification plus particuliere des peuples, ou qu'il eut rendu l'uſage de ſon ouvrage plus commode par une table des matieres. L'ordre ſynchroniſtique dont il s'eſt ſervi, éclaircit bien quelques fois, ce qui autrement ſeroit obſcur, mais ſouvent le lecteur eſt fatigué par des objets toujours nouveaux & ſouvent très différens; & il perd par là le fil de l'hiſtoire de chaque peuple en particulier.

---

Sur

## Sur le Spath fluor de Cathérinenbourg.

par M. *Pallas*.

*Lu à l'Académie le 3 Novembre.*

Sa Majeſté Impériale ayant remarqué Elle-même que des échantillons d'un ſpath fluor, récemment envoyés de Cathérinenbourg par M. le Gouverneur-Général *Kaſchkin*, poſſedant non ſeulement un degré ſupérieur de la vertu phoſphorique que l'on connoit à pluſieurs eſpéces de fluors, au point de devenir lumineux dans l'eau chaude; mais auſſi que la lueur phoſphorique qu'ils répandent à une chaleur plus forte paſſe d'un verd ſeladon au plus beau bleu de turquoiſe, phénomène que les fluors connus n'offrent pas: cette Grande Souveraine, toujours attentive à l'avancement des Sciences & gracieuſement diſpoſée envers Son Académie, m'a chargé de remettre à la Conférence un bel échantillon de ce fluor nouvellement découvert, avec pluſieurs petits, qui peuvent ſervir aux expériences.

Le grand échantillon, deſtiné pour le cabinet académique, montre clairement, que ce fluor s'eſt trouve en filon, de la largeur d'une main, dans une gangue micacée dont les deux ſalbandes montrent des reſtes. La couleur de la plus grande epaiſſeur du filon, qui montre une criſtalliſation confuſe transverſale, eſt un violet pâle, en quelques endroits plus foncé; le milieu de la largeur du filon contient des portions d'un tranſparent blanchâtre, quelquefois verdâtre, dont une partie ſe détache en cryſtaux irréguliers & cuboïdes, dont les petits morceaux offrent quelques exemples. Ces fragmens

verdâtres contiennent la plus ſorte vertû phoſphorique & paſſent à la chaleur au bleu le plus vif. J'ai remarqué, que ces petits fragmens developpent leur lueur phoſphorique à la ſimple chaleur de la main, lorsqu'on les y tient renfermés pendant une demi-minute ſeulement. La lueur qu'ils répandent, n'eſt alors que blanchâtre & pâle, mais elle verdit à la chaleur de l'eau bouillante, & un degré de chaleur plus fort augmente l'intenſité de cette couleur & étend l'atmoſphère lumineuſe de la pierre à pluſieurs pouces.

Le fluor phosphorique de Garpenberg, dont la lumiere eſt auſſi un peu verdâtre, ainſi que le fluor verd trouvé dans les plus grandes profondeurs du Schlangenberg en Sibérie, n'ont jamais montré le même degré de couleur & de lumiere. Tous les autres fluors que j'ai eſſayé, ſont infiniment moins lumineux & n'offrent qu'une lueur foible blanche ou pâle, au même dégré de chaleur. En faiſant à cette occaſion differens eſſays comparatifs avec pluſieurs fluors de Saxe, d'Alſace, de Cornoualle, du Derbyshire & de Sibérie, j'ai remarqué qu'en général les fluors verds ou verdâtres phosphoriſent plus promptement & avec plus de vigueur, que ceux qui ſont violets. Dans le fluor qui ſe trouve à la montagne d'Oubôukôun, près du Selenga, & dans celui de Breitenbrunn en Saxe, qui eſt veiné de verd ſur un fond violet, les veines vertes deviennent lumineuſes par une chaleur médiocre, tandis que le reſte eſt encore opaque; & quelquefois la partie violette ne phosphoriſe point du tout.

ÉLOGE

# ÉLOGE
## DE
## MONSIEUR
# LÉONARD EULER.

par M. Nicolas Fuſs.

*Lu à l'Académie le 23 Octobre.*

Repréſenter le cours de la vie d'un grand homme qui a illuſtré ſon Siècle en éclairant le monde, c'eſt faire l'éloge de l'eſprit humain. Or celui qui ſe charge de cet intéreſſant tableau, s'efforcera en vain de remplir dignement ſa tâche, s'il ne joint à une connoiſſance parfaite des ſciences dont il doit montrer les progrès, tous les agrémens de ſtyle que le genre panégyrique exige, & qu'on dit être incompatibles avec l'étude des ſciences abſtraites. Quoique diſpenſé d'un côté du ſoin d'embellir ſon ſujet, aſſés grand par ſoi-même, le Biographe, en s'attachant aux faits, ne ſauroit ſe ſouſtraire à l'obligation de les arranger avec goût, de les préſenter avec clarté & de les peindre avec force. Il doit montrer comment la Nature fait naître un grand homme; il doit démêler les circonſtances qui viennent à l'appui de ſon développement; & en expoſant, par le détail des travaux littéraires du Savant dont il trace l'éloge, ce qu'il a fait pour les Sciences, il ne doit pas oublier d'examiner l'état où elles étoient avant cette époque, & fixer de cette façon le point d'où il eſt parti.

En

En me chargeant de préſenter à cette Aſſemblée le tableau de la vie de l'immortel Euler, j'ai ſenti toutes ces obligations, & j'ai vu qu'il me ſera d'autant plus difficile de les remplir dignement, qu'outre le ſentiment profond de mon incapacité, augmentée par la douleur que la mort de M. Euler m'a cauſée, & que je ſens renaître en ce moment, les bornes étroites d'un discours académique ne me permettront pas de m'acquitter de tous les devoirs d'un Biographe. Je ne donnerai donc qu'une légère ébauche de la vie de ce grand homme; & en fourniſſant des matériaux à celui qui ſe ſentira aſſés de forces pour faire un Panégyrique digne de lui, je me contenterai d'avoir jetté quelques fleurs ſur la tombe de mon cher & illuſtre Maître.

* * * * * * * * * *

Leonard Euler, Profeſſeur de Mathématiques, Membre de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, ancien Directeur de l'Académie Royale des Sciences & belles Lettres de Pruſſe, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de la Société Royale de Londres &c. naquit à Bâle, le $\frac{4}{15}$ Avril 1707, de Paul Euler, alors Paſteur déſigné de Riehen & de Marguerite Brucker, iſſue d'une famille favorablement connue dans la République des lettres, par pluſieurs Savans diſtingués qui ont porté ce nom.

Il paſſa les premières années de ſon enfance à Riehen, & c'eſt à ce ſéjour champêtre, dans un pays où les progrès de la corruption ont toujours été lents, joint à l'exemple de ſes parens, qu'il a du probablement cette ſimplicité de caractère & cette pureté de moeurs, dignes du premier âge, qui l'ont diſtingué toute ſa vie, & qui ont probablement contribué

à

à le mettre en état de fournir la carrière longue & brillante qui a immortaliſé ſon nom.

Aux premières inſtructions que ſon Père eut ſoin de lui donner, il joignit les Mathématiques, qu'il aimoit & qu'il avoit étudiées lui-même avec ſuccès ſous le célèbre Jacques Bernoulli. Déſtinant ſon fils à l'état eccléſiaſtique, il ne ſe doutoit pas que ce qui d'abord ne devoit ſervir que d'amuſement inſtructif, deviendroit dans la ſuite l'objet de l'application la plus ſérieuſe & la plus opiniâtre. Mais le germe qu'il avoit mis dans l'ame du jeune Géomètre ne tarda pas à pouſſer de profondes racines. Quoique trop bien organiſé pour montrer un talent exclusif pour les Sciences mathématiques, ce n'étoit qu'en s'y livrant tout entier que ſon génie ſe ſentoit dans ſon élément.

Heureuſement ſon Père ne penſa pas encore à le détourner d'une étude qu'il aimoit trop lui-même, dont il ſentoit trop bien l'influence ſur le développement de la faculté de penſer, & l'utilité dans toutes les branches de nos connoiſſances, pour la lui défendre ſérieuſement. Le génie du jeune Euler eut tout le tems de ſe développer, & il le fit avec cette rapidité qui annonce toujours les talens ſupérieurs & qui fut le préſage de ſa grandeur future.

Envoyé à Bâle pour y faire ſa Philoſophie, M. Euler fréquenta regulièrement les leçons des Profeſſeurs de l'Univerſité. Sa mémoire prodigieuſe le mit en état de paſſer rapidement ſur tout ce qui n'étoit pas Géométrie, & de conſacrer à cette Science favorite tout le reſte de ſon tems. Avec un penchant ſi marqué pour les Mathématiques, & un eſprit enflammé, que de grands progrès ne rendoient que plus avide

d'inſtruction, il ne tarda pas à être connu de Jean Bernoulli, le plus grand des Géomètres alors vivans. Ce Savant le diſtingua bientôt de ſes autres Auditeurs, & ne pouvant ſe rendre aux inſtances du jeune Mathématicien, de lui accorder des leçons particulières, il s'offrit à lui lever tous les ſamedis les difficultés qu'il auroit rencontrées en étudiant les ouvrages les plus difficiles. Méthode excellente! mais qui ne peut réuſſir qu'avec un génie auſſi ardent, accompagné d'une aſſiduité auſſi infatigable que l'étoit celle de M. Euler, deſtiné dès-lors à ſurpaſſer un Maître qui avoit fait époque dans l'Hiſtoire des Mathématiques.

Ayant reçu en 1723 le grade de Maître-ès arts, après avoir prononcé un diſcours en latin, ſur la Philoſophie de Newton comparée avec celle de Deſcartes, M. Euler embraſſa, pour ſe conformer aux volontés de ſon Père, l'étude de la Théologie & des langues orientales. Cette étude que ſa deſtination rendoit néceſſaire, quoique peu analogue à ſon génie, ne fut pas ſans ſuccès; mais bientôt, rendu par le conſentement de ſon Père à la Géométrie, dont rien n'avoit pu le détacher entièrement, il s'y précipita avec une ardeur redoublée. Il continua à conſulter M. Bernoulli & lia une amitié étroite avec ſes deux fils Nicolas & Daniel. C'eſt cette liaiſon, fondée ſur la conformité des penchans, qui a procuré à l'Académie l'avantage de le poſſéder.

Cathérine I. venoit d'exécuter un projet que Pierre le grand avoit formé: celui d'ériger dans ſa Capitale une Académie des Sciences. Les deux jeunes Bernoulli y furent appellés en 1725, & à leur départ ils promirent à M. Euler, qui déſira ardemment de les y ſuivre, qu'ils feroient leur poſſible pour lui trouver une place convenable. En lui

lui écrivant l'année ſuivante qu'ils avoient trouvé ce qu'ils cherchoient, ils lui conſeillèrent en même-tems d'appliquer ſes connoiſſances mathématiques à la Phyſiologie.

Un grand talent ne peut jamais ſe démentir. Pour devenir Phyſiologue M. Euler n'eut qu'à le vouloir. Il ſe fit mettre ſur la liſte des Etudians en Médecine & fréquenta, avec l'ardeur d'un génie impatient d'entrer dans une carrière brillante, les leçons des plus habiles Médecins de Bâle.

Cette étude, loin de tendre tous les reſſorts de ſon eſprit auſſi actif que vaſte, lui laiſſa aſſez de loiſir pour compoſer dans le même tems une diſſertation ſur la nature & la propagation du ſon, & une réponſe à la queſtion ſur la mâture des vaiſſeaux, que l'Académie de Paris jugea digne de l'Acceſſit en 1727. Cet Ecrit & une des thèſes qu'il défendit pour obtenir la Chaire de Phyſique vacante à Bâle, font voir que M. Euler a tourné de bonne-heure ſes vues du côté de la Navigation, Science qu'il a enrichie dans la ſuite de tant de nouvelles découvertes.

Heureuſement, pour notre Académie, le ſort, qui décide à Bâle des places, tant dans la Magiſtrature que dans l'Univerſité, lui fut contraire, & peu de jours après ce contretems, il quitta ſa patrie pour ſe rendre à St. Pétersbourg, où il trouva un Théatre plus digne du rôle éminent qu'il devoit jouer dans la République des lettres. Son début répondit à l'attente que l'Académie & ſes Compatriotes, Hermann & Daniel Bernoulli, s'étoient faite de lui.

Déclaré Adjoint pour les Mathématiques, ſans qu'il fut plus queſtion de Phyſiologie, il ſe voüa par état à une étude,

à laquelle ni les intentions de ſon Père, ni le peu de fortune qu'elle offre ordinairement, n'avoient pu le faire renoncer. Il enrichit d'abord les premiers volumes des Commentaires de pluſieurs mémoires, d'un prix à exciter une noble émulation entre lui & M. Daniel Bernoulli, qui a duré toujours, ſans altérer leur amitié & ſans dégénérer en jalouſie; ſentiment indigne d'une ame généreuſe, & qui ternit l'éclat des plus belles vertus!

La carrière des Mathématiques, dans le tems que M. Euler y entra, n'étoit rien moins qu' encourageante. Un talent médiocre ne pouvoit guères eſpérer de s'y faire un nom: il falloit ne pas y entrer, ou s'y diſtinguer d'une manière brillante. La mémoire des grands hommes qui avoient illuſtré la fin du ſiècle paſſé & le commencement du notre, étoit dans ſa première vigueur: À peine Newton & Leibnitz, qui avoient fait changer de face à la Géométrie, étoient-ils morts; l'on n'avoit pas encore perdu le ſouvenir des importans ſervices que les découvertes de Huyghens, Bernoulli, Moivre, Tſchirnhauſen, Taylor, Fermat, & de tant d'autres Géomètres, avoient rendu à toutes les branches des Sciences mathématiques.

Après cette époque brillante que reſtoit-il à M. Euler? Pouvoit-il eſpérer que la nature, qui n'eſt pas prodigue de ſes dons, fît encore un miracle en ſa faveur, après avoir organiſé tant de têtes mathématiques à la fois? Il ſentit ce qu'elle avoit fait pour lui; il entra dans la carrière avec cette noble aſſùrance que le ſentiment d'une ſupériorité décidée inſpire, & il fit voir que ſes prédéceſſeurs n'avoient pas épuiſé tous les tréſors de la Géométrie & de l'Analyſe.

Effectivement le Calcul infinitéſimal étoit encore trop près de ſon enfance, pour qu'à peine ſorti des mains de ſes Créa-

Créateurs, il eût pu avoir atteint un degré conſidérable de perfection. La Mécanique, la Dynamique, & ſur-tout l'Hydrodynamique & la Science du mouvement des corps céleſtes, ſe reſſentoient de l'imperfection de ce nouveau Calcul: on avoit aſſez bien apris à y appliquer le Calcul différentiel; mais on rencontroit par-tout des difficultés, dès qu'il s'agiſſoit de remonter des élemens aux grandeurs mêmes. Pour ce qui regarde la connoiſſance de la nature & des propriétés des nombres, les écrits de Fermat, qui y avoit travaillé avec tant de ſuccès, étoient perdus, & avec eux toutes ſes profondes recherches. L'Artillerie & la Navigation étoient réduites à des principes vagues & fondés ſur un tas d'obſervations, ſouvent contradictoires, plutôt que ſur une Théorie ſuivie. Les irrégularités dans les mouvemens des corps céleſtes & ſur-tout la complication des forces qui influent ſur celui de la Lune, n'avoient ceſſé de déſeſperer tous les Géomètres. L'Aſtronomie pratique luttoit encore contre les imperfections des télescopes: à peine peut-on dire qu'il exiſtât des règles pour leur conſtruction. M. Euler tourna ſucceſſivement ſes vues ſur tous ces differens objets; il perfectionna le Calcul intégral; il fut l'inventeur d'un nouveau genre de Calcul, celui des Sinus, & des lunettes acromatiques; il ſimplifia les opérations analytiques; & à l'aide de ces puiſſans ſecours, & de l'étonnante facilité, avec laquelle il ſut manier les expreſſions les plus intraitables, il parvint à répandre un nouveau jour ſur toutes les parties des Sciences mathématiques.

Peu de tems après ſa réception à l'Académie, M. Euler fut ſur le point d'embraſſer un état bien different de celui que ſon penchant lui avoit fait choiſir. La mort de l'Impératrice Cathérine I. ménaça de l'anéantiſſement un Inſtitut qui étoit trop nouveau pour avoir pris de la conſiſtance. On ne

vit qu'avec indifférence une Académié qui coûtoit annuellement des ſommes conſidérables, ſans être d'une utilité palbable. On ne connoiſſoit pas encore le véritable point de vue, d'où il faut enviſager les Sociétés littéraires, deſtinées à raſſembler toutes les découvertes utiles, à les répandre & à les perfectionner. Les Académiciens ſentirent la néceſſité de prendre leurs meſures en conſéquence, & M. Euler ſe décida à entrer dans la Marine. L'Admiral de Sievers, à qui un ſujet comme Euler parut être une trouvaille pour la marine naiſſante, lui offrit une Lieutenance de vaiſſeau, en lui promettant un prompt avancement.

Heureuſement les circonſtances changèrent en faveur de l'Académie, & lorsqu'en 1730 MM. Hermann & Bulfinger la quittèrent pour retourner dans leur patrie, on conféra à M. Euler la place de Profeſſeur de Phyſique, qu'il remplit jusqu'au départ de ſon ami Daniel Bernoulli, dont il fut nommé Succeſſeur en 1733.

Le grand nombre de mémoires que M. Euler avoit préſentés à l'Académie jusqu'à cette époque, font foi de ſa fécondité ſurprennante, de ſa grande facilité à traiter les queſtions les plus difficiles, & de ſon extrème application. Il en fournît un exemple bien plus frappant, lorsqu'il s'agiſſoit en 1735 de faire un Calcul qui exigeoit de la hâte, & pour lequel les autres Mathématiciens avoient demandé quelques mois de tems. M. Euler s'engagea à le faire en trois jours; & il le fit au grand étonnement de l'Académie. Mais que ce travail lui coûta cher! il lui attira une fièvre chaude qui le mit au bord du tombeau. Il en revint pourtant, mais avec la perte de l'oeil droit que lui ravit un abſcès ſurvenu pendant la maladie. La perte d'un organe auſſi précieux eût été pour tout autre un puiſſant motif de ſe ménager, afin de conſerver

l'oeil

l'oeil qui lui reſtoit; mais il ne connut point de relâche; il eût renoncé auſſi facilement à la nourriture qu'au travail, dont l'habitude perpétuelle lui avoit fait un beſoin.

La grande révolution que la découverte du Calcul différentiel & intégral avoit opérée dans presque toutes les branches des Sciences mathématiques, ne laiſſa pas de faire changer auſſi entièrement de face à la Mécanique. Newton, Bernoulli, Hermann, & Euler lui-même, avoient enrichi ſucceſſivement cette partie ſublime & néceſſaire des Mathématiques mixtes d'une infinité de nouvelles découvertes. Cependant il n'exiſtoit point d'ouvrage complet ſur la ſcience du mouvement, à l'exception de deux ou trois, dont M. Euler ſentoit l'inſuffiſance. Il voyoit avec peine que les principes de la Philoſophie de Newton & la Phoronomie de Hermann, c'eſt-à-dire ce qu'il y avoit de mieux ſur cette matière, cachoient, ſous le voile de la Synthèſe, la route, par laquelle ces grands hommes étoient parvenus à enrichir la Mécanique de tant d'importantes découvertes. Il employa pour la déterrer, toutes les reſſources de l'Analyſe, qu'il avoit ſi bien en ſon pouvoir, & qui l'avoit mis en état de réſoudre tant de queſtions que perſonne avant lui n'avoit oſé entreprendre: Il lia ſes découvertes à celles des autres Géomètres, les rédigea dans un ordre ſyſtématique & l'Académie les fit imprimer en 1733.

La clarté dans les idées, la préciſion dans leur énoncé, l'ordre dans leur arrangement, ſont des qualités eſſentielles que tout auteur, qui veut devenir claſſique, doit tâcher de donner à ſes ouvrages: elles ſont le moindre mérite de la Mécanique de M. Euler. L'obſcurité & le deſordre ne ſont pas des défauts qu'on réprochera jamais à celui qui a ſu répandre

la

la lumière & la clarté ſur ſes plus profondes recherches. Cet ouvrage fixa la renommée de M. Euler & lui aſſigna une place parmi les premiers Géomètres vivans. Et c'eſt beaucoup, ſi l'on conſidère que Jean Bernoulli vivoit encore. À peine entré dans la carrière, il n'eſt donné qu'au génie ſupérieur de s'élancer d'un pas auſſi rapide & de ſe placer à côté d'un homme couvert de la gloire de tant de victoires, remportées ſur tous les Géomètres Anglois & François qui avoient oſé ſe meſurer avec lui.

J'ai déjà remarqué que M. Euler, dès ſon entrée à l'Académie, avoit enrichi les Commentaires d'une quantité de mémoires qui portent tous l'empreinte du génie. C'eſt là qu'on trouve épuiſée la Théorie des courbes les plus remarquables: les Tautochrones, les Brachyſtochrones, les Trajectoires, &c. les plus profondes recherches ſur le Calcul intégral, ſur la nature des nombres, ſur les Séries, ſur le mouvement des corps céleſtes, ſur l'attraction des corps ſphéroïdico-elliptiques, & ſur une infinité d'objets, dont la centième partie ſuffiroit pour faire la renommée d'un autre que lui. Mais ce qui dut accomplir ſa gloire & faire reconnoître ſa ſupériorité dans l'Analyſe, c'eſt la ſolution du Problème des Iſopérimètres, ſi fameux par la controverſe entre les deux frères Jaques & Jean Bernoulli dont chacun prétendit en avoir trouvé la ſolution & qu'aucun n'avoit connu dans toute ſon étendue. Le nombre & le prix de tous ces mémoires étonne, & on ne conçoit pas comment un ſeul homme a pu ſuffire à tant de travaux, dont le détail ſeul nous effraye.

On ſent bien qu'un homme auſſi laborieux n'a guères pu prendre part aux diſſipations, où les liaiſons qu'une grande réputation font naître, peuvent entraîner un homme admiré, &

& qu'on auroit pardonnées à ſon age & à ſon humeur naturellement gaye & faite pour la Société. Un des principaux délaſſemens que M. Euler ſe permit, c'étoit la Muſique; & même il ne s'y abandonna qu'accompagné de ſon eſprit géométrique. En ſe livrant aux ſenſations agréables de l'harmonie, il en approfondiſſoit la cauſe, & au milieu de ſes accords il en calculoit les proportions. Car on peut dire que c'eſt pour ſon délaſſement & dans les momens de repos que ſon eſprit cherchoit pour ſe recueillir, qu'il compoſa ſon Eſſai d'une nouvelle Théorie de Muſique publié en 1739. Ouvrage profond & rempli d'idées neuves ou préſentées ſous un nouveau point de vue; mais qui n'eut pas un grand ſuccès, apparemment par la ſeule raiſon qu'il renferme trop de Géométrie pour le Muſicien & trop de Muſique pour le Géomètre. Cependant il contient, indépendamment de la Théorie, bâtie en partie ſur les premiers fondemens jettés par Pythagore, quantité de choſes dont le compoſiteur & le facteur d'inſtrumens de Muſique pourroient tirer un grand parti; & d'ailleurs la doctrine des genres & des modes de Muſique y eſt traitée & préſentée avec la clarté & la préciſion qui caractériſent tous les ouvrages de M. Euler.

Pour ce qui regarde la Théorie même, dont la partie phyſique eſt au-deſſus de toute conteſtation, M. Euler, en cherchant la ſource du plaiſir de l'harmonie, part de ce principe: que la perception d'une perfection quelconque fait naître le ſentiment du plaiſir; & que comme l'ordre eſt une des perfections qui cauſent à l'ame des ſenſations agréables, tout le plaiſir que nous fait goûter une belle Muſique, conſiſte dans la perception des rapports que les ſons tiennent entre eux, tant relativement à la durée dans leur ſucceſſion, que par rapport à la fréquence des vibrations de l'air qui produiſent le

ſon. C'eſt ſur ce principe métaphyſique, modifié & appliqué à toutes les parties de la Muſique, que le Syſtème de M. Euler eſt appuyé.

On a taxé ce principe d'inſuffiſance; & comme il n'eſt pas dans le pouvoir du Géomètre, de ſoumettre les qualités relatives de notre ame à la rigueur de ſes calculs, il eſt difficile d'en démontrer la ſolidité; mais ce principe accordé, on ſera obligé de convenir qu'il eſt impoſſible d'en faire un meilleur uſage, ni de raiſonner avec plus de ſubtilité & de pénétration. D'ailleurs toutes les objections contre ce principe, fuſſent-elles inſolubles, ne feroient que peu de tort à l'ouvrage même. Il ſeroit ſemblable à un édifice parfait dans toutes ſes parties, mais bati ſur un terrein mouvant: en admirant l'habileté de l'Architecte on le plaindroit de n'avoir pu le conſtruire ſur un fond plus ſolide.

Avant la publication de ce Traité ſur la Muſique M. Euler avoit déjà mis au jour une introduction à l'Arithmétique. Pluſieurs Académiciens s'étoient chargés, ſur la demande de leur Chef, de compoſer des ouvrages élémentaires; & notre Géomètre ne crut point s'abaiſſer par un travail, inférieur à ſes forces, mais annobli par ſon but, qui étoit l'inſtruction publique. La complaiſance, avec laquelle il ſe prêtoit à toutes les commiſſions extraordinaires, & le zèle qu'il mettoit dans leur exécution, lui en attira pluſieurs, & entre autres l'inſpection du Département géographique, que le dirigeant Sénat lui conféra en 1740.

M. Euler avoit vu naître une nouvelle occaſion de déployer toutes les forces de ſon génie, lorsque l'Académie de Paris, qui avoit déjà couronné en 1738 ſon mémoire phyſique ſur

ſur la nature & les propriétés du feu, propoſa pour 1740 la queſtion du Flux & du Reflux de la Mer; queſtion importante, mais dont la ſolution exigeoit des calculs effrayans & un ſyſtème entier du monde. Sa pièce ſur ce ſujet, couronnée en 1740, eſt un chef-d'oeuvre d'Analyſe & de Géométrie. Il n'eut pas, à la vérité, le prix entier; mais D. Bernoulli & Mac-Laurin n'étoient pas des Rivaux indignes d'avoir part à ſon Triomphe. L'Académie n'a pas vu ſouvent une concurrence auſſi brillante, & peut-être a-t'elle reçu ſur peu de queſtions trois mémoires du prix de ceux que je viens de nommer. Celui de M. Euler eſt ſurtout remarquable par la clarté, avec laquelle il explique les effets, que l'action du Soleil & de la Lune, à l'excluſion de toute autre force, exercent ſur la mer; par la belle détermination de la figure de la Terre, entant qu'elle eſt changée par l'action de ces deux forces; par la pénétration, avec laquelle, en regardant les mouvemens de la mer comme oſcillatoires, il fait ſuppléer aux effets de l'inertie des eaux, qu'il avoit été obligé de ſuppoſer nulle au commencement; par les intégrations heureuſes que la conſidération de ce mouvement réciproque exigeoit; & par la ſagacité enfin dans l'explication des principaux phénomènes de la marée ſelon ſa Théorie.

Si quelque choſe peut contribuer à augmenter la confiance qu'on doit avoir aux ſublimes recherches de M. Euler ſur ce ſujet, après avoir vu combien elles ſont conformes à l'expérience, c'eſt ſans contredit le merveilleux accord qui ſe trouve entre ſon mémoire & celui de M. Bernoulli. Partis de principes aſſez différens; l'un adoptant, par exemple, l'hypothèſe des tourbillons que l'autre rejette, ils arrivent au même but; ils ſe ſont même rencontrés en pluſieurs endroits, comme entre-autres dans la détermination de la marée ſous la zone

glaciale. C'eſt ainſi que la vérité paroît ſe multiplier quelques fois, pour ſe communiquer à ſes vrais confidens, par quelque route qu'ils aillent la chercher.

J'ai remarqué en général que M. Euler s'eſt ſouvent rencontré avec d'autres Géomètres, & particulièrement avec M. Bernoulli, dans des recherches de Mathématiques mixtes. M. Bernoulli a eu quelquefois ſur lui l'avantage d'une plus grande préciſion dans les principes phyſiques. Il avoit la patience de ſe faciliter les ſuppoſitions que ſes calculs exigeoient, par des experiences faites avec beaucoup de jugement & d'adreſſe. M. Euler, que l'ardeur du travail entraînoit, n'en a fait que rarement. Sûr de ſon inſtinct naturel à ſentir le faux & le vrai, & de ſon adreſſe à eſtimer, d'après des combinaiſons & des analogies, ſes hypothèſes étoient quelques fois trop hardies; mais ſa ſupériorité dans l'Analyſe le mettoit toujours au-deſſus de M. Bernoulli & de tout autre, dès qu'il s'agiſſoit de ſimplifier les expreſſions, de les adapter à la pratique, & de reconnoître, par les formules finales, la nature du réſultat.

Il y a des Savans qui doivent leur réputation à leur correſpondance; il y en a d'autres qui doivent l'avantage d'une grande correſpondance, ſi c'en eſt un, à leur réputation: celle de M. Euler ne manqua pas de lui attirer des lettres de toutes-parts. Tout ce qu'il y avoit de plus illuſtre parmi les Géomètres des nations les plus éclairées, s'empreſſa d'entrer en correſpondance avec lui. Le commerce de lettres qu'il entretint avec Jean Bernoulli, avoit commencé dès 1727; & le Neſtor de la Géomètrie ne crut point s'abaiſſer, en demandant bien de fois les avis de ſon ancien Diſciple, & en ſoumettant ſes travaux à ſon jugement. (*a*)

Nous

(*a*) Pour donner une idée du ton qui regnoit dans les lettres de ces deux grands

Nous venons à une époque remarquable de la vie de M. Euler. La multiplicité & les brillans ſuccès de ſes travaux, qui avoient répandu ſon nom par toute l'Europe, lui attirèrent en 1741 des propoſitions de la part du Miniſtre de Pruſſe, Comte de Mardefeld. L'ancienne Société royale, fondée par Leibnitz, paroiſſoit reprendre de nouvelles forces, par les ſoins que FREDERIC II. lui donna dès ſon avènement au Trône. Il avoit dejà conçu le projet digne de lui, d'ériger une Académie des Sciences, en refondant l'ancien établiſſement; & c'eſt pour cette raiſon qu'il appella M. Euler à ſon ſervice. L'état chancelant de notre Académie ſous la Régence, rendoit encore plus acceptables des propoſitions très-avantageuſes en elles-mêmes. M. Euler ſe rendit donc aux invitations du Roi & quitta Pétersbourg avec ſa famille au mois de Juin 1741, pour donner de l'eclat à une Academie, qui alloit naître ſous les auſpices d'un Philoſophe couronné.

 Arri-

grands hommes, & du grand cas que M. Bernoulli a fait de bonne-heure du génie de M. Euler, il ſuffit de donner ici la fin d'une de ſes lettres, priſe au hazard parmi celles de 1739.

" De caetero gratisſimum mihi fuit intelligere, quod ad admiratio„nem vsque Tibi placuerint quae ſcripſi de oſcillationibus verticalibus, „propter ſimplicitatem expresſionis et inſignem vſum quem praeſtare „poſſunt in explicandis nauium ponderibus; maluiſſem autem vt ipſe quo„que calculum feciſſes ex Tuo ingenio, quo mihi patuiſſet annon in ra„tiocinando errauerim. Nam ingenue fateor, me Tuis luminibus plus „fidere quam meis. Quae vberius affers, Vir excell. de Iſoperimetricis, „credo equidem Te omnia probe ruminaſſe atque ad veritatis trutinam „expendiſſe, ita vt vix quicquam reſtet quod acerrimam Tuam ſagacita„tem ſubterfugere potuerit: etc. "

Arrivé à Berlin il eut d'abord lieu d'être flatté des attentions du Roi, qui lui écrivit du camp de Reichenbach, du milieu de ſes occupations guerrières. La guerre, toûjours funeſte aux Sciences, avoit retardé les intentions gracieuſes du Roi. Cependant il s'étoit formé une nouvelle Société littéraire, compoſée en partie des membres de la Société royale & en partie d'autres hommes de lettres. M. Euler en fut & décora le dernier volume des Mélanges de Berlin de cinq mémoires qui ſont peut-être ce qu'il y a de mieux dans cette collection. Il leur fit ſuccéder avec une rapidité étonnante ce grand nombre de recherches éparſes dans les mémoires, dont l'Académie, dès ſon établiſſement en 1744, a eu ſoin de publier régulièrement un volume par An.

Cette quantité prodigieuſe de mémoires, ſur tout ce qu'il y a de plus profond dans les Mathématiques, toujours remplis de vues neuves, ſouvent de vérités ſublimes, & quelques fois des plus importantes découvertes, doit nous étonner d'autant plus, que M. Euler ne diſcontinuoit point d'en fournir auſſi régulièrement à l'Académie de Pétersbourg, qui lui accorda dès 1742 une penſion, & dont les Commentaires ſont remplis à moitié des fruits de ſon étonnante fécondité. A voir ſes productions ſe ſuccéder ſi rapidement, on eût dit que les calculs les plus laborieux, les plus ſublimes méditations ne lui coûtoient rien que de les écrire. Et la poſtérité aura de la peine à croire que la vie d'un homme ait pu ſuffire aux travaux, dont on voit la liſte à la ſuite de cet éloge imprimé ſeparément.

En traitant le Problème important des Iſopérimètres, M. Euler avoit déjà reconnu la grande utilité de cette recherche tant dans l'Analyſe pure que dans la Solution des Problèmes phyſiques. Il avoit remarqué que toutes les lignes cour-

courbes que ces ſortes de Problêmes fourniſſent, ſont douées d'une eſpèce de *plus-grand* ou de *plus-petit*, & qu'on en peut trouver pluſieurs par la ſeule méthode des Iſopérimètres. Il alla même jusqu'à avancer, que tous les effets quelconques pourroient être déterminés par la méthode de plus-grands & des plus-petits, c'eſt-à-dire, par les cauſes finales auſſi bien que par les cauſes efficientes, pourvu qu'on pût toûjours entrevoir le Maximum ou le Minimum que la Nature affecte. M. Daniel Bernoulli s'étoit ſervi de cette voie pour déterminer la figure d'une lame élaſtique courbée, ſans reconnoître pourtant l'équation générale de la courbe élaſtique dans ſon équation, n'en ayant pas ſu pourſuivre le développement; il l'écrivit à M. Euler, avec la conjecture, que les Trajectoires décrites autour d'un ou de pluſieurs centres de forces pourroient être déterminées par la même méthode. M. Euler reprit ce ſujet important, & il mit au jour en 1744 un traité complet des Iſopérimètres, où l'on peut dire qu'il a prodigué toutes les richeſſes de la plus ſublime Analyſe, & où il a jetté les premiers fondemens du calcul des variations, en conſiderant des courbes qui diffèrent infiniment peu d'une courbe propoſée.

La même année, qui fut auſſi l'époque du renouvellement de l'Académie, & celle de ſa nomination à la place de Directeur de la Claſſe mathématique, M. Euler publia ſa Théorie du mouvent des Planètes & des Comètes; ſujet qu'il a encore enrichi dans la ſuite d'un infinité de nouvelles découvertes.

La Théorie de l'aiman, qui remporta le prix de l'Académie de Paris en 1744, eſt trop connue, pour qu'il ſoit beſoin d'en parler beaucoup. En partant de l'idée heureuſe de

de Descartes, que tous les phénomènes de l'aiman provienent de la circulation d'un fluide ſubtil par les conduits imperceptibles des corps magnétiques, M. Euler ſe figure les pores de l'aiman ſous la forme de tuyaux contigus, parallèles, hériſſés, comme les veines, de valvules, & ſi étroits qu'ils ne laiſſent paſſer que la partie la plus ſubtile de l'éther, dont l'élaſticité pouſſe cette partie plus déliée dans les pores de l'aiman & la force à ſe replier à ſa ſortie, pour y rentrer de nouveau, & former ainſi une eſpèce de tourbillon. Par cette idée ingénieuſe, développée avec beaucoup de ſagacité, M. Euler eſt eſt en état d'expliquer tous les phénomènes du Magnétisme; & l'accord de l'expérience avec cette hypothèſe, ſi conforme aux loix générales de la Nature, parle en faveur de ſa probabilité.

La même année le Roi demanda l'avis de M. Euler ſur le meilleur Traité d'Artillerie. Il avoit paru en Angleterre un ouvrage ſur les principes d'Artillerie, dont l'auteur étoit ce même Robins qui avoit maltraité M. Euler dans une critique groſſière contre ſa Mécanique qu'il n'entendoit pas. M. Euler fit au Roi l'éloge de cet ouvrage, qu'il s'offrit à traduire, en y ajoutant les additions & les éclairciſſemens néceſſaires. Ces additions ne renferment pas moins qu'une Théorie complette du mouvement des projectiles; & il n'a rien paru dans l'eſpace de 38 ans, qui fût ſupérieur à ce que M. Euler a fait alors dans cette partie difficile des Phyſico-Mathématiques. Auſſi le prix de cet excellent ouvrage a-t'il été généralement reconnu. Un Miniſtre éclairé, feu M. Turgot, le fit traduire en François & introduire dans les écoles d'Artillerie; (*b*) & presque en même-temps il en parut une traduction

---

(*b*) Voyez la note ſuivante.

duction Angloiſe, faite avec tout le luxe dont la Typographie eſt capable. En rendant dans cet ouvrage toute la juſtice poſſible au mérite de M. Robins, M. Euler releva modeſtement ſes fautes contre la Théorie, & ſe vangea des anciens torts de ſon adverſaire, en donnant à ſon ouvrage de la réputation. Je m'abſtiens de toute réflexion ſur la nobleſſe de ce procédé ſi digne d'un grand homme. Qui pourroit lui refuſer ſon admiration ?

On ſent bien qu'après avoir trouvé dans l'Ether la cauſe de la flamme, de la peſanteur, de l'électricité & du magnétisme; après avoir même oſé déterminer la petite réſiſtance que ce fluide ſubtil oppoſe au mouvement des corps celeſtes, M. Euler ne pouvoit guères être ſatisfait du ſyſtème de l'émanation, établi par Newton pour expliquer les phènomènes de la lumière. L'éxamen de ce ſyſtème précède la nouvelle Théorie de la lumière & des couleurs que M. Euler publia en 1746.

Il y fait voir combien l'hypothèſe du vuide, adoptée par Newton, eſt en contradiction avec les émanations matérielles du Soleil & des étoiles fixes, dont les rayons, en ſe croiſant de toutes-parts, rempliroient abſolument tout l'eſpace, & oppoſeroient aux corps céleſtes une reſiſtance bien plus grande que l'éther, dont ce grand homme nioit pour cette unique raiſon l'exiſtence; il montre combien il eſt impoſſible que des particules matérielles puiſſent ſe mouvoir avec cette viteſſe inconcevable, ſans ſe troubler mutuellement dans leur courſe; il calcule la perte de la matière ſolaire, & trouve que dans peu de ſecondes cette maſſe énorme ſeroit diſſipée en rayons; il tire enfin une autre objection, auſſi forte que la précedente, de la ſtructure des corps tranſparens qui, pour

donner en tout ſens un libre paſſage aux rayons matériels, devroient être déſtitués eux-mêmes de toute matière, c'eſt-à-dire, ceſſer d'être corps.

Deſcartes avoit prétendu que la lumière nous parvient de la même manière que le ſon. Effectivement on ne ſauroit méconnoître une analogie très-marquée entre les ſenſations de l'ouie & de la vue, en réfléchiſſant qu'elles s'étendent toutes-deux à des diſtances bien plus conſidérables que celles des autres ſens; que le ſon & la lumière arrivent à nous par des lignes droites, & que l'un & l'autre peut être reflêchi. M. Euler ſaiſit cette reſſemblance, & en pourſuivant le parallèle il fait voir, que la lumière nait d'un mouvement vibratoire dans l'éther, tout comme le ſon eſt produit par un pareil mouvement dans l'air; que la différence des couleurs, comme celle des ſons, dépend de la fréquence des vibrations; & que le ſon, en paſſant par des corps propres à le transmettre, peut changer de direction & ſouffrir une eſpèce de réfraction, tout comme les rayons de lumière. Moyennant ce principe, étayé de tout ce qu'un raiſonnement phyſique peut avoir de ſolide & de concluant, M. Euler eſt en état d'expliquer, de la manière la plus aiſée & la plus conforme à la Nature, tous les phénomènes de la lumière & de la viſion; & même la différente refrangibilité, que le ſyſtème de Newton n'explique point, découle ſi naturellement de la Théorie de M. Euler, qu'on pourroit en déduire ce Phénomène *à priori*, s'il n'étoit pas connu par l'expérience.

Dans le même tems qu'il combattoit le ſyſtème de l'émanation, la Philoſophie Wolffienne étoit dans ſon plus grand éclat. On n'entendoit parler que des monades & de la raiſon ſuffiſante. L'étendue que Wolff & ſes partiſans donnèrent à ce

ce dernier principe, ne fut pour lui qu'un ſujet de plaiſanterie; mais le ſyſtème des monades étoit une erreur ingénieuſe, dont la deſtruction dut valoir une découverte aux yeux de l'ami de la vérité, accoûtumé à n'admettre une opinion qu'après être remonté à ſes premiers principes. Il fait voir dans ſes penſées ſur les élémens des corps, que les moindres particules n'en ſauroient être plus petites que tout ce qu'on peut s'imaginer, ſans être infiniment petites, ou rien; que les élémens de la matière, dont la force d'inertie eſt une propriété auſſi générale que l'étendue & l'impénétrabilité, ne peuvent être doués de la force de changer continuellement d'état, auſſi peu que les atômes d'Epicure; & qu'ainſi toutes les concluſions ſur la diverſité de ces forces, tirées du principe des Indiſcernables, tombent d'elles-mêmes. Après avoir détruit un ſyſtème, qui a eu depuis le ſort de toutes les idées qui furent grandes ſans être vraies, M. Euler ſubſtitua aux propriétés que Leibnitz & Wolff avoient attribuées aux monades, la force d'inertie, en faiſant de cette eſſence de la matière, que Leibnitz avoit déjà reconnue, le principe de tous les changemens qui arrivent dans le monde. Il ſe ſervit dans la ſuite du même principe, pour expliquer les effets du choc & de la preſſion, & il en fit uſage pour démontrer qu'on ne ſauroit attribuer à la matière la faculté de penſer.

La ſortie contre les monades avoit attiré à M. Euler pluſieurs critiques, qui ſont oubliées actuellement avec le ſyſtème, dont elles s'efforçoient à prévenir la ruine. On n'en parle plus que lors qu'on a beſoin d'un exemple des égaremens, auxquels l'eſprit humain eſt expoſé, quand il n'eſt guidé que par l'imagination.

Pour ce qui eſt du principe d'inertie, dans lequel M. Euler fait conſiſter toutes les forces, l'idée en eſt grande & con-

forme à la ſimplicité que la Nature affecte dans toutes ſes loix. Quoique la notion en ſoit purement métaphyſique, ſes effets ſont du reſſort de la Géométrie: ils peuvent être calculés; & tout ce qu'on peut exiger d'une hypothèſe, c'eſt qu'elle ne ſoit point contraire aux phénomenes qu'elle doit expliquer.

Ce ſeroit ici le lieu de parler d'un grand nombre d'autres recherches philoſophiques de M. Euler, où l'on verroit avec autant de plaiſir que d'admiration la plus ſaine Phyſique unie à la Géométrie la plus ſublime. Mais les bornes de cet éloge nous obligent de paſſer ſous ſilence les recherches ſur la queue des Comètes, ſur l'Aurore boreale & la lumière zodiacale, ſur la propagation ſucceſſive du ſon & de la lumière, ſur l'eſpace & le tems, ſur l'origine des forces, &c., tout comme nous avons omis le détail de tant de mémoires ſur toutes les parties des Mathématiques, pour ne nous occuper que des grands ouvrages de M. Euler, qui n'eſt jamais deſcendu des hauteurs de l'Analyſe aux régions de la Phyſique, ſans y répandre du jour. Heureux & fécond dans la découverte de vérités importantes dans les Sciences exactes, il ne le fût pas moins en expliquant des phénomènes dans la Philoſophie naturelle. Hardi dans les ſuppoſitions que le calcul pouvoit juſtifier, il étoit circonſpect dans les hypothèſes qui n'en admettoient point. Cependant il en a fait de ſublimes & de brillantes: Le monde a prononcé ſur le mérite des unes; la poſtérité prononcera ſur le mèrite des autres. L'Hiſtorien a fait ſon devoir, quand il a indiqué ce qu'il y a de neuf dans les plus importantes de ces hypothèſes.

Du Philoſophe nous retournons au Géomètre. De toutes les connoiſſances utiles que les efforts combinés de l'Analyſe & de la Géométrie peuvent élever à un certain degré de perfection, la Navigation étoit la ſeule qui n'avoit encore retiré aucun fruit

fruit de l'avancement univerſel des Sciences phyſico-mathématiques. Il n'y avoit guères que la partie hydrographique, & celle qui regarde la direction de la courſe des vaiſſeaux, qui euſſent été traitées par les Géomètres, conjointement avec l'Aſtronomie nautique; à moins qu'on ne veuille compter les eſſais imparfaits de Huyghens & du Chevalier de Renau, ſur la manoeuvre des vaiſſeaux & ſur leur viteſſe. M. Euler fut le premier qui oſa concevoir & exécuter le projet, de faire de la Navigation une Science complette. Un écrit ſur le mouvement des corps flottans, imprimé dans les mémoires des Sciences & des beaux arts du mois d'Avril 1735, & communiqué à l'Académie de Pétersbourg, par ſon Auteur, M. de la Croix, lui en ſuggéra la première idée. Ses recherches ſur l'équilibre des vaiſſeaux lui fournirent le moyen de ramener la ſtabilité à une meſure déterminée; le ſuccès de ce premier eſſai l'encouragea à traiter à fond toute la Science navale, & il compoſa le grand ouvrage que notre Académie a fait publier en 1749. On y trouve, dans un ordre ſyſtématique, tout ce que la Théorie de l'équilibre & du mouvement des corps flottans & celle de la réſiſtance des fluides ont de plus difficile & de plus ſublime.

Mais ces principes généraux ne ſuffiſent pas. Il s'agit dans la Navigation de corps flottans d'une figure déterminée. Il faut non ſeulement calculer la réſiſtance & les forces, il faut ſavoir diminuer l'une & augmenter les autres, autant qu'il eſt poſſible; & en garantiſſant le vaiſſeau des efforts de l'eau pour l'arquer & pour le balancer, lui donner la figure qui réunit tous les avantages poſſibles, & qui le met en état de remplir en tout point ſa deſtination.

Ainſi indépendamment de ce que la Théorie peut nous enſeigner ſur la conſtruction des vaiſſeaux & leur manoeuvre en géné-

général, il faut qu'elle nous inſtruiſe auſſi des moyens de concilier entre-elles les différentes proprietés que le navire bien conſtruit doit avoir. Il y en a qu'on n'obtient que par des ſacrifices: la plus grande ſtabilité, par exemple, & la courſe la plus rapide ne ſauroient ſe trouver enſemble. Il eſt donc de la dernière importance de ſavoir, combien il faut ſacrifier d'un avantage, pour obtenir tous les autres, autant que la déſtination différente des vaiſſeaux l'exige. C'eſt ce qu'enſeigne la ſeconde partie de l'ouvrage de M. Euler, où il a raſſemblé tout ce que l'Art du Pilote & du Conſtructeur pouvoit eſpérer du perfectionnement de la Théorie. Il a enrichi, dans la ſuite, cette partie intéreſſante des Mathématiques, de pluſieurs vues ingénieuſes & utiles, qu'on trouve dans beaucoup de mémoires, inſérés dans les collections des Académies de St. Pétersbourg, de Paris & de Berlin; & principalement dans les deux mémoires ſur la manière de ſuppléer à l'action du vent & ſur les effets du Roulis & du Tangage, dont le dernier a remporté en 1759 le prix de l'Académie de Paris.

L'Architecture navale qui, par le défaut de principes ſûrs, avoit été obligée de s'en tenir ſi long-temps aux loix de la routine, & qu'une longe expérience n'avoit pu garantir de bien des fautes dans la conſtruction des vaiſſeaux & dans leur mâture, ſe vit donc tout-d'un-coup enrichie d'une Théorie complette, que d'autres arts n'ont eu l'avantage de recevoir qu'après bien des tentatives & par des gradations presque inſenſibles.

Mais cette Théorie eſt écrite dans une langue qui n'eſt pas familière aux gens du métier; elle ſuppoſe des connoiſſances mathématiques qu'on ne ſauroit guères attendre du Conſtructeur ni du Pilote. La pratique ne pouvoit donc retirer au-

aucun fruit des importantes découvertes de M. Euler, à moins qu'on ne trouvât moyen de les dégager des calculs trop-profonds, des recherches trop difficiles & trop compliquées. Il ſentit cet inconvénient dans la ſuite; & des fréquens entretiens qu'il eut, après ſon rétour à St. Pétersbourg, avec feu l'Amiral Knowles, le déterminèrent à écarter de cette Théorie, tout ce qui n'eſt pas intimément lié avec la Science des Marins & tout ce qui n'eſt pas à leur portée, & il publia en 1773 ſa Théorie complette de la conſtruction & de la manoeüvre des vaiſſeaux, miſe à la portée de tous ceux qui s'appliquent à la Navigation.

Jamais ouvrage de Géomètre n'eut un ſuccès plus brillant: on en fit d'abord une nouvelle édition à Paris; on l'introduiſit dans les écoles de Marine (*c*); & le Roi récompenſa

(*c*) Les marques d'eſtime qu'un homme vertueux & éclairé témoigne au vrai mérite, honorent trop celui qui les donne & celui qui les reçoit, pour que je ne me faſſe un devoir de publier, à cette occaſion, ce que feu M. Turgot a écrit à M. Euler, en lui notifiant les ordres de ſon Roi; le voici:

*à Fontainebleau le 15 Oct. 1775.*

" Pendant le tems, Monſieur, que j'ai été chargé du département de „ la Marine, j'ai penſé que je ne pouvois rien faire de mieux pour l'inſtruction des jeunes gens élevés dans les écoles de la Marine & de l'Artillerie, que de les mettre à portée d'étudier les ouvrages que vous avez „ donnés ſur ces deux parties des Mathématiques: j'ai en conſéquence „ propoſé au Roi, de faire imprimer par ſes ordres votre traité de la „ conſtruction & de la manoeuvre des vaiſſeaux, & une traduction „ françoiſe de votre Commentaire ſur les principes d'Artillerie de Robins.

„ Si j'avois été à portée de vous, j'aurois demandé votre conſentement, avant de diſpoſer d'ouvrages qui vous appartiennent; mais j'ai „ cru que vous ſeriez bien dédommagé de cette eſpèce de propriété par „ une marque de la bienveuillance du Roi. Sa Majeſté m'a authoriſé „ à vous faire toucher une gratification de mille Roubles, qu'Elle vous „ prie

ſa M. Euler, par une gratification de 5000 Livres, du bien que ſes nombreuſes découvertes avoient fait à la Nation Françoiſe comme à toutes les Nations éclairées: ce ſont les expreſſions des Éditeurs de Paris. Il parut auſſi, presque en même temps, une traduction Italienne, Angloiſe & Ruſſe de cet excellent ouvrage, & M. Euler reçut, à l'occaſion de la dernière, un préſent de 2000 Roubles de la part de notre grande Souveraine.

Nous avons raſſemblé ici les principaux travaux de notre Géomètre, qui roulent ſur un même objet, quoique le dernier n'ait été fait que long-temps après ſon retour à Pétersbourg; car il eſt intéreſſant de voir, d'un ſeul coup-d'oeil, combien de ſervices il a rendus à la Navigation, c'eſt-à-dire, à l'une des plus ſublimes & des plus utiles connoiſſances de l'eſprit humain.

En 1749 le Roi chargea M. Euler de viſiter le canal de Funo, entre l'Havel & l'Oder, pour remédier à certains inconvéniens qu'il y avoit remarqués. En parcourant un recueil de cinquante-quatre lettres que le Roi lui a ecrites depuis 1741 jusqu'en 1777, parmi lesquelles il y en a pluſieurs de la propre main de Sa Majeſté, j'ai vu qu'on s'eſt ſervi bien des fois plus particulièrement de ſes lumières. En examinant les calculs des Salines de Schönebek, des machines d'eau de Sans-Souci

„prie de recevoir comme un témoignage de l'eſtime qu'Elle fait de vos „travaux & que vous méritez à tant de titres.

„Je m'applaudis, Monſieur, d'en être dans ce moment l'interprête, „& je ſaiſis avec un véritable plaiſir cette occaſion de vous exprimer „ce que je penſe depuis long-tems pour un grand homme qui honore „l'humanité par ſon génie & les ſciences par ſes moeurs. Je ſuis &c.

*Turgot.*

Souci & de pluſieurs projets de finance, il eut l'occaſion de rendre à l'état des ſervices réels & immédiats, en lui épargnant des dépenſes auſſi onéreuſes qu'inutiles. Auſſi le Roi s'eſt-il ſouvent adreſſé à lui, avec la confiance la plus entière, pour ce qui concernoit les affaires de l'Académie de Berlin & de l'Univerſité de Halle (*d*).

Il étoit tems de raſſembler, dans un ouvrage ſyſtématique & ſuivi, le grand nombre de découvertes importantes que M. Euler avoit faites ſur l'Analyſe infinitéſimale, dans le cours de trente années, & qui ſe trouvent éparſes dans les collections académiques. Il en avoit conçu le projet; mais avant que de l'exécuter, il falloit préparer le monde capable de ſaiſir ces ſublimes leçons, par un ouvrage préliminaire, où l'on pût puiſer toutes les notions que cette étude exige. Il compoſa pour cet effet ſon Introduction à l'Analyſe des infiniment-petits, où il a épuiſé toute la doctrine des fonctions, ſoit algébriques, ſoit transcendentes, en montrant leur transformation, leur réſolution & leur développement. Il y recueillit tout ce qu'il avoit trouvé d'utile & d'intereſſant ſur les propriétés des ſeries infinies & leur ſommation; il y ouvrit une nouvelle route pour traiter les quantités exponentielles, & en déduiſit le moyen de fournir une idée plus nette & plus féconde des logarithmes & de leur

(*d*) Après la mort du Baron de Wolff, il s'agiſſoit de le remplacer dans l'Univerſité de Halle; le Roi écrivit à M. Euler à ce ſujet: il Lui propoſa d'abord M. Daniel Bernoulli, & après le refus de celui-là, M. de Segner, qui eut cette place ſous des conditions très-avantageuſes que lui procura M. Euler, en propoſant en même tems au Roi d'acheter pour l'Univerſité l'Appareil phyſique de feu M. de Wolff. C'eſt auſſi à M. Euler que le Roi s'adreſſa pour engager feu M. de Haller à entrer dans Son ſervice, en lui offrant une place dans la même Univerſité. Les conditions déplurent au Roi, & le projet échoua.

leur uſage; il y expoſa le nouvel Algorithme qu'il avoit trouvé pour les quantités circulaires, dont l'introduction a fait une nouvelle révolution dans toute la Science du calcul; & après avoir montré l'utilité du calcul des ſinus, qui le reconnoit pour ſon auteur, & l'uſage des ſéries récurrentes, il donne, dans la ſeconde partie, la Théorie générale des lignes courbes, avec leurs diviſions & ſubdiviſions, & dans un ſupplément la Théorie des ſolides & de leurs ſurfaces, en montrant comment leur meſure conduit aux équations à trois variables; & il finit enfin cet important ouvrage en développant l'idée des courbes à double courbure, que lui fournit la conſidération de l'interſection des ſurfaces curvilignes.

À cette introduction ſuccédèrent dans la ſuite ſes leçons de Calcul différentiel & celles de Calcul intégral, publiées par notre Académie, que M. Euler ne ceſſoit de regarder comme propriétaire légitime de ſes grands ouvrages. Le principal mérite du premier de ces ouvrages, qui roule ſur la partie du Calcul infinitéſimal déjà perfectionnée par ſes inventeurs, Newton & Leibnitz, & par les Bernoulli, conſiſte dans le point de vue, d'où M. Euler en a enviſagé les véritables principes; dans l'ordre ſyſtématique, avec lequel il les a expoſés; dans l'eſprit de méthode qui y regne; dans la clarté, avec laquelle il y a montré l'utilité de ce calcul, par rapport à la doctrine des ſéries & à la Théorie des plus-grands & des plus-petits. Ses découvertes ſont entremêlées avec celles des premiers inventeurs; mais les traces du génie, dont l'eſſence eſt de découvrir, ſont indélébiles; même dans les objets où il ne ſauroit exercer cette faculté, il tâche de perfectionner au moins les inventions d'autrui; de ramener les principes connus à un plus haut degré d'évidence & de ſimplicité, ou d'en tirer de nouvelles conſéquences. Qui pourroit méconnoître ce caractère

dans

dans les ouvrages de M. Euler? Il y a partout du ſien; mais le détail en ſeroit trop long pour les bornes de cet éloge.

Le Calcul intégral, dont les premiers pas ſe perdent dans l'origine du Calcul des différences, eſt loin du degré de perfection que ce dernier a atteint. Il n'y a point, comme dans la décompoſition des grandeurs, des regles générales, pour remonter des élémens aux grandeurs mêmes. Si jamais ces regles ſe trouvent, la poſtérité rendra à M. Euler la juſtice d'en avoir préparé la découverte par le grand nombre d'intégrations difficiles, dont lui ſeul eſt venu à bout. Sa gloire eſt d'avoir reculé les bornes de ce calcul ſublime loin au-delà de l'attente des premiers inventeurs; & Newton, s'il pouvoit revenir, ſeroit ſurpris des difficultés extrêmes que cet homme étonnant a ſu vaincre.

Le troiſième volume de ſon Calcul intégral contient le nouveau genre de calcul dont il a enrichi l'Analyſe infinitéſimale: celui des variations. J'ai déjà remarqué que le Probleme de Iſopérimètres lui en avoit fourni la première idée. Elle fut ſaiſie par M. de la Grange, digne Succeſſeur de M. Euler dans l'Académie de Berlin: il la dégagea de toutes les conſidérations géométriques; il en fit un Probleme d'Analyſe, & parvint à le réſoudre par le nouveau genre de calcul que M. Euler a tant perfectionné depuis, & qu'il a nommé Calcul des variations, parce que le rapport entre les quantités variables y eſt regardé lui-même comme variable.

Nous avons déjà vu que le génie de M. Euler étoit trop vaſte pour ſe contenir toujours dans les bornes des Mathématiques, quelque étendues qu'elles ſoyent. Tout ce qui y avoit le moindre rapport, il le crut de ſon reſſort; tout ce qui

étoit meſurable, il le ſoumit à ſes calculs. Nous allons voir combien la Phyſique, l'Optique & l'Aſtronomie doivent à la fois à ſa Théorie de la lumière & des couleurs.

L'examen de la Théorie Newtonienne lui avoit fourni l'occaſion de faire des recherches ſur la différente réfrangibilité des rayons de lumière, & ſur le mauvais effet que la diſperſion des couleurs produiſoit dans les téleſcopes à réfraction, qu'on avoit été obligé d'abandonner preſque entièrement à cauſe de ce défaut. La conſidération de la ſtructure merveilleuſe de l'oeil lui fit imaginer qu'une certaine combinaiſon de divers corps transparens pourroit remédier à cet inconvénient. Il propoſa pour cet effet en 1747 des objectifs compoſés de deux verres, dont la cavité pût être remplie d'eau.

Son ſentiment fut attaqué par le fameux Artiſte Anglois, Dollond, qui lui oppoſa l'authorité de Newton: M. Euler ne tarda pas à lui montrer la fauſſeté de ſes principes. Quelques expériences, faites ſur des méniſques dont la cavité pouvoit être remplie de différentes liqueurs, le confirmèrent dans ſon opinion; & M. Dollond, qui avoit trouvé, ſur ces entrefaites, deux ſortes de verres, propres à examiner ce ſentement de plus près, couronna enfin en 1757 la conjecture heureuſe de M. Euler par l'invention des lunettes acromatiques, qui ont fait époque dans l'Aſtronomie & dans la Dioptrique.

Les ſuccès de M. Dollond qui ſe ſervit, avec tant d'avantage, d'une découverte qu'il avoit d'abord attaquée comme contraire à l'expérience, engagèrent M. Euler à pouſſer plus loin ſes recherches ſur les inſtrumens dioptriques; à remédier aux défauts qui leur viennent de l'aberration des rayons, engendrée par la figure ſphérique des verres; & à donner enfin des rè-

gles

gles générales pour la conſtruction des téleſcopes & des microſcopes, de la ſolidité deſquelles il s'étoit convaincu par l'experience, en faiſant conſtruire des lunettes d'après ſa nouvelle Théorie (e).

C'eſt donc à cette controverſe avec Dollond, qu'on eſt redevable d'une des plus importantes découvertes qui ayent été faites dans ce ſiècle. Elle a rendu aux Aſtronomes de très-grands ſervices, en leur montrant au Ciel de nouveaux phénomènes, & en facilitant le travail des obſervations.

La controverſe entre MM. Euler, d'Alembert & Bernoulli au ſujet du mouvement des cordes vibrantes, ne peut intéreſſer proprement que les Géomètres de Profeſſion. M. D. Bernoulli, qui fut le premier à en développer la partie phyſique qui regarde la formation du ſon engendré par ce mouvement, crut la Solution de Taylor ſuffiſante pour l'expliquer. MM. Euler & d'Alembert, qui avoient épuiſé, dans cette matière difficile, tout ce que l'eſprit analytique a de ſublime & de profond, firent voir que la Solution de M. Bernoulli, tirée des

 Tro-

(e) Le Roi à qui il en avoit envoyé quelques-unes conſtruites d'après ſes principes, applaudit à ce travail utile & lui adreſſa de Waldau la lettre ſuivante, d'autant plus remarquable, qu'elle eſt écrite en entier de la main de Sa Majeſté.

„Je vous remercie des petites lunettes d'approche qui me ſont arri-„vées à la ſuite de votre lettre du 14 de ce mois; & je loue le ſoin „que vous prenez de rendre utile aux hommes la Théorie que vous fournit „votre étude & votre application aux ſciences. Comme mes occupations „préſentes ne me permettent pas de les examiner avec l'attention que mé-„rite tout ce qui me vient de votre part, je me réſerve à le faire quand „j'en aurai plus de loiſir. Sur ce je prie Dieu qu'il vous ait en Sa ſainte „& digne garde. Waldou ce 15 de Septembre 1759."

*Féderic.*

Trochoïdes Taylориennes, n'eſt pas générale, qu'elle eſt même inſuffiſante. Cette controverſe qui a été continuée longs-tems, avec tous les égards que des hommes auſſi illuſtres ſe doivent mutuellement, a donné naiſſance à quantité d'excellens mémoires; elle n'a fini proprement qu'à la mort de M. Bernoulli (*f*).

Une autre controverſe qui ne dura pas tant, mais qui ſe fit avec plus d'aigreur de part & d'autre, ce fut celle avec M. Koenig, qui avoit attaqué en 1751 le principe de la moindre action de M. de Maupertuis, à qui il conteſtoit l'honneur d'en être le premier inventeur. Mais comme elle ne rouloit pas ſur une découverte faite par M. Euler lui-même, il ſuffit de remarquer à ſon honneur, qu'il y a pris, avec la chaleur d'un véritable ami, le parti de M. de Maupertuis, & que quelque excellens mémoires, ſortis de la main de celui qui n'en a jamais fait d'autres, ont du leur origine à cette diſpute.

La

(*f*) J'avois communiqué à M. Bernoulli, en 1776, une nouvelle méthode de M. Euler, encore plus générale que toutes les précédentes, parce qu'elle s'étendoit à des figures initiales quelconques, dont la nature ne peut pas même être repréſentée par aucune équation. L'extrait ſuivant de ſa réponſe fera voir le point où la controverſe étoit alors & la nobleſſe des procédés de deux grands hommes qui ſont d'opinion différente.

„ L'esquiſſe que Vous me faites de la méthode de M. Euler m'a fait „ plaiſir; mais elle n'a changé en rien mes idées ſur cette matière; je „ ſuis toujours perſuadé que ma méthode donne *in abſtracto* tous les cas „ poſſibles; j'avoue cependant que dans certains points de vue celle de „ M. Euler eſt fort préférable à la mienne; mais il y a auſſi d'autres „ points de vue pour le contraire, puisque ma méthode peut être appli- „ quée à tel nombre de corps fini qu'on propoſe, lors même que dans „ le ſyſtème il n'y a aucun retour parfait ou période à attendre. Quoi- „ qu'il en ſoit de mes prétenſions, je ſuis toujours prêt de baiſſer Pavillon „ devant mon Amiral".

La ſolution du Problème important de la préceſſion des équinoxes & de la nutation de l'axe de la Terre, que M. d'Alembert a été le premier à réſoudre, engagea M. Euler à publier ſes recherches ſur cette matière dans le V^e Volume des Mémoires de Berlin, le même où ſe trouve l'heureux dénouement de la controverſe entre Leibnitz & Bernoulli ſur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires. Ce Problème de la préceſſion des équinoxes engagea M. Euler à faire des recherches ſur le mouvement de rotation des corps ſolides, entant que l'axe de rotation eſt variable; mouvement pour lequel les principes de Mécanique, connus juſqu'alors, n'étoient pas ſuffiſans. Il falloit donc remonter aux premiers principes de la doctrine du mouvement, & voir ſi l'on ne pourroit pas en déduire les règles générales pour la détermination du mouvement d'un corps ſolide dont l'axe de rotation eſt mobile. Il le fit & découvrit un nouveau principe de Mécanique, moyenant lequel il fut en état de traiter, dans toute ſa généralité, le Problème du mouvement des corps ſolides.

Ces recherches, propres à répandre un nouveau jour ſur toute la ſcience du mouvement, méritoient d'être expoſées dans toute leur étendue. Dans ſon grand ouvrage ſur la Mécanique M. Euler n'avoit traité que le mouvement des corps infiniment-petits; & il réſervoit la partie la plus difficile & la plus eſſentielle, celle du mouvement des corps ſolides, pour un ouvrage ſéparé, qui parut enfin en 1765, & qui peut être regardé comme un traité complet de Mécanique, puiſqu'il y a ajouté en forme d'introduction tous les principes du mouvement des points, traités d'une manière nouvelle & préferable à celle qu'il avoit ſuivie autrefois. À la ſuite de ces principes on trouve raſſemblées toutes les découvertes importantes qu'il avoit faites ſur les mouvemens des corps ſolides. Ce ſont ces découvertes qui

l'ont

l'ont mis en état d'apporter tant de perfection à la Théorie du mouvement des corps céleſtes, & a rendre par-là de ſi grands ſervices à l'Aſtronomie & à la Navigation.

M. Euler n'avoit ceſſé, pendant tout ſon ſéjour à Berlin, de rendre des ſervices très-ſignalés à l'Académie Impériale, ſoit en lui vouant la plus grande & la plus importante partie de ſes travaux littéraires, ſoit en veillant à ſes intérêts économiques, ou en ſe chargeant de l'inſtruction de ſes Elèves (*g*). Il n'a donc point ceſſé le lui appartenir à tous les titres; & il faut croire qu'on a penſé de même à la Cour & à l'Armée de Ruſſie, en lui accordant des ſauvegardes, & en le dédommageant de toutes les pertes qu'il avoit ſouffertes dans la dernière guerre à ſa métairie, pendant le ſéjour des Trouppes Ruſſes à Berlin.

Avec cette prédilection marquée pour le pays où il avoit paſſé les premières années de ſon adoleſcence, & pour le corps où il avoit vu naître ſa célébrité, M. Euler devoit naturellement nourrir le déſir d'y retourner. L'Avènement de CATHERINE LA GRANDE au Trône de Ruſſie, l'éclat de SON Règne auſſi ſage que doux, auſſi juſte que bienfaiſant, avoient rempli le monde d'une admiration univerſelle; & la protection qu'ELLE accordoit aux Sciences & à ceux qui les cultivent, avoient donné de nouvelles forces à l'Académie, & contribué à raffermir M. Euler dans la réſolution de finir ſes jours au ſervice de cette incomparable Princeſſe, née pour faire le bonheur de SES ſujets & l'admiration de l'Univers.

Le

(*g*) Il recevoit dans ſa maiſon les Elèves que l'Académie envoyoit à Berlin pour étudier les Mathématiques. MM. Kotelnikof & Roumovsky y ont paſſé pluſieurs années & ſe ſont formés ſous les yeux de ce maître incomparable.

Le mois de May 1766 fut l'époque où il ſe vit près de l'accompliſſement de ſes voeux. Le Miniſtre de Ruſſie à Berlin, Prince Dolgorouky, lui accorda, au nom de l'Impératrice, toutes les conditions qu'il avoit faites, ſoit pour lui ſoit pour ſa famille, à laquelle il aſſura par là ũn état avantageux. Ce ne fut qu'avec une peine extrème qu'il obtint ſon congé pour lui & pour ſes deux fils aînés. Le Roi refuſa abſolument au Cadet la permiſſion d'accompagner ſon Père.

Au mois de Juin ſuivant M. Euler quitta donc Berlin, où il avoit joui pendant 25 ans d'une conſidération proportionnée à ſon mérite éminent. Les Princes de la maiſon Royale, & particulièrement le Marggrave régnant de Brandenbourg-Schwedt (*h*), le virent partir à regret, & ils le lui témoignèrent d'une manière flatteuſe.

Il étoit à la veille de partir, quand le Prince Adam Czartorisky l'invita au nom du Roi de Pologne à prendre la route de Varſovie, où comblé d'honneurs il paſſa dix jours avec tous les agrémens que les attentions d'un Prince gracieux peuvent répandre ſur la vie d'un Philoſphe, qui ſait en jouir ſans les rechercher (*i*).

Il

(*h*) A l'habitude d'un commerce fréquent & familier, que ce Prince eut avec lui, & à l'amitié intime qui en étoit l'effet, ſe joignirent, pour le Lui faire ſincèrement regretter, les ſentimens d'une reconnoiſſance particulière pour tout ce M. Euler avoit contribué à la culture de l'eſprit des Princeſſes, filles du Margrave. Il leur avoit donné des leçons; & c'eſt à Elles qu'il a écrit, pendant le ſéjour de la cour à Magdebourg, les lettres ſur différens ſujets de Phyſique & de Philoſophie, qu'il a fait publier après ſon retour à St. Pétersbourg.

(*i*) Il a conſervé toute ſa vie le tendre ſouvenir des bontés que le Roi lui a témoignées; & l'attachement reſpectueux que lui avoient inſpiré les qualités

Il revit donc Pétersbourg, après une longue abſence, le 17 Juillet 1766. Il fut d'abord préſenté, avec ſes deux fils aînés, à SA MAJESTÉ IMPÉRIALE; & la première grâce qu'il obtint de ſa Souveraine, ce fut le congé de ſon Cadet, qu'il lui fut facile d'obtenir moyennant une auſſi puiſſante interceſſion.

A peine arrangé dans ſa maiſon, pour l'achat de laquelle SA MAJESTÉ IMPÉRIALE lui avoit fait préſent de 8000 Roubles, il fut attaqué d'une maladie violente, dont il ne revint qu'avec la perte totale de la vue. Une cataracte qui s'étoit formée dans l'oeil gauche, le priva entièrement de l'uſage d'un organe que trop d'application avoit gâté.

Quel

---

tés du coeur & de l'eſprit de ce Prince gracieux, s'eſt perpétué par le commerce de lettres qu'il a eu l'honneur d'entretenir avec Lui. Je ne puis réſiſter à l'envie d'orner cet éloge d'une de celles que le Roi lui écrivit en 1772.

„ Monſieur le Profeſſeur Euler. En répondant à votre lettre du 4 „ Août dernier, J'aurois bien ſouhaité de pouvoir confirmer l'opinion que „ vous avez des circonſtances plus heureuſes, ſur leſquelles votre amitié „ pour Moi vous a dicté l'expreſſion d'un coeur vertueux & ſenſible. „ Mais — — — — — — — — — — —
„ — — — — — — — — — — —.
„ Je vous remercie cependant de votre bonne volonté à cet égard, & „ Je paſſe à la reconnoiſſance que Je dois à vos ſoins, pour me com- „ muniquer les obſervations que les habiles Aſtronomes de votre Acadé- „ mie ont faites à Bender & vers les embouchures du Dnieſtr & du Da- „ nube, avec les poſitions de quelques endroits également importans pour „ la Géographie. Je tâche des les mettre à profit pour perfectionner celles „ qui ſe font dans ce pays-ci avec aſſez d'application & de ſuccès, mal- „ gré les troubles qui mettent un grand obſtacle au progrès des Sciences. „ Je vous en demande la continuation, autant pour l'utilité publique que „ pour ma ſatisfaction particulière, & déſirant d'avoir des occaſions pour „ vous en donner des marques effectives, Je prie Dieu, qu'Il vous ait, „ Monſieur le Profeſſeur Euler, en ſa ſainte & digne garde. Fait à Var- „ ſovie, le 7 Juin, 1772."

*Stanislas Auguſte Roy.*

Quel accident pour un homme à qui l'habitude avoit fait du travail une eſpèce de beſoin, & dont l'eſprit, ſans ceſſe agité de quelque nouvelle découverte, ſe voit tout-d'un-coup hors d'état de pourſuivre ſes travaux! C'eût été le ſort de tout autre que M. Euler: ſa prodigieuſe mémoire & ſon imagination étonnante, augmentées par la concentration de toutes les forces d'un eſprit dégagé de la ſenſation diſtrayante des objets externes, ſuppléerent bientôt à une perte qui paroiſſoit devoir finir la carrière littéraire de cet homme illuſtre.

Un garçon tailleur qu'il avoit amené avec lui de Berlin en qualité de Domeſtique, & qui n'avoit aucune teinture des Mathématiques, fut l'écrivain auquel il dicta ſes Elémens d'Algèbre, ſi généralement admirés, tant pour les circonſtances dans leſquelles ils furent compoſés, que pour le degré ſuprème de clarté & de méthode qui y regne. L'eſprit inventeur ſe décèle encore dans cet ouvrage purement élémentaire. C'eſt le ſeul où l'on trouve une Théorie ſuivie de l'Analyſe de Diophante; on en a vu patroître peu de tems après une traduction Ruſſe & Françoiſe.

L'arrivée de M. Krafft le mit en état d'exécuter un projet qu'il avoit roulé long-tems dans la tête: celui de réunir, en un ſeul corps d'ouvrage, tout ce qu'il avoit fait, dans l'eſpace de trente années, pour le perfectionnement des inſtrumens d'Optique & de leur Théorie. Il mit la main à l'exécution de ce trvail avec ſa vivacité ordinaire & fit publier en 1769, 1770 & 1771 trois gros volumes ſur la Dioptrique.

Le premier volume contient la Théorie générale de cette nouvelle Science: car on ne peut pas dire qu'elle ait exiſté avant l'époque préparée par M. Euler. La longueur exceſſive qu'on avoit été obligé de doner aux lunettes, avant la découverte

verte des objectifs compoſés, & la confuſion de la repréſentation, avoient obligé les Aſtronomes de les abandonner presqu'entièrement & de ſe borner à l'uſage des télescopes à reflexion. Le calcul de la conſtruction la plus avantageuſe de l'une & de l'autre eſpèce de ces inſtrumens étoit un cahos; & quoique ce Problème n'appartienne proprement qu'à la Géométrie élémentaire, & qu'il n'exige que fort peu de connoiſſance de l'Analyſe infinitéſimale, on étoit reſté extrêmement en arrière; & ce n'eſt que depuis que M. Euler a commencé à s'en occuper qu'on peut dater les progrès de cette Science.

Le ſecond & le troiſième volume de ſon ouvrage renferment les règles pour la meilleure conſtruction des Lunettes, des Télescopes catoptriques & des Microscopes. Le calcul de l'aberration des rayons engendrée par la Sphéricité des verres, eſt un chef-d'oeuvre de l'Analyſe la plus raffinée. On eſt forcé d'admirer le grand art, avec lequel il a ſu employer cette Analyſe pour concilier à toutes les eſpèces d'inſtrumens tous les avantages poſſibles à la fois: la plus grande clarté de la repréſentation; le plus grand champ apparent; la plus grande diminution de longueur, pour tous les groſſiſſemens poſſibles & pour tel nombre d'oculaires qu'on veut employer. Toutes les eſpèces d'inſtrumens optiques ſe trouvent examinées & calculées dans cet ouvrage avec une ſimplicité ſans exemple dans des recherches rebutantes jusqu'alors par la longueur des calculs & par la quantité d'élémens qui y entrent.

Dans le même tems que l'Académie fit publier cet ouvrage important, ſes preſſes étoient occupées presque à la fois à imprimer les Lettres à une Princeſſe d'Allemagne, le Calcul intégral, les Elémens d'Algèbre, les Calculs de la Comète de 1769, celui de l'Eclipſe du Soleil & du Paſſage de Venus de la même année,

la

la Théorie nouvelle de la Lune & celle de la Navigation, ſans compter le grand nombre de mémoires qui ſe trouvent dans les Volumes des Commentaires de ce tems-là.

A peine le premier de ces ouvrages eut-il paru, que M. Roumovsky le traduiſit en Ruſſe. On en fit auſſi une nouvelle édition à Paris, & une traduction allemande à Leipzig. Pour ce qui regarde ſon contenu, il ſuffit de remarquer que, comme il eſt à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs, & même à la portée du beau ſexe, il n'a pas peu contribué à répandre le nom illuſtre de ſon Auteur, & à le rendre cher à ceux qui ne peuvent le juger que d'après ſes lettres à une Princeſſe d'Allemagne.

L'année 1769 ſera à jamais mémorable dans l'Hiſtoire du progrès des Sciences, par le concours heureux des Grands de la Terre, à mettre les Aſtronomes en état de profiter du passage de Venus ſur le disque du Soleil. L'Impératrice de Ruſſie, les Rois de France, d'Angleterre & d'Eſpagne envoyèrent des Aſtronomes dans toutes les parties du monde, pour obſerver ce Phénomène, ſi rare & ſi important pour fixer les dimenſions du ſyſteme ſolaire. Dix Aſtronomes, animés par la gloire de prendre part à cet evènement, & encouragés par la protection de notre Auguſte Souveraine, ſe diſperſèrent dans le vaſte Empire de Ruſſie, pendant que M. Euler méditoit une nouvelle méthode de tirer parti de leurs obſervations pour déterminer la véritable Parallaxe du Soleil, & par conſéquent les diſtances de toutes les Planètes. Il en trouva une très-élégante pour calculer non ſeulement les obſervations du paſſage, mais encore celles de l'eclipſe du Soleil qui ſuivit de près le phénomène mentionné, & dont heureſement on pouvoit ſe ſervir pour déterminer la poſition géographique des lieux des obſervations. Le

Calcul de toutes ces obſervations a été fait par M. Lexell, d'après cette méthode; on peut donc dire que c'eſt encore à M. Euler que l'Aſtronomie eſt redevable du degré de perfection qu'elle a tiré de la détermination exacte de la Parallaxe du Soleil.

Les recherches ſur la Lune ont occupé une partie conſidérable de ſon tems. Il avoit déjà publié en 1746 des tables de la Lune & en 1753 une Théorie de ſes mouvemens, de laquelle feu M. Mayer a fait uſage dans la ſuite pour calculer les tables dont les Aſtronomes ſe ſervent aujourd'hui, & qui lui ont valu le prix pour la Longitude. Le Parlement Anglois fit payer en même tems à M. Euler une gratification de 300 livres Sterl. pour le récompenſer d'avoir fourni à M. Mayer les Théorèmes, moyennant leſquels il a été en état de contribuer au Problème important des longitudes. (*k*)

Cepen-

(*k*) La reconnoiſſance qu'une nation éclairée témoigne au vrai mérite, eſt à-la-fois & trop flatteuſe pour le grand homme qui en eſt l'objet, & trop encourageante pour ceux qui marchent ſur ſes traces, pour ne pas la conſigner dans ce diſcours, en y inſérant un extrait de la lettre que M. Euler reçut à cette occaſion du Secrétaire du bureau des Longitudes.

*Admiralty Office. London, 13 June, 1765.*

SIR

„ The Parliament of Great Britain having, by an Act paſſed in their „ late ſeſſions (a printed Copy of which I herewith transmit to you) been „ pleaſed to direct, that a ſumm of money, not exceeding Three hun-„ dred pounds in the whole, ſhall be paid to you, as a reward for „ having furniſhed Theorems, by the help of which the late Mr. Pro-„ feſſor Mayer of Göttingen conſtructed his Lunar Tables, by which Tables „ great progreſs has been made towards diſcovering the longitude at Sea. „ I am directed by the Commiſſioners of the Longitude to acquaint you „ therewith and to congratulate you, uppon this honorary and pecuniary „ Acknowledgement, directed to be made you by the higheſt Aſſembly „ of this Nation, for your uſefull and ingenious labours towards the ſaid „ diſcovery. &c.'

Cependant l'Académie de Paris qui, depuis qu'elle s'étoit aſſocié M. Euler (*l*), avoit couronné trois de ſes mémoires ſur les inégalités dans les mouvemens des Planètes, choiſit, pour ſujet des prix de 1770 & 1772, la perfection de la Théorie de la Lune, & M. Euler, aidé par ſon fils ainé, qui avoit déjà partagé le prix de 1761 ſur l'arrimage des vaiſſeaux, remporta l'un & l'autre.

Il

---

(*l*) On ſait que le nombre des Aſſociés externes de l'Académie de Paris eſt fixé à huit: M. Euler en fut nommé le neuvième, ſans qu'il y eût, par conſéquent, de place vacante. Les circonſtances qui ont accompagné cette réception, méritent d'être conſignées dans cet Eloge; elles ſe trouvent rapportées dans la lettre ſuivante du Marquis d'Argenſon:

*à Verſailles, le 15 Juin, 1755.*

„Le Roi vient de Vous choiſir, Monſieur, d'après les voeux de Son „Académie Royale des Sciences, pour remplir une place d'Aſſocié externe „dans cette Académie; & comme Elle a nommé en même-tems Mylord „Maclesfield, Préſident de la Société Royale de Londres, pour remplir „une pareille place, qui vaque par la mort de M. Moivre, Sa Majeſté a „decidé que la première place de cette eſpèce qui vaquera, ne ſera pas „remplie. L'extrème rareté de ces ſortes d'arrangemens eſt une diſtin„ction trop marquée pour ne pas Vous en faire l'obſervation & Vous „aſſurer de toute la part que j'y prens. L'Académie déſiroit vivement „de Vous voir aſſocié à ſes travaux & Sa Majeſté n'a pu qu'adopter un „témoignage d'eſtime que Vous méritez à ſi juſte titre. Soyez perſuadé, „Monſieur, qu'on ne peut pas Vous être plus parfaitement dévoué que „je le ſuis

*M. d'Argenſon.*

Si j'ai inſéré cette lettre & quelques autres, priſes d'un grand nombre de lettres que M. Euler a reçues de Perſonnes illuſtres, ſoit pas leur rang, ſoit pas leurs talens, ce n'eſt pas certainement dans l'intention de groſſir cet Eloge, ni de lui prêter par-là un mérite que je n'ai pu lui donner moi-même: c'eſt que j'ai cru ces pièces dignes d'y entrer, & je penſe qu'on les y verra avec plaiſir. Si elles n'ajoutent rien au mérite d'un grand homme, on les eſtimera comme des marques de la juſtice qui lui fut rendue comme tel.

Il avoit trouvé moyen, dans ſon dernier mémoire, de tenir compte de pluſieurs inégalités du mouvement de la Lune, qu'il n'avoit pas été en état de déterminer dans ſa première Théorie, à cauſe de la complication des calculs, qu'entraînoit la méthode dont il s'étoit ſervi alors. Il eut le courage de refondre toute la Théorie avec MM. J. A. Euler, Krafft & Lexell, & de pourſuivre ſes recherches juſqu'à la conſtruction de nouvelles Tables, qui ont paru conjointement avec le grand ouvrage publié en 1772. Au lieu de s'arrêter, comme autrefois, à l'intégration infructueuſe des trois équations differentielles du ſecond degré que les principes mécaniques fourniſſent, il les rapporta d'abord aux trois ordonnées qui déterminent le lieu de la Lune; il diſtribua toutes les inégalités de la Lune en claſſes, entant qu'elles dépendent ou de l'élongation moyenne du Soleil & de la Lune, ou de l'Excentricité, ou de la Parallaxe, ou de l'inclinaiſon de l'Orbite lunaire. Tous ces moyens, employés avec art, & accompagnés de tous les artifices de calcul que le premier Analyſte du monde étoit ſeul capable d'imaginer, réuſſirent au-delà de toute attente. On eſt ſaiſi d'étonnement à la vue de ces calculs immenſes, & de la richeſſe des reſſources employées pour les abrêger & pour en faciliter l'application au vrai mouvement de la Lune.

La patience & la tranquillité d'eſprit que ce travail enorme exigeoit, nous ſurprendra encore plus, ſi nous nous rappellons dans quelles circonſtances & en quel tems il a été fait. Privé de la vue; obligé de faire la diſpoſition de tous ces calculs immenſes par la ſeule force de ſa mémoire & de ſon imagination; arrièré dans ſes affaires domeſtiques par un incendie qui venoit de ravir à lui & à ſa famille une grande partie de leurs biens; réduit à la néceſſité de quitter une maiſon ruinée, où tous les coins lui étoient connus, où l'habitude avoit ſuppléé

plée par conſéquent à la vue; excédé des troubles que des changemens ſi triſtes & ſi ſoudains & le rétabliſſement de ſa maiſon (*m*) durent lui cauſer: M. Euler fut en état de compoſer un ouvrage qui tout ſeul ſuffiroit pour l'immortaliſer, l'eût-il fait dans la ſituation la plus riante & la plus tranquille. Je ne connois rien de plus fort, rien qui tienne plus de l'Héroïsme, que cette égalité d'ame, ce courage inebranlable au milieu des revers de fortune.

Peu de mois après ce malheureux accident, dont la générosité de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE allégea le poids par un préſent de 6000 Roubles, M. Euler ſe fit opérer la cataracte par le célèbre Oculiſte, Baron de Wentzel, & cette opération lui rendit la vue, à ſa grande ſatisfaction & à celle de toute ſa famille. Mais cette joye fut peu durable: negligé dans la ſuite de la cure, & trop preſſé, peut-être, à faire uſage d'un organe qu'il auroit du avoir appris à ménager, il le perdit pour la ſeconde fois au milieu des ſouffrances les plus affreuſes.

Il fut donc reduit de nouveau à la néceſſité de ſe ſervir des yeux d'autrui, avant que d'avoir pu faire uſage de l'oeil que l'opération lui avoit rendu pour quelque tems. Ses fils, le Profeſſeur & le Lieutenant-Colonel, & MM. Krafft & Lexell continuèrent de lui prêter alternativement leurs ſecours, ſoit pour l'exécution de ſes grands ouvrages, ſoit pour compoſer ce grand nombre de mémoires qu'on trouve dans les derniers volumes des nouveaux Commentaires, & dont je m'abſtiens de parler, de crainte d'abuſer de la patience de cette Aſſemblée. Je

(*m*) Le brouillon de la pièce pour le prix ſe perdit à cette occaſion, & M. Euler le fils ſe vit obligé de repaſſer toute la Théorie de la Lune & d'en faire tous les Calculs pour la ſeconde fois.

Je m'arrêterai pourtant un inſtant à ceux qui roulent ſur l'équilibre & le mouvement des fluides & ſur la perfection ultérieure des lunettes acromatiques.

Depuis l'Hydrodynamique de M. Daniel Bernoulli, la Science du calcul qui, entre les mains de M. Euler, devenoit de jour en jour plus riche & plus applicable aux queſtions les plus difficiles des Phyſico-mathématiques, avoit été tellement perfectionnée, qu'on étoit en droit de s'attendre à la voir appliquée auſſi à cette partie eſſentielle de la Mécanique. M. Euler remplit cette attente dans quatre grands mémoires ſur l'équilibre & le mouvement des fluides, qui épuiſent tout ce que la Théorie complette de l'Hydrodynamique peut avoir de plus profond & de plus abſtrait.

Cette Théorie eſt infiniment fertile en applications heureuſes des principes généraux, & en explications très-ſatisfaiſantes de pluſieurs Phénomènes de la Nature. En conſidérant, par exemple, les dérangemens de l'équilibre de l'air, produits par la différence de ſa denſité & de ſa chaleur, M. Euler explique la cauſe générale des vents, & particulièrement des monſons ou vents périodiques de l'Inde. En conſidérant l'équilibre des fluides attirés à un ou pluſieurs centres de forces, il détermine la figure de la Terre & l'état d'équilibre des fluides qui l'entourent, ce qui amène l'explication des Phénomènes de la marée. Après avoir traité l'état d'équilibre, il trouve moyen de réduire toute la Théorie du mouvement des fluides à deux équations différentielles du ſecond degré, & il applique les principes généraux au mouvement de l'eau dans des vaſes, dans des pompes, dans des tuyaux d'épaiſſeur égale & inégale. Les recherches ſur le mouvement de l'air le conduiſent enfin à la Théo-

Théorie de la propagation du ſon & à celle de la formation du ſon des flûtes.

Tels ſont les ſujets variés & intéreſſans qu'il vient à bout d'approfondir par ſa Théorie de l'Hydrodynamique. On a ſi peu écrit ſur cette partie épineuſe des Mathématiques mixtes, & ce que M. Euler y a donné, eſt ſi ſupérieur à ce peu qu'on a, qu'il ſeroit à ſouhaiter qu'on le détachât des Commentaires & qu'on en fit un ouvrage ſéparé, pour le bien de ceux qui veulent étudier à fond cette partie importante de la Mécanique.

En compoſant ſon ouvrage ſur la Dioptrique M. Euler avoit négligé, dans la Théorie des objectifs parfaits, la diſtance des lentilles dont ils ſont compoſés, ce qui ne peut qu'augmenter les effets de la confuſion que ces objectifs devoient détruire; parceque les lentilles ont toujours une certaine épaiſſeur qu'on ne ſauroit négliger dans le calcul. Les mémoires ſur les objectifs compoſés & leur application à toutes ſortes de lunettes, inſérés dans le Volume XVIII. des nouveaux Commentaires, ſont deſtinés à ſupléer à ce défaut. On y trouve l'expoſition des moyens de rendre ces inſtrumens encore plus courts & leur champ apparent plus grand, avantages qu'il étoit impoſſible de donner dans toute leur perfection aux lunettes avant la dernière ſimplification des calculs néceſſaires. C'eſt d'après les préceptes renfermés dans ces mémoires, que M. Euler m'a fait calculer dans la ſuite l'inſtruction pour les Artiſtes Opticiens, que l'Académie à fait publier en 1774, & dont une traduction allemande ſe trouve à la ſuite de celle de la Dioptrique, faite par M. Klugel à Helmſtedt.

Le blâme général de pluſieurs caiſſes mortuaires établies en Allemagne, & les reproches qu'on faiſoit aux Tontines,

d'être trop favorables ou aux Entrepreneurs ou aux Intéreſſés, firent penſer M. Euler ſur les moyens d'établir ces ſortes d'Entrepriſes ſur des principes auſſi ſûrs que l'imperfection des tables nécrologiques le permet. Ces recherches firent naître les éclairciſſemens ſur les caiſſes de veuves &c. qui parurent en 1776. On y trouve tout ce que le calcul des Probabilités peut fournir ſur ce ſujet important.

M. Euler s'étoit engagé plus d'une fois envers le Comte Orlof, de fournir à l'Académie aſſez de mémoires, pour remplir les Actes jusqu'à vingt ans après ſa mort: il étoit homme à tenir parole. La perte de la vue, les infirmités d'un âge avancé, le grand nombre de ſes découvertes (*n*), n'ont pu ni affoiblir ſon ardeur du travail, ni détruire ſon organiſation heureuſe, ni épuiſer ſon génie fécond. Il a fait préſenter, dans l'eſpace de ſept ans; au-delà de ſoixante-dix mémoires par Mr. Golovin, & près de deux-cens-cinquante autres dont j'avois fait les calculs. Les plus anciens de ces mémoires ont été détachés du depuis & forment la collection publiée, dans le cours de cette année, ſous le titre d'Opuſcules analytiques.

Parmi ce grand nombre de mémoires, il n'y en a pas un ſeul qui ne renferme quelque nouvelle découverte, ou quelque vue ingénieuſe qui pourra y conduire. On y trouve les inté-

(*n*) On eût pu croire que le grand nombre de ſes découvertes eût émouſſé en lui le ſentiment de ce plaiſir que cauſe à l'ame la perception d'une vérité nouvelle, plaiſir que le Géomètre a l'avantage de goûter peut-être plus ſouvent que tout autre. M. Euler en étoit toujours également ſusceptible, & il auroit voulu que tout le monde le fût. Il étoit ſérieuſement fâché de l'air d'indifférence que la modeſtie me faiſoit prendre, quand je lui annonçois quelques-fois la ſolution d'un Problème au la démonſtration d'un Théorème que j'avois réuſſi à trouver.

intégrations les plus heureuſes; une multitude d'artifices & de raffinemens de la plus ſublime Analyſe; de profondes recherches ſur la nature & les propriétés des nombres; la démonſtration ingénieuſe de pluſieurs Théorèmes de Fermat; la Solution de quantité de Problèmes très-difficiles ſur l'équilibre & le mouvement des corps ſolides, flexibles & élaſtiques, & le dénouement de pluſieurs Paradoxes apparens. Tout ce que la Théorie du mouvement des corps céleſtes, de leur action mutuelle & de leurs irrégularités a de plus abſtrait & de plus épineux, s'y trouve perfectionné, autant que le calcul, manié par les mains du plus grand Géomètre, a pu contribuer à cette perfection. Il n'y a pas une branche des Sciences mathématiques qui ne lui ſoit redevable à cet égard.

Tels ſont les travaux de M. Euler, tels ſont ſes titres à l'immortalité: ſon nom ne périra qu'avec les Sciences mêmes. Transmis à la poſtérité avec les noms illuſtres de Deſcartes, Galilée, Leibnitz, Newton, & de tous les grands hommes qui ont honoré l'humanité par leur génie, ſon nom vivra encore, lorsque ceux de bien des perſonnages que la frivolité de notre ſiécle a illuſtrés, ſeront enſévelis dans la nuit éternelle de l'oubli.

Peu de Savans ont écrit autant que M. Euler; aucun ne l'a égalé ni pour la multitude ni pour la variété de ſes découvertes.

En réfléchiſſant ſur tout le bien que des hommes nés pour étendre les bornes de nos connoiſſances, peuvent faire à l'humanité; en conſidérant l'extrème rareté de ces grands talens, à qui la nature paroit avoir réſervé le droit d'éclairer le monde: on ne peut s'empêcher de ſouhaiter, qu'ils fuſſent exempts

de la loi générale que la nature humaine ſubit tot ou tard, ou qu'ils pouſſaſſent au moins leur carrière loin au-delà du terme ordinaire. Mais enfin, M. Euler en a fourni une bien longue & bien brillante; & on eſt conſolé en partie, en voyant qu'il a été exempt des ſuites ordinaires d'une application outrée; qu'il a conſervé, jusqu'au dernier moment, cette force d'eſprit qui l'a diſtingué toute ſa vie, & qu'on découvre jusque dans ſes derniers travaux.

Quelques accès de vertiges dont il fut incommodé les premiers jours du mois de Septembre paſſé, ne l'empêchèrent pas de calculer les mouvemens des globes aëroſtatiques, d'après le peu de faits que les papiers publics en avoient fourni, & il vint à bout d'une intégration très-difficile que ce calcul avoit exigée. Ces vertiges furent les avant-coureurs de ſa mort qui arriva le 7 de Septembre. Le même jour il s'entretint, à table, de la nouvelle planète, avec M. Lexell qui étoit venu le voir; & il nous parla encore ſur d'autres ſujets avec ſa pénétration ordinaire. Il étoit même à badiner avec un de ſes petits-fils, quand il fut atteint, en prenant le thé, d'un coup d'Apoplexie. Je me meurs, nous dit-il, avant de perdre connoiſſance, & il termina ſa glorieuſe vie peu d'heures après, âgé de 76 ans, 5 mois & 3 jours.

Ainſi mourut le Doyen de notre Académie, après en avoir été, pendant cinquante-ſix ans, la gloire & le plus bel ornement: Il a vu cette Académie naître & croître, il l'a vue dépérir & reprendre ſes forces alternativement. Et telle a été l'influence de ce membre illuſtre ſur les travaux académiques, que, malgré ce qu'il a fait pour elle, pendant ſon ſéjour à Berlin, les Commentaires marquent très-viſiblement l'époque de ſon départ & celle de ſon retour, comme ſi ſa préſence ſeu-

le eût été ſuffiſante pour ranimer tout. Il a eu la conſolation de voir, avant ſa mort, l'Aurore des beaux jours que la direction ſage & éclairée de Son Excellence, Madame la Princeſſe DE DASCHKAW, fait renaître parmi nous, & ſa ſatisfaction en a été proportionnée à l'attachement qu'il a toujours conſervé pour cette Académie.

M. Euler étoit d'une conſtitution forte & durable. Après tant de ſecouſſes que ſon Phyſique a du recevoir du nombre & de la violence de ſes maladies, il eût certainement ſuccombé plutôt aux effets de l'excès du travail, s'il ne fût né avec une complexion très-vigoureuſe.

Ses derniers jours ont été tranquilles & ſéreins. À l'exception de quelques infirmités attachées à un âge avancé, il a joui d'une ſanté qui le mettoit en état de donner à l'étude des momens que la vieilleſſe ſe voit communément forcée de donner au repos; & conſacrant ainſi à l'étude, le reſte d'une vie toute entière aux Sciences, il a joui de ſa gloire, fruit de ſon génie, de l'eſtime publique, fruit de ſes vertus, & des douceurs qu'il étoit digne de trouver au ſein de ſa famille.

Il poſſédoit à un haut degré ce qu'on appelle érudition. Tout ce qui nous eſt reſté des meilleurs écrivains de l'ancienne Rome, il l'avoit lu; l'ancienne littérature mathématique lui étoit parfaitement connue: l'Hiſtoire de tous les âges & de toutes les nations ſe trouvoit dans ſa tête; il en ſavoit citer les moindres faits ſans s'embrouiller. Il ſavoit de la Médecine, de la Botanique & de la Chymie plus qu'on n'attendroit d'un Savant qui ne fait pas de ces Sciences ſon étude particulière.

J'ai vu des Etrangers, qu'attiroit chez lui ſa célébrité, & plus que ſa célébrité la conſidération publique, due à des ver-

vertus qui n'accompagnent pas toujours le mérite littéraire, je les ai vus le quitter avec une ſurpriſe mêlée d'admiration: ils ne conçevoient pas comment un homme qui, depuis plus d'un demi-ſiècle, n'avoit paru occupé qu'à faire & à publier des découvertes dans la Phyſique & dans les Mathématiques, pût avoir conſervé tant de connoiſſances, inutiles pour lui & étrangères à l'objet de ſes études. C'étoit l'effet d'une mémoire heureuſe, qui ne perd rien de ce que la lecture lui a confié; & celui qui étoit en état de réciter, ſans interruption, l'Enéide d'un bout à l'autre, & d'indiquer les premiers & les derniers vers de chaque page de ſon édition, ne pouvoit que conſerver auſſi ce qu'il avoit lu dans l'âge des fortes impreſſions (*o*).

C'eſt peut-être de la même ſource, que provenoit en lui le défaut de cette ſoupleſſe, qui nous fait contracter inſenſiblement l'accent de ceux avec qui nous vivons, & perdre celui de notre patrie. M. Euler a toujours conſervé la prononciation ſuiſſe. Il s'amuſoit ſouvent à me rappeller certaines expreſſions provinciales, certaines inverſions propres à notre idiome, ou à ſe ſervir, dans ſes diſcours, de mots dont j'avois oublié la ſignification & l'uſage.

Rien n'égale la facilité inconcevable, avec laquelle il pouvoit, ſans le moindre ſigne de mécontement, quitter ſes calculs & reprendre le fil de ſes profondes méditations, après s'être prêté à la frivolité des converſations ordinaires. L'art de dé-

(*o*) Une autre preuve de la force de ſa mémoire & de ſon imagination mérite d'être rapportée ici. Il donnoit des leçons d'Algèbre & de Géométre à ſes petits-fils. L'extraction des racines l'obligeoit de leur propoſer des nombres qui fuſſent des puiſſances: il en fit dans ſa tête; & tourmenté d'inſomnie, il calcula une nuit les ſix premières puiſſances de tous les nombres au-deſſous de vingt, & nous les récita, à notre grand étonnement, pluſieurs jours après.

dépoſer l'air du Savant, de déguiſer ſa ſupériorité & de ſe mettre au niveau de tout le monde, eſt trop rare, pour ne pas faire à M. Euler un mérite, de l'avoir poſſédé. Une humeur toujours égale, une gayeté douce & naturelle, une certaine cauſticité mêlée de bonhommie, une manière de raconter naïve & plaiſante, rendoient ſa converſation auſſi agréable que recherchée.

Le grand fond de vivacité qu'il a toujours poſſédé, & ſans lequel cette activité d'eſprit que nous venons d'admirer, n'auroit pu ſubſiſter, l'entraînoit quelques fois: il s'échauffoit facilement; mais la colère lui paſſoit auſſi vite qu'elle s'étoit enflammée, & il n'a jamais conſervé de rancune contre qui que ce ſoit.

Il étoit d'une probité, d'une droiture irréprochable. Ennemi juré de toute injuſtice, s'il en voyoit commettre quelque-part, il avoit la franchiſe de la cenſurer & le courage de l'attaquer ouvertement ſans avoir égard ni aux circonſtances ni à la perſonne. Des exemples récens de ce que je viens d'avancer, ſont encore dans la mémoire de tout le monde.

Il étoit pénétré de reſpect pour la religion: ſa piété étoit ſincere & ſa dévotion pleine de ferveur. Il a rempli, avec la plus grande attention, tous les devoirs du chrétien. Il aimoit tout le monde; & s'il a jamais ſenti les mouvemens de l'indignation, ce ne fut que contre les ennemis de la religion, ſur-tout contre les Apôtres déclarés de l'Athéiſme. Il a pris lui-même la défenſe de la révélation contre les objections des Athées, dans un ouvrage publié à Berlin en 1747.

Il étoit bon Epoux, bon Pere, bon Ami, bon Citoyen, & fidèle à toutes les relations de la Société. Tout concourt

 à ju-

à juſtifier nos regrets, & à prouver au monde combien notre douleur de l'avoir perdu eſt légitime (*p*).

M. Euler s'eſt marié deux fois. En 1733 il épouſa M^lle^ Catherine Gsell, fille d'un Peintre Suiſſe, que Pierre I. avoit pris à ſon ſervice en Hollande, & d'une ſoeur du célèbre Préſident de Loën. Le ſoin de ſon ménage l'obligea à ſe remarier, après la mort de cette épouſe, & ſon choix tomba en 1776 ſur M^lle^ Salomé Abigaïl Gsell, belle-ſoeur de ſa première femme, fille de Marie Graff & petite-fille de Sibylle Mérian, connues l'une & l'autre, par leurs deſſins des Inſectes de Surinam.

De treize Enfans qu'il eut de ſes premières noces, huit ſont morts en bas âge; & de trois fils & deux filles, qui l'ont ſuivi de Berlin, il n'y a que les fils qui lui ont ſurvecu. L'aîné, qui marche depuis longtems ſur les traces de ſon illuſtre père, eſt juſtement célèbre, tant par ſes propres ouvrages que par la grande part qu'il a eue aux derniers travaux de ſon père, & par tant de prix remportés dans les Académies de Pétersbourg, de Paris, de Munich & de Göttingen. Le ſecond fils, Médecin de la Cour de S. M. I. & Conſeiller de Collège, jouit d'une réputation juſtement méritée par ſon ſavoir & par le zèle qu'il met dans l'exercice de ſa profeſſion. Le Cadet, Lieutenant-Colonel d'Artillerie & Directeur de la fabrique d'armes à Siſterbek, eſt connu des Savans par ſes obſervations aſtrono-

(*p*) Il m'eſt bien doux de pouvoir dire aux Lecteurs de cet éloge, que le Roi de Pruſſe, le Roi de Suède, le Roi de Pologne, le Prince Royal de Pruſſe, le Margrave de Schwedt & le Duc de Courlande, ont pris part à la perte que l'Académie a faite par la mort de M. Euler, & qu'ils ont témoigné à ſon fils aîné, leurs regrets, par des lettres de condoléance infiniment honorables au défunt, puiſqu'elles rendent juſtice, dans les termes les plus gracieux, à ſes talens comme à ſes vertus.

nomiques, ayant été du nombre de ceux que l'Académie a envoyés en 1769 pour obſerver le paſſage de Venus. La fille ainée, morte en 1781, avoit épouſe M. de Bell, Major de l'État général; & la Cadette s'étoit mariée avec M. le Baron de Dehlen, & mourut, dans ſes terres dans le Duché de Juliers, en 1780. Ces cinq enfans lui ont donné trente-huit petits-enfans, dont vingt-ſix ſont encore en vie.

Je ne connois pas de ſpectacle plus attendriſſant que celui dont j'ai joui tant de fois avec délices: celui de voir ce Vieillard vénérable, entouré comme un Patriarche, de ſa nombreuſe famille, empreſſée à lui rendre ſa vieilleſſe agréable, & à adoucir ſes derniers jours par toutes ſortes de ſoins & d'attentions.

Je tâcherois en vain, Madame & Meſſieurs, de Vous peindre ces ſcènes touchantes de félicité domeſtique: pluſieurs d'entre-vous ont été à portée d'en être, comme moi, témoins oculaires! Vous ſur-tout, Meſſieurs, qui Vous glorifiez de l'avoir eu pour maître (*q*)! Nous voici au nombre de cinq; y

 a-t'il

(*q*) Il y a proprement, à l'Académie, huit Mathématiciens, qui ont eu l'avantage de jouir ſucceſſivement des inſtructions de M. Euler; ſavoir: MM. J. A. Euler, Kotelnikow, Roumovsky, Krafft, Lexell, Inochodſow, Golovin & moi; mais trois ont été abſens.

O mes chers Amis & Confrères que j'ai vu verſer, à cette apoſtrophe dictée par le coeur, des larmes d'attendriſſement! je n'ai pu que vous ſerrer la main, après que la douleur m'eût étouffé la voix; mais je ne perdrai jamais le ſouvenir de cette marque de votre ſincère affliction, & je rends ici publiquement juſtice à votre ſenſibilité d'ame & à l'amour que vous avez montré, à cette occaſion, pour notre cher & incomparable maître.

a-t'il un Savant, qui puiſſe ſe vanter d'avoir vu réunis dans un même corps autant de ſes diſciples? Que ne pouvons nous lui témoigner, à la face du monde, notre tendre & éternelle reconnoiſſance, & prouver par-là, ce que je n'ai pu exprimer que foiblement dans cet éloge: que notre illuſtre maître étoit auſſi digne d'admiration par ſes rares vertus que par la force étonnante de ſon génie! Pleurez-le avec les ſciences qui lui doivent tant de ſuccès, avec l'Académie qui n'a jamais fait de perte auſſi grande, avec ſa famille dont il a été l'honneur & le ſoutien! Mes larmes ſe mêleront aux vôtres, & le ſouvenir des bienfaits que je lui dois en mon particulier, ne s'effacera jamais de ma mémoire.

---

MORTS.

# MORTS.

Outre la mort du celèbre *Leonhard Euler*, dont on vient de lire l'eloge, l'Académie a encore fait dans le courant de l'année pluſieurs pertes conſidérables, que nous allons indiquer, en commençant par la mort d'un Aſſocié externe, qui quoique déja arrivee l'année paſſée, n'a pas encore été inſerée dans nos faſtes.

I.

*André Sigiſmond Marggraf*, Directeur de la Claſſe de Philoſophie experimentale à l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe: Membre de l'Academie Royale des Sciences de Paris & de l'Academie Electorale de Mayence: naquit à Berlin, le 3 Mars 1709.

Reçu au nombre des Aſſociés externes, à la célébration du cinquantieme anniverſaire de l'inauguration de l'Académie, le 29 Décembre 1776, & mort à Berlin le 27 Juillet 1782.

La Chymie lui doit un grand nombre de découvertes importantes, & ſon Analyſe de l'eau paſſe pour un chef-d'oeuvre de l'art.

II.

*Jacques Reinbold Spielmann*, Docteur & Doyen de la faculté de Médecine, Profeſſeur de Chymie, de Botanique & de Matière médicale à l'Univerſité de Strasbourg, Membre de l'Academie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe & de pluſieurs autres Sociétés litteraires: nâquit le 31 Mars 1722.

Reçu Académicien externe le 8 Mai 1764 & mort à Strasbourg le 28 Août 1783.

On a de lui pluſieurs ouvrages fort eſtimables, parmi lesquels ſa Chymie & ſa Matière médicale lui ont mérité la plus grande célébrité. Au reſte auſſi aimable du côté de ſon coeur qu'eſtimable de celui de ſes connoiſſances, il s'eſt fait chérir de tous ſes éléves, dont il ſe trouve quelques uns à notre Académie, avec lesquels il a été en correſpondance jusqu'à ſon décès, & dont il a été bien ſincèrement regretté.

III.

*Antoine Nunès Ribeiro Sanchès*, Docteur en Médecine de la faculté de Salamanque, Conſeiller d'État & ancien Médecin des Camps & Armées de S. M. Impériale de Ruſſie, ainſi que du noble Corps des Cadets de Terre. Membre de l'Académie Royale des Sciences de Lisbonne, de la Société Royale de Médecine & Correſpondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris: nâquit à Pegna-Maçor en Portugal le 7 Mars 1699.

Il vint en Ruſſie en 1731, & y occupa ſucceſſivement pluſieurs places diſtinguées jusqu'en 1747, où il ſe retira à Paris. L'Académie le reçut dès ſon départ le 12 Septembre de la même année, au nombre des Aſſociés externes & lui accorda une penſion, dont il jouit jusqu'à ſa fin avec des témoignages de la plus vive reconnoiſſance, en entretenant, malgré les infirmités de ſon age, une correſpondance régulière avec l'Académie, & en lui communiquant tout ce qui lui parut intereſſer les ſciences. Il paya le tribut à la nature le 3 Octobre 1783.

Il a publié diverſes brochures dont on fait beaucoup de cas, & il a été ſans contredit un des plus habiles Médecins de ſon temps: auſſi a-t'il été fréquemment conſulté de Mrs. ſes Confrères, dans des cas épineux. La matière médicale étoit ſon étude favorite: il ſe plaiſoit a employer les remédes nouveaux dont il venoit de reconnoitre l'efficacité, & il commençoit toujours par les eſſayer ſur lui même. C'eſt lui qui a introduit en France l'uſage des fleurs du Zinc, de la teinture des Cantharides, de la racine de Colombo, & de celle de Jean Lopès de Pinheiro. Peu de ſçavans ont joui d'une eſtime plus diſtinguée que lui, mais ce qui avoit flatté le plus ce reſpectable vieillard, & ce qui l'avoit véritablement attendri, ce fut la maniere toute gracieuſe de laquelle Son Alteſſe Impériale Monſeigneur le Grand-Duc l'avoit reçu lorsqu'Elle s'etoit trouvé à Paris en 1782, ſous le nom du Comte de Nord.

## IV.

*Gerhard Frédéric Muller*, Conſeiller d'Etat actuel aux Archives de l'Empire à Moscou & Hiſtoriographe de Ruſſie: Chevalier de l'Ordre de St. Wolodimer de la troiſieme Claſſe, Membre de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm, de la Société Royale des Sciences de Londres, de la Société économique de St. Pétersbourg & de pluſieurs autres Sociétés littéraires, Correſpondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris: nâquit à Herford en Weſtphalie le 18 Octobre 1705.

Il arriva à St. Pétersbourg le 5 Novembre 1725, où il fut appellé comme Adjoint de l'Académie naiſſante; il aſſiſta à ſon inauguration qui eut lieu le 27 Décembre de la même année, & il a ſurvecu tous ceux qui comme lui avoient été préſens à cette ſolemnité. Sa première occupation étoit d'enſeig-

ner aux élèves de l'Académie l'Hiſtoire & la Géographie: il fut enſuite attaché à la Bibliothéque Impériale en qualité de Sous-Bibliothécaire; & il eut ſoin de l'impreſſion des deux prémiers tomes des Commentaires, ainſi que de la rédaction des Gazettes de St. Pétersbourg jusqu'en Juillet 1730, où il fut reçu Académicien ordinaire & Profeſſeur en Hiſtoire: il obtint en même temps la permiſſion de voyager en Allemagne, Hollande & Angleterre, & l'Académie le chargea de diverſes commiſſions. Il revint à St. Pétersbourg le 2 Août 1731 & donna des cours publics jusqu'en 1733. Il fut enſuite engagé à la fameuſe expédition de Kamtſchatka, mais il ne parvint que jusqu'à Yakoutzk', d'où il retourna avec M. Gmelin à St. Pétersbourg, après une abſence de dix ans. En 1747 M. Muller fut nommé Hiſtoriographe de Ruſſie & Recteur de l'Univerſité de St. Pétersbourg qui ſe trouvoit alors attachée à l'Académie; en 1754 Secrétaire des Conférences académiques & en 1765 Inſpecteur de la maiſon des enfans trouvés à Moscou, où il s'établit & où il fut enfin engagé auprès des Archives de l'Empire. Depuis ce moment il reſta attaché au Département des Affaires étrangeres, & y avança jusqu'au grade de Conſeiller d'Etat actuel, en conſervant toujours comme une penſion ſes appointemens d'Académicien ordinaire. Sa Majeſté notre très-gracieuſe Impératrice l'honora de Sa bienveuillance diſtinguée & le décora d'abord après l'inauguration de l'Ordre de St. Wolodimer, du cordon de la 3<sup>e</sup> Claſſe: il n'en jouit que peu de temps & mourut le 4 Octobre 1783 généralement regretté.

M. Müller eſt le premier qui ait indiqué les vraies & bonnes ſources de l'Hiſtoire Ruſſe. Ses collections publiées en allemand (*), en 9 volumes in 8$^{vo}$, & ſes Ежемѣсячныя Сочи-

(*) Sammlung ruſſiſcher Geſchichte, 9 Bände in 8vo.

*Commentia* (*) lui ont concilié la reconnoiſſance de tous les Hiſtoriens tant étrangers que regnicoles. Il s'étoit auſſi propoſé d'écrire une hiſtoire complette de la Siberie dont il a paru effectivément un premier volume, mais d'autres occupations l'ont détourné de la continuer. Compilateur infatigable, il ramaſſoit ſans ceſſe des matériaux, & ne ſe donnoit pas le temps de les rediger d'après un ſyſtème ſuivi. De là vient qu'on n'a de lui, outre les écrits mentionnés ci-deſſus, que des pièces détachées éparſes en divers ouvrages périodiques, entre leſquelles ſes recherches ſur les anciens habitans de la Ruſſie inſérées dans le Magazin hiſtorique de M. Büſching & imprimées en ruſſe en 1773, paſſent pour être ſon chef d'oeuvre: il a bien traité encore pluſieurs autres ſujets d'Hiſtoire, mais qui n'ont pas été déſtiné pour le public. Au reſte il a enrichi le Dictionnaire géographique de la Ruſſie imprimée à Moscou en 1773, d'un grand nombre d'articles intereſſans & il ſe trouve encore parmi ſes papiers pluſieurs additions & corrections qui avoient été deſtinées pour une ſeconde édition.

## V.

*Jean le Rond d'Alembert*, Secrétaire perpétuel de l'Académie françoiſe, Penſionnaire ordinaire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, Membre de la Société Royale des Sciences de Londres, de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe; de celle de Suède, de l'Inſtitut de Bologne & des Sociétés de Turin & de Norwège: nâquit à Paris le 17 Novembre 1717.

Reçu au nombre des Aſſociés externes le 8 Mais 1764, & mort à Paris le 18 Octobre 1783.

Il

(*) Ouvrage périodique contenant des pièces hiſtoriques, &c. dont il paroiſſoit un cahier chaque mois.

Il a été ſans contredit un des premiers Mathématiciens de notre tems. Son traité de Dynamique eſt un des ouvrages les plus eſtimés ſur la Science du mouvement des Corps; & ſa ſolution du problème de la préceſſion des équinoxes, ainſi que ſes recherches ſur la réſiſtance des fluides & la cauſe des vents ne ſont pas moins des chef d'oeuvres d'une profonde Mathématique.

## VI.

*Pierre Wargentin*, Chevalier de l'ordre Royal Suédois de l'Étoile polaire & Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Copenhague & de pluſieurs autres Sociétés littéraires: nâquit à Stockholm le 22 Septembre 1717.

Reçu au nombre des Aſſociés externes le 17 Janvier 1760 & mort à Stockholm le 2 Décembre 1783.

L'Aſtronomie a été l'objet principal des ſes veilles, & elle lui doit la découverte importante des équations empiriques des ſatellites de Jupiter. Ses autres mérites littéraires ne ſont pas moins connûs.

EX-

# EXTRAIT DES MÉMOIRES

## CONTENUS DANS CE VOLUME.

# CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

## I.

## Conſiderationes ſuper Trajectoriis tam rectangulis quam obliquangulis.

Auctore *L. Eulero*, p. 3.

Quoique depuis plus d'un demi-Siècle le Problème des Trajectoires, ſi fameux autrefois, & ſi difficile avant les progrès que l'Analyſe des fonctions à deux variables a faits dans la ſuite, ſoit presque oublié aujourd'hui & ne paroiſſe avoir que peu d'interêt: l'Académie ne doute pas que le mémoire qui ſe trouve à la tête de ſa nouvelle collection, & qui eſt le dernier qui lui reſte de feu M. Euler, ſur ce ſujet, ne faſſe plaiſir aux Géomètres, puisqu' indépendamment de la clarté, avec laquelle la Théorie générale des Trajectoires y eſt préſentée, il renferme pluſieurs nouvelles recherches & quelques propriétés remarquables, que l'Auteur a dû au point de vue, d'où il a enviſagé ici ce Problème.

Il part de la conſidération qu'un nombre infini de lignes courbes peut être répréſenté par une ſeule & même équation, lorsqu'on y fait entrer, outre les ordonnées, une quantité conſtante, à laquelle on puiſſe donner ſucceſſivement toutes les valeurs poſſibles, & que l'Auteur nomme, par cette raiſon, le Paramètre variable de ces courbes.

D'après cette conſidération le Problème des Trajectoires peut être énoncé ainſi d'une manière très-générale: Ayant décrit une infinité de lignes courbes, toutes contenues ſous la même équation entre les coordonnées & la quantité conſtante en queſtion, trouver une ligne courbe qui traverſe toutes ces lignes ſous un même angle quelconque.

Ce point de vue n'eſt pas, à la vérité, tout-à-fait nouveau, & feu M. Euler en avoit déjà fait uſage pour réſoudre le Problème des Trajectoires orthogonales, dans un mémoire inſéré dans la premiere partie du Tome XIV. des nouveaux Commentaires. Mais on voit bien que la Solution du Problème, conſidéré de la manière générale, comme il l'eſt ici, demande une méthode différente, & qu'elle doit avoir bien plus de difficultés, & même d'inſurmontables, pour le cas où les angles d'interſecton ne ſont pas droits.

Quelle que ſoit l'équation, par laquelle les courbes que la Trajectoire doit couper ſous le même angle, ſont repréſentées, il y a trois cas à diſtinguer entre eux. On peut regarder 1°) l'appliquée comme fonction de l'abſciſſe & du paramètre; 2°) l'abſciſſe comme fonction de l'appliquée & du paramètre; 3°) le paramètre comme fonction des deux coordonnées.

Les deux premiers cas ne ſont proprement qu'un; c'eſt pourquoi l'Auteur les traite auſſi conjointement; & il éclaircit la Solution qu'ils lui fourniſſent par pluſieurs exemples. Mais ce qui mérite une attention particulière, c'eſt la propriété qu'il avoit dejà demontrée, dans ſes mémoires antérieurs, pour les Trajectoires orthogonales: ſavoir la réciprocation des Trajectoires & des courbes qu'elles traverſent. Car étant parvenu à une équation differentielle entre l'abſciſſe & le paramètre, dont

dont l'integrale exige une nouvelle conſtante arbitraire, à laquelle on peut donner ſucceſſivement toutes les valeurs poſſibles, l'auteur obſerve qu'on obtient par-là une infinité de Trajectoires dont chacune traverſe les courbes contenues dans la même équation, ſous le même angle, & que par conſéquent les courbes coupées par les Trajectoires deviennent Trajectoires à leur tour.

Le troiſième cas, où le Paramètre variable eſt regardé comme fonction des coordonnées, eſt ſurtout remarquable, parce qu'il fournit le moyen de trouver un nombre infini de cas, où les courbes coupées, auſſi bien que les Trajectoires, deviennent algébriques, problème qu'il avoit dejà traité, en un ſens plus étroit, dans les Tomes II & V des anciens & XIV. des nouveaux Commentaires, mais qui en général eſt très-difficile à réſoudre par toute autre voye que celle que M. Euler a ſuivie ici. Ce Problème doit intereſſer par la belle Solution qu'il en donne à la fin de ce mémoire, & qui fournit une nouvelle preuve de l'eſprit fecond en reſſources, dont cet incomparable Géomètre étoit doué.

Au reſte les Amateurs de ces ſortes de recherches, s'il y en a encore parmi les Géomètres de nos jours, ſont à renvoyer à un mémoire de feu M. Euler, qui ſe trouve dans le Tome XVII. des nouveaux Commentaires, où le même ſujet eſt traité plus généralement encore à certains égards; de façon que ces deux mémoires renferment à peu-près tout ce qu'on peut déſirer ſur la Théorie générale des Trajectoires, tant que les forces de l'Analyſe ne permettront pas de réſoudre le Problème dans toute ſa généralité, c'eſt-à-dire, tant que, le rapport entre le différentielles du paramètre & des coordonnees étant donné pour les courbes coupées, on ne peut pas rendre inte-

intégrable l'équation différentielle qui contient la relation entre les coordonnées des courbes coupantes.

## II.

## Nouae demonſtrationes circa diuiſores numerorum formae $xx + nyy$.

Auctore *L. Eulero*, pag. 47.

M. Euler avoit dejà donné dans le Tome XIV. des anciens Commentaires un grand nombre de Théorèmes ſur les diviſeurs des nombres de la forme $xx + nyy$; mais ces Théorèmes ſont ſans démonſtrations; & il a avoué lui-même ne les avoir trouvés que par induction. Les Théorèmes relatifs à cet objet, qu'il avoit donnés dans la ſuite, dans les Tomes IV, VI & VIII des nouveaux Commentaires, ſont munis en partie de démonſtrations; mais ils ne vont que jusqu'aux nombres de la forme $xx + 3yy$. M. de la Grange à qui l'on doit tant de belles Demonſtrations ſur la nature & les propriétés des nombres, a pouſſé plus loin ces recherches dans un mémoire intitulé: *Recherches d'Arithmétique*, inſéré aux nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences & belles-Lettres de Berlin pour l'année 1773; & c'eſt la lecture de ce mémoire qui a fourni à feu M. Euler l'occaſion de reprendre cette matière.

Il débute par la démonſtration du Théorème, que ſi l'on diviſe tous les nombres quarrés par un nombre premier P, le nombre de tous les réſidus différens qui en réſultent, ſoit toujours $\frac{1}{2}(P - 1)$. Tous les nombres plus petits que P étant au nombre de $P - 1$, dont celui des réſidus $\frac{1}{2}(P - 1)$ n'eſt que la moitié, le nombre de ceux qui ſont exclus de la claſſe

claſſe des réſidus ſera donc auſſi $\frac{1}{2}$(P—1), que l'Auteur nomme *non-réſidus.*

Le ſecond Théorème, que M. Euler démontre de deux manières, c'eſt que, ſi la lettre $a$ marque un réſidu quelconque, & que le nombre $n$ eſt contenu dans la forme $\lambda P - a$, on puiſſe toujours aſſigner deux nombres $x$ et $y$, tels que la forme $xx + nyy$ ſoit diviſible par P. D'où il ſuit que, ſi $\alpha$ marque un non-réſidu & $n$ un nombre de la forme $\mu P - \alpha$, la forme $xx + nyy$ ne puiſſe jamais être diviſible par P.

Tous les nombres étant ou de la forme $\mu P - a$, ou de la forme $\mu P - \alpha$, il faut diſtribuer, pour chaque diviſeur premier P, tous les nombres en deux claſſes, dont l'une contient tous les nombres $n$ qui rendent la forme $xx + nyy$ diviſible par P, & l'autre ceux qui excluent ce diviſeur. Cela remarqué l'Auteur eſt en état de réſoudre ce Problème: La lettre $n$ marquant un nombre poſitif quelconque, trouver tous les nombres premiers qui puiſſent être diviſeurs des nombres de la forme $xx + nyy$. La Solution de ce Problème eſt accompagnée d'une table qui, pour toutes les valeurs de $n$, depuis 1 jusqu'à 50, marque tous les diviſeurs premiers des nombres de la forme $xx + nyy$.

Cette table qu'on peut aſſez facilement continuer à volonté pour des valeurs plus grandes de $n$, eſt ſuivie de la Solution d'un problème analogue pour les cas où $n$ eſt un nombre négatif, ſavoir $n = -m$, & qui eſt pareillement accompagnée d'une table pour tous les diviſeurs premiers des nombres de la forme $xx - myy$, ou $myy - xx$, depuis $m = 2$ jusqu'à $m = 24$.

M. Euler finit ce mémoire par les deux Théorèmes ſuivans:

1°.) Si $n$ eſt de la forme $4k+1$ ou $4k+2$, les nombres de la forme $4ni+2n+1$ ſeront diviſeurs de la forme $xx+nyy$, toutes les fois qu'ils ſont premiers.

2°.) Si $n$ eſt de la forme $4k$ ou $4k-1$, les nombres premiers de la forme $4ni-2n+1$ ſeront diviſeurs des nombres de la forme $xx+nyy$, toutes les fois qu'ils ſont premiers.

Théorèmes que l'illuſtre Géomètre n'a fait qu'énoncer, leur vérité étant évidente par les raiſonnemens qui les précédent dans cet intéreſſant mémoire.

## III.

## Inveſtigatio curvarum quae ſimiles ſint ſuis evolutis vel primis, vel ſecundis, vel tertiis, vel ordinis cuiuscunque.

Auctore *L. Eulero*, pag. 75.

Soit B la développée d'une courbe A, C la développée de B, D la développée de C, & ainſi de ſuite, & en nommant B la premiere, C la ſeconde, D la troiſième, &c. développée de A, le but de l'Auteur de ce mémoire eſt de trouver les courbes A qui ſont ſemblables à leur première, ſeconde, troiſième, ou enfin à leur développée d'un ordre quelconque.

Soit $r$ le rayon oſculateur de la courbe A, $r'$ le rayon oſculateur de la première développée B, tiré du point de contact du rayon $r$; $r''$ celui de la ſeconde développée C tiré du point

point où le rayon $r'$ touche cette courbe C, & ainſi de ſuite, & en mettant l'amplitude de la courbe cherchée $A = \Phi$, puiſque chaque rayon oſculateur eſt perpendiculaire à ſa courbe & tangente de la développée, il eſt clair que l'amplitude de l'arc correſpondant de chaque développée ſera auſſi $\Phi$. Cela remarqué on trouve par la nature du développement $r' = \frac{\partial r}{\partial \Phi}$, $r'' = \frac{\partial r'}{\partial \Phi}$, $r'' = \frac{\partial r''}{\partial \Phi}$, &c. ou bien, en prenant l'élément de l'amplitude conſtant, on a $r' = \frac{\partial r}{\partial \Phi}$, $r'' = \frac{\partial \partial r}{\partial \Phi}$, $r''' = \frac{\partial^3 r}{\partial \Phi}$, & pour la développée de l'ordre $n$: $r^{(n)} = \frac{d^{(n)} r}{\partial \Phi^n}$. Or comme cette courbe de l'ordre $n$ doit être ſemblable à la courbe A, il faut que $r^{(n)}$ ſoit à $r$ dans un rapport conſtant C : 1, d'où l'on tire $r^{(n)} = C\, r$. Ainſi on a $C\, r = \frac{\partial^{(n)} r}{\partial \Phi^n}$, équation qui renferme la Solution complette du Probleme.

Pour trouver les intégrales particulières de ce cette équation & pour en former après une intégrale complette, l'auteur la met ſous cette forme: $\frac{\partial^{(n)} r}{\partial \Phi^n} \pm C\, r = 0$, & il obſerve que la valeur $r = A\, e^{\lambda \Phi}$ lui ſatisfait, $e$ marquant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt égal à l'unité. Car en mettant $r = A\, e^{\lambda \Phi}$, on a $\frac{\partial r}{\partial \Phi} = A\, \lambda\, e^{\lambda \Phi}$, $\frac{\partial \partial r}{\partial \Phi^2} = A\, \lambda^2\, e^{\lambda \Phi}$, $\frac{\partial^3 r}{\partial \Phi^3} = A\, \lambda^3\, e^{\lambda \Phi}$ & pour la courbe de l'ordre $n$, $\frac{\partial^{(n)} r}{\partial \Phi^n} = A\, \lambda^n\, e^{\lambda \Phi}$, donc $A\, \lambda^n\, e^{\lambda \Phi} = C\, r = C\, A\, e^{\lambda \Phi}$, ou bien $\lambda^n = \mp C$, ou bien enfin $\lambda^n \pm \alpha^n = 0$, équation d'où il faut chercher toutes les $n$ valeurs de $\lambda$, dont chacun fournit une intégrale particulière, qui priſes enſemble ſeront l'intégrale complette de l'équation $\frac{\partial^{n)} r}{\partial \Phi^n} = C\, r$. L'Auteur fait effectuer cette réſolution par la ri-

 cheſſe

cheſſe de ſes moyens & la ſimplicité de ſon ſymbolisme; & ayant trouvé de cette façon une équation entre le rayon osculateur & l'amplitude de la courbe ſemblable à ſa développée de l'ordre $n$, il la réduit aux coordonnées & finit ces recherches générales par quelques applications remarquables, tant par elles mêmes que par la manière dont elles ſont traitées, mais qu'il ſeroit trop long de rapporter ici.

Feu M. Euler avoit dejà traité ce même Problème dans un mémoire inſéré un Tome XII. des anciens Commentaires; mais chacun qui lira ce mémoire verra, ſans qu'on le faſſe remarquer par des parallèles & des détails, que ce dernier mémoire a ſur le précédent tous les avantages que l'avancement de certaines parties de l'Analyſe, opéré par ſon Auteur dans l'éſpace de plus de trente années, a pû lui donner.

CLAS-

# CLASSE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

## I.

## De motu globi heterogenei ſuper plano horizontali, vna cum dilucidationibus neceſſariis ſuper motu vacillatorio.

Auctore *L. Eulero*. Pag. 119.

En traitant dans ce mémoire le mouvement d'un globe, dont le centre de gravité n'eſt pas le même avec celui de la figure, l'Illuſtre Auteur ſe borne, pour éviter les trop grandes difficultés du calcul, au mouvement qui ſe fait ſur un plan horizontal. Il ne conſidére non plus que le mouvement rectiligne, & exclut tous les mouvemens gyratoires, excepté ceux, qui ſe font autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à la direction du mouvement progreſſif, l'Analyſe n'étant pas encore avancée au point de pouvoir traiter d'autres mouvemens autour des axes obliques.

En partant donc des principes connus pour la détermination du mouvement progreſſif & gyratoire d'un corps animé par des forces quelconques, l'Auteur parvient à deux équations aux ſecondes différences, qui ne renferment plus que trois variables, ſavoir celle du tems, celle de l'eſpace parcouru par le mouvement progreſſif, & celle de l'angle décrit par le mouvement gyratoire. Mais ces équations étant trop compliquées pour pouvoir en tirer aucune concluſion, & renfermant d'ail-

 leurs

leurs l'expreſſion de la friction, qui doit être déterminée par les circonſtances mêmes du mouvement, l'Auteur commence par traiter les cas, où le mouvement eſt cenſé ſe faire ſans aucune friction. Dans cette ſuppoſition il trouve généralement, que la viteſſe progreſſive du centre de gravité ſera conſtante. Mais pour déterminer l'angle décrit dans un certain tems autour du centre du globe, il parvient à une équation aux prémiéres différences, qui, priſe dans ſa généralité, n'eſt encore point intégrable, que par approximation. Il remarque donc, que ſi le centre de gravité coïncidoit avec celui du globe, le mouvement gyratoire ſeroit uniforme, auſſi bien que le mouvement progresſif: & enſuite il paſſe au cas, où l'angle décrit autour du centre de la figure reſte toujours fort petit, ce qui exige que la viteſſe gyratoire initiale ſoit auſſi, pour ainſi dire, infiniment-petite. Dans cette ſuppoſition donc le globe, indépendamment du mouvement progreſſif & uniforme de ſon centre de gravité, fera autour du centre de la figure de part & d'autre des excurſions infiniment-petites, égales, & iſochrones, ce qui conſtitue le mouvement vacillatoire, que l'Auteur avoit déja déterminé autrefois. Il examine après cela un ſecond cas, où l'intégration a lieu, (mais en continuant de faire abſtraction de la friction), c'eſt quand les centres de gravité & de la figure ſont fort près l'un de l'autre. En ſuppoſant donc au globe une viteſſe gyratoire initiale fort-petite, ſans quoi l'équation ne pourroit point être intégrée, il trouve, que le centre de gravité, tout en conſervant ſon mouvement progreſſif & uniforme, montera toujours de plus en plus, mais ſans atteindre jamais entièrement la ſituation verticale au-deſſus du centre de la figure. Si au contraire la viteſſe gyratoire initiale étoit conſidérablement plus grande que la progreſſive, les deux centres de gravité & de la figure tombant encore fort près l'un de l'autre, l'intégration réuſſira auſſi, & l'on déterminera facilement pour

pour chaque angle le tems requis pour le décrire. Mais ſi l'on vouloit ſavoir cet angle pour un tems donné, on ſeroit obligé de ſe ſervir de la réduction qu'on employe dans la théorie des Planètes pour déterminer l'Anomalie vraye par la moyenne. Au reſte dans ce cas-ci, le centre de gravité ſera des révolutions entières autour du centre de la figure, & il mettra toujours un tems égal à aller du point le plus bas au point le plus haut, & à revenir du point le plus haut au point le plus bas. Ce mouvement du centre de gravité autour de celui de la figure ſe ſera à-peu-près de la même manière, dont les planètes ſe meuvent autour du ſoleil dans leurs orbites, le ſite le plus bas du centre de gravité répondant au perihélie, & le plus haut à l'aphélie. De même le cas précédent, où il falloit un tems infini au centre de gravité, pour atteindre le point le plus haut, peut être regardé comme ſemblable au mouvement parabolique d'une comète. L'Auteur fait remarquer encore, que, quoique le centre de gravité garde continuellement la même viteſſe progreſſive, & que celui du globe ſe meuve toujours dans la même ligne droite horizontale, la viteſſe progreſſive de ce dernier centre ne ſera rien moins que conſtante. L'Auteur paſſe maintenant à conſidérer le roulement parfait du globe, en tenant compte de la friction. (Par roulement parfait il entend ce mouvement du globe, par lequel il décrit une cycloide ordinaire, ni racourcie, ni allongée). Ici avant toute choſe il examine: quelle doit être la valeur de $\lambda$, qui exprime la friction, qu'il ſuppoſe ne pouvoir ſurpaſſer $\frac{1}{3}$ de la preſſion; & ſi le roulement parfait peut conſiſter avec cette ſuppoſition. Or il trouve, que, lorsque le centre de gravite eſt aux points le plus haut & le plus bas, la friction s'évanouit entièrement, ce qui ne répugne pas à la ſuppoſition que la friction ne ſoit pas plus qu'un $\frac{1}{3}$. De même auſſi pour les points intermédiaires du centre de gravité entre le plus haut

&

& le plus bas, la friction reſtera toujours au-deſſous d'un $\frac{1}{3}$, ſurtout pour le cas, où les centres de gravité & de la figure ſeront fort près l'un de l'autre; à moins que la conſtante arbitraire, introduite par l'intégration dans le calcul, ne ſoit priſe fort grande. Au reſte, quoiqu'on prenne cette conſtante de façon, que le roulement parfait puiſſe avoir lieu, on trouve cependant, pour le cas des deux centres très-voiſins l'un de l'autre, une équation entiérement différente de celle, qu'on avoit trouvée plus haut pour le même cas, en ſuppoſant la friction $= 0$. Mais l'équation ne ſera intégrable non plus que dans les cas ſpéciels qu'on a déja vus plus haut. L'Auteur examine donc en détail le mouvement vacillatoire, qui aura lieu, en ne ſuppoſant au globe d'autre viteſſe, que celle, qu'il recevra par une légère inclinaiſon, qu'on lui aura donnée au commencement. En ce cas le globe fera auſſi des librations iſochrones & d'une excurſion égale, telles que celles qu'on a vues, avec cette différence, que la longueur du pendule ſimple, iſochrone avec ces dernières librations, ſera plus grande, que pour celles, qui ſe font ſans aucune friction. Et le rapport de la longueur de ces pendules ſera le même, quelque grande ou quelque petite que puiſſe être la friction. Au reſte il eſt aiſé à voir, qu'il eſt indifférent, que ce ſoit un globe parfait, ou quelque autre corps arrondi par le bas, qui faſſe ces librations. De même, ſi les centres de gravité & de la figure ſont très voiſins, le mouvement du globe diffèrera encore, en ce qu'il ſera plus lent, de celui qui ſe fait, quand il n'y a aucune friction. Pour les autres cas plus généraux, on a déja vu, qu'ils ne peuvent pas être traités dans aucune des deux ſuppoſitions.

II.

## II.

## Diſquiſitio de Theoremate quodam ſingulari Celeb. Lamberti, pro aeſtimandis temporibus, quibus arcus ſectionum conicarum deſcribuntur a corporibus, quae ad alterutrum focum attrahuntur viribus reciproce proportionalibus quadratis diſtantiarum.

Auctore *A. I. Lexell.* Pag. 140.

Ce mémoire roule ſur un beau Théorème du célébre Lambert, qui ſe trouve dans ſon livre intitulé: *Inſigniores orbitae Cometarum proprietates*, & où ce grand Géomètre démontre: que ſi dans deux Ellipſes, conſtruites ſur le même grand axe, on coupe deux arcs de maniere, que non ſeulement les cordes, qui ſoutiennent ces arcs, ſoyent égales entre elles, mais qu'auſſi les ſommes des lignes droites, ménées des foyers des Ellipſes aux extrémités de ces arcs ſoyent dans le même rapport: alors les deux ſecteurs elliptiques décrits autour des foyers ſeront en raiſon ſoûdoublée des paramètres principaux pour ces Ellipſes; ou, ce qui revient au même, que ces ſecteurs ſeront entre eux, comme les petits axes des deux Ellipſes. M. de la Grange, excité par l'importance de ce Théorème, montra dans le IX Vol. des nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, comment il pouvoit être démontré par les principes du calcul intégral: & c'eſt en réfléchiſſant ſur cette démonſtration, que le célebre M. Lexell a trouvé, qu'elle pouvoit auſſi bien être appliquée aux ſecteurs hyperboliques décrits autour des foyers des Hyperboles; & delà il a pris occaſion de traiter à fond cette matière. Il commence donc par démontrer à la maniere des anciens Géomètres quatre Lemmes ſuivis du Théorème principal, & prouve enſuite quelques propriétés très remarquables des ſections coniques, & qui ont quelque rapport

avec ce qu'il venoit de trouver. Mais ſa démonſtration s'étant bornée au cas, où pour l'un des ſecteurs elliptiques la corde étoit perpendiculaire au grand-axe, M. Lexell paſſe à traiter ce Théorème plus en général. Après quoi il fait remarquer, que tout ce qu'il vient de démontrer, ſe peut appliquer tout auſſi bien aux Hyperboles, qu'aux Ellipſes. Comme donc le grand Newton avoit déja prouvé, que deux corps, attirés vers le même centre par des forces en raiſon quarrée inverſe des diſtances de ce centre, décrivent dans le même temps autour du centre des aires en raiſon ſoû-doublée des paramètres principaux de leurs orbites, M. Lexell conclut, que, ſi dans deux Ellipſes, on deux Hyperboles, dont les grands axes ſont égaux, on tire deux cordes égales, de maniere, que les lignes droites, tirées des foyers de ces Ellipſes ou Hyperboles vers les extrémités des cordes, donnent la même ſomme pour les deux Ellipſes ou Hyperboles, alors les arcs elliptiques ou hyperboliques, ſoûtendus par ces cordes, feront décrits dans le même temps. Pour répandre plus de clarté ſur cet important Théorème, l'Auteur fait ſuivre la démonſtration géomètrique d'une autre analytique indirecte, en montrant que, ſi dans deux Ellipſes ayant le même grand-axe, on a deux ſecteurs autour des foyers, en raiſon ſoûdoublée des paramètres principaux, la ſomme des rayons vecteurs pour chaque ſecteur ſera la même, & qu'auſſi les cordes, qui ſoutiennent les arcs elliptiques, feront égales. Mais comme il s'agit proprement de démontrer l'inverſe de cette propoſition, l'Auteur donne encore une autre démonſtration analytique directe: & une belle propriété de deux Ellipſes, conſtruites ſur le même axe, dont l'Auteur fait voir la vérité, le mène à une nouvelle démonſtration géomètrique du Théorème principal. La démonſtration analytique précédente n'ayant lieu que pour l'Ellipſe, M. Lexell en ajoute une auſſi pour l'Hyperbole, qu'il fait même ſuivre d'une ſeconde,

de, qu'il fonde ſur quelques propriétés de l'Hyperbole équilatère, analogues à celles, qu'on démontre pour le Cercle dans les Elémens de Trigonométrie. Après quoi il montre, comment on peut ſimplifier la démonſtration, en mettant un des angles $= 0$, enſorte qu'un des rayons vecteurs des ſecteurs ſe confonde avec l'axe de l'Ellipſe; & en paſſant il prouve un rapport remarquable entre les angles de la ſeconde Ellipſe avec celui, qui reſte de la premiére. La démonſtration de M. Lexell ayant toute la généralité, qu'on peut demander, il montre les cas particuliers, qu'il faut ſtatuer, pour l'adapter au raiſonnement géomètrique de M. Lambert. Cette derniere conſidération ayant conduit l'Auteur à la réduction de cette formule $\frac{r\partial r}{\sqrt{(H+Mr+Nrr)}}$, à la différence de deux autres ſemblables, il remarque, que l'Illuſtre M. de la Grange avoit déja démontré, que cette formule, quels que fuſſent les coëfficiens H, M & N, pouvoit toujours être réduite à la différence de ces formules $\frac{x\partial x}{\sqrt{(L+Mx+Nxx)}} - \frac{y\partial y}{\sqrt{(L+My+Nyy)}}$. Mais quand M. de la Grange en tire la concluſion, que la formule $\frac{r\partial r}{\sqrt{(H+Mr+Nrr)}}$ étoit toujours proportionelle à l'élément du temps dans l'Ellipſe, M. Lexell relève cette conſéquence comme trop générale, & ne pouvant être vraye que pour les cas, où les facteurs de $H+Mr+Nrr$ ſont réels, & où de plus N & H ſont des quantités négatives, ce qu'il prouve en ajoutant auſſi l'application à l'Hyperbole. L'Auteur n'étant parvenu que par les quantités imaginaires à la réduction précédente des formules différentielles, il paſſe maintenant à montrer, comment la même réduction peut être trouvée par le calcul des quantités réelles ſeules. Enſuite, comme il a déja prouvé, que les formules $\int\frac{r\partial r}{\sqrt{(L+Mr-rr)}}$, $\int\frac{r\partial r}{\sqrt{(L+Mr+rr)}}$, ſe réduiſent, quand le dénominateur eſt réſoluble en facteurs réels, l'une à un ſecteur elliptique autour du foyer, avec le ſurplus d'une quantité algébri-

gébrique, & l'autre à un ſecteur hyperbolique autour du foyer avec le ſurplus d'une quantité algébrique, & ne peuvent point par conſéquent, lorsque L eſt poſitif, être proportionelles au temps; il démontre, que cependant la formule $\int \frac{r\partial r}{\sqrt{(L + Mr - rr)}}$ peut facilement être réduite à un ſecteur elliptique, décrit autour de quelque autre point dans le petit-axe. L'Auteur finit par la conſidération du cas, où la formule $L + Mr + Nrr$ ne peut pas être réſolue en facteurs réels, & il découvre un rapport très remarquable entre des ſecteurs hyperboliques, quoiqu'il avoüe ne point en pouvoir donner de démonſtration directe.

## III.

## Determinatio motuum penduli compoſiti bifili ex primis mechanicae principiis petita.

Auctore *Nicolao Fuſs.* Pag. 184.

Afin de donner aux lecteurs de ces extraits une idée de l'eſpèce de mouvemens dont l'Auteur de ce mémoire s'occupe, nous tranſcrirons ici les réſultats de deux cas déterminés, auxquels il a jugé àpropos d'appliquer ſes recherches générales. Pour cet effet concevons deux fils de 275 lignes de longueur chacun, chargés l'un d'un poids A de 16 & l'autre d'un poids B de 9 demi-onces. Suspendons le premier de ces pendules par le bout du fil & attachons le bout de l'autre fil au poids A. Ecartons le poids ſupérieur A de la ligne verticale tirée en idée par le point de ſuſpenſion, de façon qu'il en ſoit éloigné de 48 lignes à gauche, pendant que l'autre corps B pend librement; & ſi nous laiſſons échapper le corps A, il commencera à faire des oſcillations & ſon mouvement ſe communiquera à l'inſtant à l'autre corps B de maniere qu'il fera une oſcillation pendant que le corps ſupérieur A en a fait deux;

& après deux ſecondes de temps écoulées depuis le commencement du mouvement, les deux corps A & B auront repris leur premiere place à gauche de la verticale à 48 lignes de diſtance. La table ſuivante, dont la premiere colonne marque le temps & la ſeconde & troiſieme la diſtance des corps A & B de la ligne verticale, ſervira à donner une idée plus claire de ces mouvemens ſinguliers

| Temps Part de ſec. | Diſtances de la verticale | |
|---|---|---|
| | du corps A. | du corps B. |
| 0 | 48''' à gauche. | 48''' à gauche. |
| $\frac{1}{2}$ | 24 à droite. | 16 à gauche. |
| $\frac{7}{12}$ | 7 à droite. | $2\frac{7}{16}$ à droite. |
| 1 | 0 | 30 à droite. |
| $\frac{3}{2}$ | 4 à droite. | 16 à gauche |
| 2 | 48 à gauche. | 48 à gauche. |

En changeant entr'eux les corps de ce pendule composé, de maniere que B ſoit en haut & A en bas, la longueur des fils reſtans la même, ſi nous écartons le corps B de la verticale à gauche à la diſtance de 48 lignes pendant que A pend librement, & que nous laiſſons échapper le corps B (au moment où tout eſt en repos) ce corps B fera trois oſcillations dans le même temps que le corps A en a fait une. En partageant le temps d'une oſcillation du corps B en trois époques, la table ſuivante fera voir le mouvement des deux corps pour deux oſcillations complettes.

| Tiers d'oſcillation. | Diſtance de la verticale | |
|---|---|---|
| | du corps B. | du corps A. |
| 0 | 48''' à gauche. | 48''' à gauche. |
| $\frac{1}{3}$ | 12 à droite. | 33 à gauche. |
| $\frac{2}{3}$ | 12 à gauche. | 33 à droite. |
| $\frac{3}{3}$ | 48 à droite. | 48 à droite. |
| $\frac{4}{3}$ | 12 à gauche. | 33 à droite. |
| $\frac{5}{3}$ | 12 à droite. | 33 à gauche. |
| $\frac{6}{3}$ | 48 à gauche. | 48 à gauche. |

C'eſt de ces mouvemens très-irreguliers en apparence dans une infinité de cas, mais où l'on ne laiſſe pas d'appercevoir un ordre admirable, que feu M. Daniel Bernoulli avoit déterminé les loix générales pour des poids, des fils & une poſition initiale quelconques, dans un mémoire qu'on trouve au volume XIX des nouveaux Commentaires & qui a pour titre: *De motibus reciprocis multifariis nondum exploratis qui in pendulis bimembribus locum habere poſſint, &c.* & il s'étoit ſervi pour cet effet de ſon principe de la coëxiſtence des vibrations ſimples non-dérangées dans le ſyſtème composé; principe que M. Bernoulli avoit démontré dans les mémoires de l'Académie de Berlin & qu'il a cru fournir le ſeul moyen de reſoudre le problème en queſtion.

L'Auteur de ce mémoire a voulu eſſayer ſi, ſans recourir au principe de M. Bernoulli, les ſeuls premiers principes de Méchanique ſuffiſoient pour déterminer les loix de ces mouvemens remarquables. Il déduit toute la ſolution du Problème général, des quatre équations différentielles du ſecond degré que fournit le rapport entre les accélerations & les forces ſollicitan-

tantes & tous ſes reſultats s'accordent parfaitement avec ceux de feu M. Bernoulli.

M. Bernoulli avoit ſurtout ſouhaité que, pour la confirmation de ſes principes l'on ſoûmit aux expériences les cas particuliers qu'il avoit conſidérés & qui ſont les mêmes que M. Fuſs a calculés, & dont il a été fait mention au commencement de cet extrait.

L'Auteur de ce mémoire a fait de pareilles expériences; & leur frappant accord avec la Théorie la confirmeroit, ſi elle avoit beſoin de confirmation après le parfait accord des reſultats fournis par deux méthodes entiérement différentes, mais fondées ſur les loix les mieux établies de la Méchanique.

## IV.
## Additiones analyticae ad diſſertationem de motu penduli bifili.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 203.

Les cas particuliers traités dans le mémoire précédent ont fait voir, que ſi les fils ſont égaux & les corps A & B dans le rapport 16 à 9, le cops A, étant le ſupérieur, fait deux oſcillations pendant que B n'en fait qu'une; & qu'en changeant l'ordre des corps, le corps ſupérieur B fait trois oſcillations dans le temps que l'autre corps A a employé à oſciller une fois. Dans ces deux cas le mouvement eſt donc aſſez ſimple; mais il y a d'autres cas où les temps des oſcillations ſont dans un rapport plus compliqué & par conſéquent la réciprocation du mouvement plus difficile à appercevoir. Ceci donne à l'Auteur l'occaſion d'ajouter à ſon mémoire précédent quelques additions

ditions analytiques, par leſquelles il n'a pas voulu interrompre le cours de ſes recherches phyſico-mathématiques.

Le premier problème qu'il traite, c'eſt de trouver, pour une longueur des fils quelconque $a$ & $b$, le rapport des poids A & B tel, que les longueurs des pendules ſimples iſochrones $k$ & $k'$ ſoyent dans un rapport donné $\alpha:\beta$, & il trouve

$$\frac{B}{A} = \frac{ab(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta(a+b)^2}{\alpha\beta(a+b)^2},$$

expreſſion qui, puiſqu'elle reſte la même, quoiqu'on y change entre elles les lettres $a$ & $b$, $\alpha$ & $\beta$, fait voir que le rapport entre les poids reſte le même, ſoit qu'on y change les fils ſoit qu'on change entre eux les temps des oſcillations. Une autre conſéquence non moins remarquable, tirée de la ſolution de ce Problème, c'eſt que, ſi dans le pendule composé le rapport des temps des oſcillations eſt $\mu:\nu$, en changeant les corps entre eux, le rapport des temps d'une oſcillation ſera $\mu+\nu:\mu-\nu$; c'eſt à dire que le corps ſupérieur fera $\mu+\nu$ oſcillations pendant que l'inférieur en a fait $\mu-\nu$.

Le ſecond Problème enſeigne à trouver pour des poids A & B donnés, la longueur des fils $a$ & $b$ telle, que les longueurs $k$ & $k'$ des pendules ſimples iſochrones ſoyent dans un rapport donné $\alpha:\beta$; où l'Auteur trouve $\frac{a}{b} = m - 1 \pm \sqrt{mm - 2m}$, où il faut que $m = \frac{(\alpha+\beta)^2 A}{2\alpha\beta(A+B)} > 2$, ou bien $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2\alpha\beta}} > \sqrt{\frac{A+B}{A}}$, ſans quoi le Problème eſt impoſſible. Le même Problème fournit auſſi les conditions qui doivent avoir lieu pour les temps des oſcillations, en ſuppoſant les corps égaux; car on trouve que pour ce cas des corps A & B égaux il n'y a point de rapport entre les temps des oſcillations, ſi non hors des limites $\sqrt{(3+\sqrt{8})}$ & $\sqrt{(3-\sqrt{8})}$. Si les corps & les fils ſont égaux, le

le corps ſupérieur fera deux oſcillations & demie pendant que l'autre corps en a fait une ſeule.

Dans le troiſieme Problème dont on trouve ici la Solution, l'Auteur s'occupe à déterminer les conditions des fils qui rendent la longueur du pendule ſimple iſochrone rationelle; & il finit ces recherches par démontrer, que ſi les corps ſont égaux, il eſt impoſſible de déterminer les fils *a* & *b* de façon que le rapport des temps d'oſcillation devienne rationel.

## V.

## Sur le mouvement gyratoire d'un corps attaché à un fil extenſible.

Par M. *Jacques Bernoulli*, pag. 213.

Dans ce mémoire l'Auteur cherche le mouvement, que doit avoir un corps attaché à un fil, par le moyen duquel il ſe meut autour d'un centre fixe, en ſuppoſant que le fil ſoit ſuſceptible d'une très petite extenſion, proportionelle, telle que l'expérience l'atteſte, à la force qui le tend. Il ſe borne ici au cas le plus ſimple, quand le choc initial & le mouvement ſe font ſans frottement ſur un plan horizontal, âfin qu'on puiſſe faire abſtraction de la gravité, & que la courbe décrite par le corps ne puiſſe pas appartenir à la claſſe de celles à double courbure. Dans la ſuite il ſe propoſe de donner ſes recherches ultérieures ſur cette matière.

La ſuppoſition qu'il fait, qu'une force finie ne puiſſe produire qu'une extenſion regardée comme infiniment-petite, eſt, comme l'Auteur remarque, d'accord avec celle, que les

Géomètres ſe permettent, en traitant de la vibration des cordes. Il prouve enſuite d'après cette ſuppoſition, qu'afin que le fil ne ſe rompe pas il eſt néceſſaire, que le choc initial ſe faſſe dans une direction perpendiculaire ou presque perpendiculaire au fil étendu dans toute ſa longueur. Que par la même raiſon la viteſſe du corps dans la direction du fil ou du rayon vecteur doit toûjours reſter infiniment-petite, & par-là, que les extenſions produites dans le fil, & qu'il nomme $z$, ſont toûjours infiniment plus petites, que les angles décrits dans le même tems autour du centre, & qu'il appelle $\omega$. Il prouve de même, que ces ſuppoſitions ne permettent pas, qu'il ſe faſſe jamais une perturbation ſenſible dans la viteſſe gyratoire du corps, qui par conſéquent peut être regardée comme conſtante. Après ces propoſitions préliminaires l'Auteur paſſe à l'équation différentio-différentielle, qui renferme le rapport entre les extenſions produites dans le fil & les forces, qui agiſſent pour les produire; & en rejettant les termes, que ſes ſuppoſitions lui permettent de négliger, comme infiniment plus petits que les autres, il parvient avec facilité à toutes les deux intégrations. Il cherche enſuite l'expreſſion générale de la viteſſe produite dans la direction du fil, & le calcul lui fournit une remarque aſſés curieuſe, & paradoxe au premier coup d'oeïl, c'eſt que, quoique $z$ ſoit à $\omega$, & $\partial z$ à $\partial \omega$, dans un rapport infiniment-petit, $\partial \partial z$ néanmoins ſera à $\partial \omega^2$ dans un rapport fini.

L'Auteur examine enfin de plus près la nature de la courbe, dont il a trouvé l'équation; & il montre, que c'eſt une cycloïde, ou plutôt une épicycloïde infiniment allongée, dont le cercle immobile a un rayon fini, qui eſt à celui du cercle mobile comme $\infty : 1$. Il fait voir enſuite, que le corps dans

dans chaque tems fini parcourra une infinité d'épicycloïdes égales & à baſes infiniment-petites mais infiniment-plus grandes néanmoins que les ordonnées, c'eſt-à-dire dans le rapport de $\sqrt{\infty} : 1$; il cherche la valeur de la baſe de chaque épicycloïde, & les conditions, ſous leſquelles le corps après un certain nombre de tours reviendra à parcourir les mêmes épicycloïdes, qu'il avoit déja décrites. L'Auteur paſſe delà à conſidérer les plus grandes & les plus petites ordonnées, & il remarque, que celles-ci ne peuvent jamais être plus petites que o ou négatives, parceque la force élaſtique du fil, ſur laquelle le calcul repoſe, devient généralement $= 0$, dés que les ordonnées ceſſent d'être affirmatives; & que la formule, qu'on a priſe pour cette force, ne peut plus alors convenir au calcul, qu'on a bati deſſus. Ceci lui fournit l'occaſion d'indiquer une des bornes, entre leſquelles une des conſtantes arbitraires, introduites par la double intégration, doit néceſſairement être renfermée. Après avoir indiqué les points & la valeur des plus grandes viteſſes du corps ſelon la direction du fil, l'Auteur examine de près la formule du rayon oſculateur, & il trouve l'autre borne pour la conſtante, dont on vient de parler, par la condition, que ce rayon ne peut pas devenir imaginaire. Il fait voir, qu'en ſuppoſant au commencement du mouvement au fil une extenſion, & au corps une viteſſe données, l'épicycloïde peut s'allonger au point de devenir un cercle parfait, parcequ'alors la force centrifuge du corps ſera en équilibre avec la force reſſerrante du fil. L'Auteur recherche auſſi les limites les plus étendues, que puiſſe avoir le rayon oſculateur; il montre, qu'elles donnent toutes deux des valeurs poſitives, & il conclut delà, que l'epicycloide n'a pas de point d'infléxion, & tourne toute ſa concavité vers le centre: ce qui forme une courbe reſſemblante à celle que décrit la Lune, tout en accompagnant

la Terre autour du Soleil. Après avoir montré encore, comment pour chaque viteſſe & direction initiales du corps, & pour chaque extenſion initiale du fil, on doit déterminer les conſtantes, qui ſe trouvent dans les formules, il finit par l'application à un exemple en nombres, où les réſultats ſont aſſés conformes à la Théorie générale, quoiqu'on ſoit obligé de ſe contenter de quantités relativement fort petites au lieu de celles, qu'on avoit ſuppoſées infiniment-petites dans le calcul.

---

CLASSE

# CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

De ordine fibrarum muſcularium cordis. Diſſertatio quinta, de actione fibrarum externarum ventriculi ſiniſtri. Pag. 231.

II.

Explicatio trium tabularum anatomicarum, ad quinque priores Diſſertationes: de ordine fibrarum cordis, (quibus de fibris tractatur ventriculorum externis), pertinentium. Pag. 260.

Auctore *C. F. Wolff.*

Une expoſition exacte des fibres du coeur a toujours été régardée en Anatomie comme une choſe des plus difficiles & presque impoſſible, tant à cauſe de l'extrême complication de ces fibres & de leur ſubtilité, que par beaucoup d'autres difficultés, que l'Auteur a expoſées dans la première de ces diſſertations ſur la diſpoſition des fibres du coeur: (voyez les Actes académiques pour l'année 1780, Partie 2^de^. pag. 197 & 203.) C'eſt après beaucoup de peines & des eſſais ſans ſuccès qu'il a enfin acquis l'addreſſe de manier ces fibres, enſorte qu'il a pu les développer comme il faut, pour les obſerver diſtinctement & les deſſiner.

Dans la premiere diſſertation il a décrit la propre figure du coeur, quand il eſt dégagé de la peau & de la graiſſe, qui l'enveloppent & en cachent pluſieurs parties remarquables & eſſentielles, lesquelles ont été auſſi inconnues que la ſtru-

ſture des fibres mêmes. Sa ſeconde diſſertation traite de quatre fils cartilagineux, qui ſe trouvent à la baſe du coeur & qui donnent un appui ferme à la plus grande partie des fibres, pour y prendre leur origine ou pour s'y inſérer. Dans la troiſieme diſſertation ſe trouve expliquée la ſtructure des fibres externes du ventricule droit, ainſi que leur action particuliere dans la contraction du coeur. Dans la quatrieme l'Auteur donne la déſcription des fibres externes du ventricule gauche: & c'eſt dans celle-ci enfin, qu'il explique leur action.

Les anatomiſtes convenoient facilement, que le coeur, dans ſon état de ſyſtole, pour exprimer le ſang, contenu dans les ventricules, ſe contractoit en largeur; mais, n'ayant pas trouvé des fibres longitudinales, ils n'étoient point d'accord, ſi en même temps il ſe contractoit auſſi en longueur, c'eſt à dire, ſi le coeur, en ſe contractant, devenoit en même temps & plus étroit, & plus court? Pluſieurs, comme feu M. *Haller*, étoient pour l'affirmative. D'autres, en s'appuyant ſur l'autorité de *Véſalius*, qui avoit établi le contraire, ou en ſe fiant à leur propre anatomie du coeur, (qui certainement n'étoit pas bien exacte), le nioient enſorte, qu'ils ſoutenoient, qu'en ſe contractant en largeur le coeur exerçoit cette action avec une telle force, que la pointe en étoit plutôt repouſſée de la baſe, & que par conſéquent le coeur dans ſa ſyſtole devenoit plus long, qu'il n'avoit été dans ſon état de répos. D'autres enfin, tenant le milieu entre ces diverſes opinions, croyoient, que la pointe du coeur dans ſon action ni ne s'éloignoit de la baſe, ni ne s'en approchoit, & que l'action du coeur conſiſtoit dans la ſimple contraction en largeur.

Dans la diſſertation précédente l'Auteur a trouvé les fibres externes du ventricule gauche diviſés en quatre claſſes, dont

dont la ſeconde contient les fibres les plus fortes dans tout le coeur par leur épaiſſeur & par les fréquentes anaſtomoſes, dont elles ſont jointes enſemble. Ces fibres ne ſont pas exactement longitudinales, mais c'eſt très peu, qu'elles s'écartent de cette direction. Elles prennent leur origine à la baſe dans la ſurface ſupérieure du ventricule, & finiſſent à la pointe dans l'inférieure. Il faut donc néceſſairement, qu'elles attirent la pointe vers la baſe, quoique ce ſoit un peu obliquement, & qu'elles racourciſſent par conſequent le coeur. Comme il y a auſſi entre les diverſes couches des fibres dans les deux ventricules plusieurs, qui ſont ou tout-à-fait longitudinales, ou qui s'en écartent peu; il n'y a point de doute, que le coeur dans ſon action ne ſe contracte pas auſſi bien en longueur qu'en largeur.

Mais parceque l'Auteur trouve, comme il eſt dit, qu'il y a diverſes claſſes, ou ordres de fibres, différentes à l'égard de leur origine, de leur direction & inſertion; toutes ces fibres externes du ventricule gauche n'agiſſent pas d'une même maniere, & il y a dans cette contraction totale du ventricule beaucoup de particularités, qu'on remarque très bien dans les actions des muſcles du bras, du femur, ou des doigts, & qui par conſéquent ne doivent pas être négligées dans le premier muſcle du corps humain.

Ainſi le premier ordre des fibres attire la partie inférieure de la baſe du ſinus gauche, ainſi que la même partie de l'orifice veineux, obliquement vers la pointe du coeur & le bord inférieur de la cloiſon. Par cette action les valvules de cet orifice, pouſſées contre le ſang, contenu dans le ventricule, ſont repliées d'une part, & renferment l'orifice; de l'autre part elles preſſent le ſang vers la partie artérieuſe du ventricule & vers l'aorte; le ſinus, ou l'oreillette gauche change ſa ſituation & ſa figure, & l'orifice veineux, ou auriculaire, n'eſt plus,

comme

comme dans l'état du repos, dirigé vers la pointe, mais bien vers la partie ſupérieure ou artérieuſe du ventricule.

Le ſecond ordre des fibres externes peut être conſidéré comme le muſcle proprement deſtiné au racourciſſement du ventricule gauche, & même du coeur; entant que ce ventricule eſt plus long que le droit, & qu'étant racourci tout le coeur diminue de longueur. Mais une autre particularité remarquable dans l'action de ce muſcle eſt, que toute la tuberoſité à la baſe du ventricule & même la courbure du bord de celui-ci qui change en ligne droite, évanouïſſent par cette action, & que par conſéquent tout le ventricule prend une autre figure, qu'il n'a eu dans ſon état de repos.

Le troiſieme ordre des fibres rend complette l'action du ſecond. Il produit preſque le même effet ſur la partie antérieure de la ſurface ſupérieure & du bord, que le ſecond avoit fait ſur la poſtérieure & plus grande partie de la même ſurface & du bord du ventricule. Mais l'ordre quatrieme, outre ce qu'il contribue à la contraction totale du ventricule, tire une certaine partie du bord du ventricule près de la pointe, que l'Auteur nomme le foyer des fibres rayonnées ſupérieures, obliquement vers le bord ſupérieur de la cloiſon & vers la baſe, de maniere que, comme il n'y a point de fibres dans la ſurface inférieure qui puiſſent tirer également le foyer de cette ſurface vers le bord inférieur de la cloiſon, d'autres portions de la ſurface inférieure ſuivent le mouvement du foyer & occupent ſa place dans le bord du ventricule, tandis que celui-là eſt tiré obliquement dans la ſurface ſupérieure vers le bord ſupérieur de la cloiſon & vers la baſe. C'eſt donc une eſpéce de rotation, que les fibres du quatrieme ordre exercent ſur le foyer & la partie voiſine du bord, & elles ne contribuent à la

la contraction totale du ventricule, qu'en ce, qu'elles diminuent la ſurface ſupérieure, qu'elles la rendent plus étroite dans leur région & un peu plus courte, tandis que la ſurface inférieure dans cette région près de la pointe eſt tirée pluſtôt par les fibres du ſecond ordre vers la baſe obliquement & vers le bord du ventricule.

Par ces diverſes actions des divers ordres de fibres externes la contraction totale du ventricule, qui en réſulte, n'eſt point une égale & ſimple contraction; c'eſt plutôt une eſpéce de torſion. La partie de la baſe, qui termine le bord du ventricule & la ſurface inférieure, eſt tirée obliquement vers la pointe & vers le bord inférieur de la cloiſon, pendant que la pointe ſe tire au contraire vers la baſe obliquement & vers le bord ſupérieur de la cloiſon. Mais pour en avoir une idée plus exacte & complette, il faut lire ce ſingulier mouvement du ventricule gauche, déduit de la direction de ſes fibres, dans la diſſertation même.

Cependant l'effet de cette action ſur le ſang, contenu dans le ventricule, n'eſt pas non plus une preſſion égale de toute part, comme elle le ſeroit ſi la contraction fut égale. Nous avons dit, que par le premier ordre des fibres la partie inférieure de l'orifice veineux & de la baſe du ſinus gauche ſont tirées en avant & vers la cloiſon, que par ce mouvement le ſang reçoit une preſſion obliquement dirigée vers la pointe, la cloiſon, & la ſurface ſupérieure, c'eſt-à-dire en avant du coté droit, & du deſſus. Or les fibres du ſecond ordre, & celles de l'ordre troiſieme tirent en même temps la partie de la pointe, ſituée à la ſurface inférieure, vers la partie de la baſe, ſituée à la ſurfaſe ſupérieure, & vers l'aorte; tandisque les fibres de l'ordre quatrieme tirent le foyer & la partie de

la pointe, ſituée à la ſurface ſupérieure, obliquement vers la baſe & le bord ſupérieur de la cloiſon. Par ces mouvemens le ſang contenu dans le ventricule, obtient une impreſſion, dirigée obliquement vers la partie ſupérieure de la baſe & le bord ſupérieur de la cloiſon, c'eſt-a-dire en arrière, au desſûs, & du coté droit, ou ce qui eſt la même choſe, directement vers l'orifice de l'aorte. Ainſi par les deux preſſions, faites en même temps ſur le ſang, dont le ventricule eſt tout rempli, le ſang ſe meut en même temps de l'orifice veineux & de la partie inférieure, c'eſt-a-dire veineuſe, du ventricule vers ſa partie ſupérieure, ou artérieuſe, & de celle-ci vers l'orifice de l'aorte. On voit, que dans cet arrangement des forces impulſives rien de ces forces ne ſe perd en vainquant les réſiſtances ou en ſe détruiſant mutuellement, ce qui certainement auroit lieu, ſi de toute part, comme on a crû, le ventricule ſe contractoit également, & que le ſang, preſſé de toute part, ne s'échappoit par l'orifice de l'aorte, que parce qu'il y trouvoit la moindre réſiſtance; ce qui ſeroit pourtant encore une grande queſtion.

L'Auteur déduit de ſes obſervations ſur la ſtructure du coeur pluſieurs remarques curieuſes ſur la nature des deux ventricules, qu'il ſeroit trop long de rapporter. Il-y-a plus de différence qu'on n'auroit crû, entre le ventricule droit & le gauche, & on voit évidemment dans leur ſtructure, que celui-là ne peut avoir été produit, que lorſque celui-ci, après avoir déja exiſté quelque temps, ait conçu quelque degré de conſiſtance ou de fermété. C'eſt une tout autre eſpèce de coeur. Auſſi le ventricule droit eſt-il le coeur propre pour les poumons, tandis que le gauche l'eſt pour la tête, le tronc & les extrémités du corps. Et quoique la veine-porte paroiſſe être différente d'un ventricule de coeur, elle n'eſt pas pour cela moins certainement le troiſieme coeur, propre pour le foye & le canal des inteſtins.

III.

## III.

## Réflexions ſur l'ancienneté rélative des roches & des couches terreuſes qui compoſent la croute du globe terreſtre.

### Seconde Section.

Par M. *J. J. Ferber.* Pag. 297.

Dans la 1re Section (rapportée dans les Actes de l'Académie pour l'année 1782. 2e. partie) l'auteur établit, que les révolutions que le globe terreſtre a éprouvées dans ſon enfance, ne pouvant être connues par aucun monument hiſtorique, il n'y-a qu'un ſeul moien de juger de ces viciſſitudes, c'eſt d'examiner l'état actuel de la croute pierreuſe qui l'enveloppe de toutes parts comme une cuiraſſe.

Les montagnes portent des traces qui atteſtent qu'il a été un temps, où la mer couvroit leurs ſommets les plus élevés; mais la retraite de ſes eaux a été lente; c'eſt ce que démontrent les couches de corps marins réguliérement ſtratifiés, & les ſillons tracés horizontalement ſur les flancs eſcarpés des rochers.

Ces montagnes ſont compoſées de diverſes roches de nature très differente, qui obſervent entre-elles un ordre conſtant, & dont la ſituation reſpective démontre qu'elles ne ſont pas d'une égale ancienneté.

Si l'on quitte le païs plat, on monte d'abord ſur des collines calcaires, riches en pétrifications marines: plus haut, ſont encore des roches calcaires, mais presque dénuées de ces pétrifications. Viennent enſuite des montagnes d'une hauteur moien-

moienne, compoſées de ſchiſte & d'autres roches argilleuſes. Enfin le granite occupe la partie centrale & la plus élevée des chaines de montagnes.

Si l'on creuſe dans les lieux bas, l'on obſerve cette même ſucceſſion, qui prouve qu'il-y-a eu pluſieurs époques dans la formation des différentes montagnes: car ſi les diverſes ſubſtances qui entrent dans leur compoſition euſſent été depoſées dans le même temps, elles l'auroient été, ou confuſément, ou ſuivant leur péſanteur ſpécifique: or, ni l'un ni l'aútre n'eſt arrivé, d'où il faut conclure que les différentes bandes des hautes montagnes ne ſont pas d'une formation ſimultanée, mais ſucceſſive, & après des intervalles conſidérables. Et que le granite, qui ſert de baſe à toutes les autres roches, eſt la ſeule qui mérite le nom de roche *primitive*.

Dans la ſeconde Section (qui a été luë à la Séance du 16 Janv. 1786.) M. Ferber établit que ce ſont les dégradations & les éboulemens des montagnes les plus élevées, qui ont ſervi à former les autres; & il obſerve que ces éboulemens ont dû être bien plus fréquens & bien plus conſidérables dans les ſiecles reculés, où les montagnes étoient de beaucoup plus hautes qu'aujourd'hui.

M. Ferber diſcute trois opinions différentes ſur la formation du ſchiſte primitif. Quelques auteurs, dit-il, prétendent que ce ſchiſte eſt formé en même temps, & par le même évenément que le granite; mais ce ſentiment ne ſauroit s'admettre, attendu qu'en général le ſchiſte recouvre le granite & s'adoſſe ſur lui; & parceque d'ailleurs il ſeroit inconcevable que la même maſſe eut formé ici des chaines de granite de pluſieurs centaines de lieuës, & là des chaines de ſchiſte de pareil-

pareille étendue. S'il-y-a quelques altérations locales, quelques mélanges accidentels du granite & du ſchiſte, on ne peut guères les obſerver que dans des eſpaces de quelques toiſes; mais il n'eſt ni concevable ni prouvé qu'une chaine de montagnes de pluſieurs centaines de lieues ſoit, dans la même ligne horizontale, mi-grantique & mi-ſchiſteuſe. Et il eſt au contraire vérifié, par des obſervations nombreuſes, que le ſchiſte s'appuie conſtamment ſur le granite; d'où il faut conclure que le ſchiſte eſt d'une formation poſtérieure.

La ſeconde maniere d'expliquer la formation du ſchiſte, eſt de dire qu'il étoit dans un état de moleſſe & de fluidité, lorsqu'il s'appliquoit ſur les roches granitiques: que les eaux du cahos ayent premierement dépoſé le granite, ont dépoſé enſuite le ſchiſte, comme un réſidu, une eau-mère de la cryſtalliſation.

Enfin le troiſiéme ſentiment qui paroit le plus probable à l'auteur, c'eſt que le ſchiſte a été formé des débris des montagnes granitiques, qui ſe trouvant plus ou moins argillifiés, ſe délaioient dans les eaux de l'ancien Océan & ſe dépoſoient ſucceſſivement au pied, ſur les flancs, & même en quelques endroits, ſur les cimes des montagnes granitiques.

Cette hypothèſe explique l'origine de ces maſſes de granite qui ſe trouvent dans l'intérieur du gneiſs ou du ſchiſte: car, ou ces maſſes étoient déja écroulées lorsque les dépôts ſchiſteux les ont recouvertes, ou bien elles ſe ſont détachées des ſommets, lorsque les dépôts argilleux étoient encore dans un état de moleſſe qui leur a permis de s'y enfoncer. Et ſi enfin la matiere ſchiſteuſe avoit déja acquis une conſiſtance ſolide, alors les maſſes de granite ſont reſtées au deſſus du

 ſchi-

ſchiſte; mais on voit bien que ce n'eſt pas là leur lieu natal, leur place originaire.

On doit dire la même choſe des montagnes ſchiſteuſes à l'égard des calcaires: Ces montagnes argilleuſes étant ſujettes aux mêmes viciſſitudes que les montagnes de granite, & aiant de même éprouvé l'action des météores, ſurtout lorsqu'elles avoient encore toute leur élévation primitive, il a dû s'en détacher des maſſes & des pics entiers, qui venant à tomber ſur les matieres calcaires inférieures, ont été enſevelis dans leur ſein, ſi ces matieres ſe dépoſoient encore; ou ſe ſont arretés ſur leur dos, ſi elles étoient déja formées.

M. Ferber paſſe enſuite à une autre explication du granite qui ſe trouve dans le ſchiſte. Ce granite n'eſt pas primitif, mais de ſeconde formation. Les débris du granite primitif aiant été réduits en gravier, en ſable, en pouſſiere, par les viciſſitudes de l'Atmosphère, ſi des lavanges de ces détrimens de granite ont découlé des cimes des montagnes, elles ont pu former des amas ou des couches granitiques dans les fiſſures du ſchiſte, & même des roches calcaires. Et les élémens du granite aiant été de nouveau diſſous, par le moien de l'eau & de l'air fixe, ils ont éprouvé une nouvelle cryſtalliſation qui les fait reſſembler au granite primitif. La même choſe eſt arrivée aux détrimens des roches calcaires, qui ſe ſont logés dans les fiſſures des montagnes ſchiſteuſes, où ils ont formé, au moien de cette cryſtalliſation confuſe, les marbres ſalins qu'on exploite aujourd'hui.

Quelques obſervateurs ſe ſont crûs fondés à conclure que le ſchiſte eſt auſſi ancien que le granite, d'après un fait qu'on a remarqué quelquefois, quoique très rarement: c'eſt qu'un filon

filon métallique, après avoir traverſé toute l'épaiſſeur du ſchiſte, ſe prolonge encore dans le granite même. Mais cette preuve n'a de poids qu'au premier coup d'oeil; il eſt certain en effet, que la formation des filons eſt poſtérieure à celle des roches qui les contiennent; & quelle que ſoit la cauſe qui les a produits, elle a pû agir de la même maniere, & ſur le ſchiſte & ſur le granite. Si c'eſt quelque tremblement de terre, quelque afaiſſement de terrein qui ait produit des fiſſures qui ont été enſuite remplies par les matieres métalliques, ces fiſſures ont pu ſans doute s'étendre jusques dans le granite. Si l'on ſuppoſe, que ces fiſſures ſont l'effet de la retraite que la matiere des roches a priſe en ſe déſſéchant, il eſt très poſſible que cette retraite ait eu ſon effet ſur le granite même, quand il s'eſt trouvé n'avoir pas encore une conſiſtance parfaite.

Il-y-a des auteurs qui n'aiant eu occaſion d'obſerver que des montagnes calcaires ou ſchiſteuſes, ont paru douter que le granite ſerve partout de baſe aux autres roches; de même qu'on a conclu d'après les couches de Marly, de Boſerup, & d'Amſterdam, que dans pluſieurs endroits, le globe n'eſt compoſé que de terres déliées, depuis ſa ſurface jusqu'au centre. Mais comme on a toujours fini par trouver le granite, partout où l'on a creuſé à une profondeur ſuffiſante, il-y-a lieu de croire, que ſi on ne l'a pas découvert dans certains païs, c'eſt qu'on n'a pas pénétré aſſez avant.

Quant à la queſtion de ſavoir s'il-y-a quelqu'autre eſpéce de roche au-deſſous du granite: ce ne ſera qu'après avoir creuſé le puits de M. de Maupertuis que l'on pourra la réſoudre.

IV.

## IV.

# Diſquiſitio chemica ſubſtantiae cuiusdam ſalinae, quam Ruſſi fabricantur & Aurifabris ſub nomine Salarka vendunt.

Auctore *J. G. Georgi.* Pag. 323.

Les orfèvres de diverſes villes de la Ruſſie ſe ſervent déja depuis bien des années d'une ſubſtance ſaline qu'ils nomment Salarka: ils l'achetent des païſans & des revendeurs, à un prix fort bas, & ils l'emploient avec un grand profit pour la ſoudure, & même pour la fonte des raclures où elle tient lieu du Borax & de la Potaſſe, ſoit qu'on la prend ſeule, ou qu'on la méle avec un peu de Borax. Les païſans qui le fabriquent en font un ſecrét; cependant on a remarqué qu'ils ramaſſent avec ſoin, ce qui dans les ſavonneries dégoute par les chauderons & ſe durcit dans les cendres; & il paroit que c'eſt de cette maſſe, qu'on nomme Wiwarka, qu'ils font leur Salarka.

Cette ſubſtance telle qu'on l'achette chez les païſans, eſt en forme des pains, qui étant caſſés prouvent par leurs bandes qu'ils ont été formés dans des pots où la matiere encore fluide a été étendue par couches, à méſure qu'elle s'eſt conſolidée. Elle a le gout de leſſive & l'odeur de l'urine, elle éclate dans le feu, & laiſſe beaucoup des impurétés étant diſſous dans l'eau. L'Analyſe chymique donne à connoitre que cette ſubſtance ou le Salarka contient un véritable alcali végétal fixe, une partie de ſel commun, une terre viſqueuſe empyreumatique & ſouvent du ſable. Au reſte elle fond aiſement étant expoſée au feu, & elle devient alors plus blanche & moins impure.

Après

Après l'avoir ainſi analyſée, M. Géorgi paſſe aux expériences ſynthétiques, & parvient à compoſer un pareil ſel qui ne diffère du Salarka que par une plus grande pureté. Enfin il en conſtate l'uſage par l'emploi qu'il en fait dans diverſes fontes métalliques.

## V.
## Nova ſpecies Menthae deſcripta.

Auctore *J. Lepechin.* Pag. 336.

La nouvelle eſpece de Menthe, que l'Auteur décrit ici, croit dans les champs de Daurie: où elle a été découverte par M. Patrin, Correſpondant de l'Académie, pendant les voyages qu'il a faits dans cette région de la Sibérie. C'eſt auſſi après lui que M. Lepechin la nomme *Mentha Patrinii.* Au reſte cette menthe ſe diſtingue aiſément des autres du même genre, par ſes fleurs en forme d'épis, dont la figure ſe trouve exprimée ſur la VIII^me^ Planche.

## VI.
## Lina Hybrida.

Auctore *J. T. Koelreuter.* Pag. 339.

M. Koelreuter, Membre étranger de l'Académie à Carlsruhe, continue à communiquer les reſultats des expériences qu'il a faites en différens temps, avec une perſeverance bien rare, pour produire des plantes hybrides. C'eſt des mélanges de différentes eſpéces de Lins dont il eſt ici queſtion; mais quoique ces eſpéces ſoyent ſi reſſemblantes entr'elles pour les formes, les mélanges n'ont pas ſouvent réuſſi, & les métifs produits entre quelques eſpéces trés-voiſines ont été moins re-

marquables que ceux que nôtre Botaniſte avoit produits dans quelques autres genres de plantes, & dont il a ci-devant rendu compte dans les ouvrages de l'Académie. Les plantes que le lin de Sibérie, fécondé par la pouſſiére du lin d'Autriche, a produit de graines (*Expér. I.*) ont été les plus remarquables par leur grandeur, le nombre de leurs tiges & la multiplication de leurs racines; & il eſt curieux de voir que la fécondation inverſe (*Expér. VIII.*) du lin d'Autriche par le lin de Sibérie, n'aye pas réuſſi. M. Koelreuter remarque d'ailleurs, qu'il eſt très-difficile de faire réuſſir ſes expériences dans le genre des lins & qu'il faut s'y prendre de grand matin pour enlever les anthêres de fleurs qu'on ſe propoſe de féconder par la pouſſiére d'une autre eſpéce, ſi l'on veut être ſur que ces anthêres n'ont pas encore laché leur pouſſiére fécondante.

## VII.
## Piſcium nouae ſpecies deſcriptae.

Auctore *P. S. Pallas.* Pag. 347.

M. Pallas commence à fournir aux nouveaux Actes de l'Académie la déſcription détaillée & accompagnée de figures, des poiſſons remarquables qu'il a obſervés pendant ſes voyages. Le préſent mémoire en fait connoitre ſept eſpéces, dont deux ſont de la partie de l'Océan oriental qui baigne les îles Couriles, trois ſe trouvent dans les riviéres de la Sibérie orientale, & des deux autres l'un ſemble affecté au lac Baïcal & l'autre à la mer Caſpienne.

Les déſcriptions de ces poiſſons curieux ne ſont pas ſuſceptibles d'extraits. Le plus remarquable par ſes qualités naturelles eſt le *Callionymus baïcalenſis.* C'eſt un poiſſon ex-

trê-

trèmement molaſſe & tendre, preſque tout compoſé de graiſſe dont il a la couleur, & d'une forme aſſés ſinguliere, ſurtout pour la tête. Il ſe tient caché dans la plus grande profondeur du lac Baïcal qui eſt une eſpéce d'abyme rocailleux, dont les ſondes n'ont jamais atteint le fond. Auſſi les pêcheurs ne prennent jamais de ces poiſſons vivans dans leurs filets. Ce n'eſt que lorsque le lac vient à être agité par de fortes tempêtes accompagnées d'un bouillonnement violent qui ſemble avoir pour cauſe une éruption d'air par des conduits ſoûterreins, dans le plus profond du lac, que ces poiſſons ſurnagent morts en ſi grand nombre, qu'ils couvrent des grandes étendues de la ſurface du lac, & lorsque le vent chaſſe vers les plages de la côte méridionale, ces plages ſont couvertes de bancs de ces cadavres de poiſſons ſur pluſieurs lieues d'étendue. Les habitans viennent alors les recueillir pour en fondre la graiſſe qu'ils employent à différens uſages, & dont on vend une partie aux Chinois qui trafiquent ſur la frontière voiſine de Sélenginſk.

# CLASSE D'ASTRONOMIE.

## I.

## Obſervationes aſtronomicae Wologdae Anno 1785 habitae.

Auctore *P. Inochodzow*. Pag. 363.

M. Inochodzow examine d'abord ſon quart-de-cercle, & expoſe enſuite les hauteurs méridiennes du Soleil & des étoiles fixes, d'où il conclud la latitude géographique de la ville de Wologda de $59^d. 13'. 30''$. Quant à la longitude de cet endroit il n'a pu faire aucune obſervation, outre celles de quelques paſſages de la Lune par le méridien: mais connoiſſant la diſtance entre Jaroslawl & Wologda, ainſi que leur latitudes, il en reſulte que ces deux villes ſont ſituées très à peu près ſous le même méridien: c'eſt à dire que leur longitude géographique peut être eſtimée de $57^d. 50'$. La Déclinaiſon de l'aiguille aimantée a été trouvée en Juin 1785 de $3\frac{3}{4}$ à 4 degrés vers l'oueſt.

## II.

## De ſitu geographico vrbis Petroſawodsk deducto ex obſeruationibus aſtronomicis Anno 1785 inſtitutis.

Auctore *P. Inochodzow*. Pag. 367.

Les hauteurs méridiennes de diverſes étoiles fixes tant auſtrales que boréales lui donnent l'erreur de ſon quart-de-cercle

cle ſouſtractive de 3′. 15″ & la hauteur du Pole de 61$^{d}$. 47′. 11″: il détermine enſuite celle-ci par les hauteurs méridiennes du Soleil & la trouve de 61$^{d}$. 46′. 57″. La latitude géographique de Petroſawodsk pourra par conſéquent être eſtimée rondement, ſans erreur ſenſible, de 61$^{d}$. 47′. M. Inochodzow paſſe à la longitude de cet endroit, & expoſe neuf obſervations des eclipſes de ſatellites de Jupiter qui comparées avec les calculs des ephémérides & enſuite avec des obſervations correſpondantes faites à Marſeille & à Génève donnent pour la différence des méridiens entre Paris & Petroſawodsk 2$^{h}$. 8′. 14″ en temps, ou en arc 32$^{d}$. 3′. 30″. D'où notre obſervateur conclud la longitude géographique de Petroſawodsk 52$^{d}$. 3′. 30″. Enfin la Déclinaiſon de l'aiguille aimantée a été en Octobre 1785 de 5$^{d}$. 9′ vers l'oueſt.

## III.
## Commentatio de tranſitu Mercurii per diſcum Solis anno 1786 du $\frac{23}{4}$ $\frac{Apr.}{Maii}$ tempore ciuili Petropoli obſeruato.

Auctore *Stephano Rumovski*. Pag. 376.

Quoique tous les paſſages de Mercure devant le disque du Soleil appartiennent à bon droit aux phénomènes rares, celui dont il eſt queſtion ici l'emporte encore de beaucoup ſur ceux qui ont été obſervés jusqu'ici. Car depuis que les Aſtronomes ont commencé à pourſuivre les aſtres dans leur mouvemens avec des inſtrumens meilleurs qu'ils n'ont eu aux ſiecles paſſés, le préſent paſſage n'eſt ſeulement que le quatrieme dans l'ordre de ceux qui ont été obſervés dans le noeud deſcendant. Le premier de cette eſpèce ayant été obſervé en 1661 par Hevélius à Danzig, le ſecond en 1740 par Wintrop à Cambridge & le troiſieme en 1743 dans toute l'Europe.

Le Soleil ayant été trop près de l'horizon, M. Roumovski n'a pas pu obſerver avec la même préciſion le contact interne des bords du Soleil & de Mercure à l'entrée de la planète, qu'il l'a fait à ſa ſortie. Toutefois ſon obſervation peut paſſer pour complette, parcequ'il a méſuré pendant la durée du paſſage, & à diverſes repriſes avec un bon micrometre objectif adapté à une lunette achromatique de 3 pieds, le diamètre de Mercure, ainſi que pluſieurs diſtances de ſes bords à ceux du Soleil, ce qui compenſe ſuffiſamment le défaut d'une obſervation exacte à l'entrée. Car étant donnés le diamètre du Soleil, & celui de la planète que M. Roumovski eſtime être contenu entre les limites 7″, 56 & 8″, 64, avec la parallaxe du Soleil qui pour le temps de l'obſervation eſt de 8″, 5, il trouve pour chaque diſtance obſervée des bords, la diſtance vraïe des centres: de maniere que chaque obſervation faite avant le milieu du paſſage, peut tenir lieu de l'obſervation du contact intérieur à l'entrée. Ainſi en combinant une telle obſervation ſoit avec le contact intérieur à la ſortie, où la diſtance des centres eſt égale à la différence des demi-diamètres, ſoit avec une ſemblable obſervation faite après le milieu du paſſage, on obtient la plus courte diſtance des centres du Soleil & de Mercure avec le moment du paſſage de la planète par le milieu de la corde qu'elle parcourt ſur le disque du Soleil.

Pour déterminer donc avec préciſion ces deux élémens, M. Roumovski combine les ſix premieres obſervations faites avant le milieu du paſſage, c'eſt à dire celles qui ſont le plus proches de l'entrée, avec les ſix dernieres; qui ſont les plus proches de la ſortie, ainſi qu'avec le contact interne des deux bords obſervé à la ſortie même: & il en obtient pour la diſtance la plus courte des centres, 42 déterminations qui ne diffèrent entre elles que de 2″, 8, & autant pour le milieu du paſſage,

ſage, dont la différence ne va pas au delà de $1'\frac{1}{3}$; de ſorte qu'il en conclud avec une grande certitude la plus courte diſtance des centres du Soleil & de Mercure $11'. 32'', 5$ & le milieu du paſſage pour le méridien de St. Pétersbourg à $19^h. 45'. 6''$.

Ces élémens ayant été trouvés, M. Roumovski en déduit le temps vrai de la conjonction pour le même méridien le $\frac{22 \text{ Avril}}{3 \text{ Mai}}$ à $19^h. 14'. 2''$; la latitude géocentrique de la planète étant $11'. 43'', 1$ B: & comme les Tables de M. de la Lande donnent pour ce temps, la longitude géocentrique de Mercure $1^s. 13^d. 46'. 45'', 9$ & ſa latitude $11'. 20'', 8$, la longitude du Soleil étant au même moment $1^s. 13^d. 50'. 2'', 9$, il conclud que l'erreur des tables ſusdites eſt ſouſtractive de $3'. 17''$ en longitude & de $23''$ en latitude ſans avoir égard à l'aberration.

Nous renvoyons à la diſſertation les perſonnes qui voudroient apprécier elles mêmes les obſervations, ſur lesquelles ces reſultats ſont fondés: mais nous ne pouvons pas paſſer ſous ſilence ce que l'Auteur discute ſur le lieu du noeud, & ſon mouvement annuel. En établiſſant l'inclinaiſon de l'orbite de Mercure à l'eccliptique de $6^d. 59'. 30''$, il deduit de ſon obſervation & pour le temps qu'elle a été faite, le lieu du noeud aſcendant $1^s. 15^d. 48'. 46''$, qui ſurpaſſe de $16''$ celui qu'on trouve par les tables $1^s. 15^d. 48'. 30''$, & qui comparé avec le lieu de ce noeud déterminé par le paſſage de l'année 1753, donne un mouvement annuel de $46''$. Mais ſi l'on ſuppoſe l'inclinaiſon de l'orbite de Mercure être de $7^d$. la longitude du noeud eſt trouvée $1^s. 15^d. 48'. 22''$ & ſon mouvement annuel $45'', 2$; ce qui s'accorde admirablement bien avec la détermination de M. de la Lande.

IV.

## IV.

## Sur la ſurface géométrique de la Ruſſie ſelon la nouvelle carte générale de cet Empire publiée par l'Académie:

Par M. *Krafft.* Pag. 389.

L'Auteur dans un mémoire inſéré dans les Actes Académiques pour le premier ſemeſtre de l'année 1782, a donné un tableau raiſonné d'une ſuite des tables de mortalité & de fecondité de la ville de St. Péterbourg, dans l'intention de démontrer par la rédaction & par l'emploi de ces tables pour une ſeule ville, de quelle importance & utilité il ſeroit pour la Ruſſie, s'il y eût un établiſſement formel & général de pareilles tables, qui embraſſaſſent des Gouvernemens entiers de l'Empire. Dans la ſuite de ce travail il lui a fallu faire un parallele préliminaire des ſurfaces géometriques des Provinces de la Ruſſie, vûque la grandeur & le rapport de ces ſurfaces, eû égard à la différence du climat & du terrein, entrent eſſentiellement dans l'appréciation de leurs populations *réelles* & *poſſibles*. Engagé par cette occaſion dans ces ſortes de calcul, l'Auteur ſe propoſe dans le mémoire préſent d'évaluer avec autant de préciſion, que permet la nature de l'objet, la ſurface géometrique de la Ruſſie en général; mais il a en cela pour but principal, de donner à ce calcul un tel arrangement, qu'il ſoit aiſé dans la ſuite d'en faire l'application à une contrée particuliere quelconque de l'Empire, de laquelle il importera à connoitre la ſurface géometrique ſous quelque point de vûe de Géographie phyſique, mathématique ou politique. Pour cet effet il cherche d'abord une expreſſion générale de la ſurface géometrique d'une bande quelconque du Sphéroïde terreſtre compriſe entre deux paralleles quelconques, & il l'applique à la

la conſtruction d'une table, qui donne en rayons quarrés de l'équateur les ſurfaces de ces bandes de demi en demi-degré de latitude géographique.

Dans l'application de ce calcul à la Ruſſie il met pour baſe la nouvelle carte générale de cet Empire publiée par l'Académie l'an 1786. Il en tire une table étendue depuis le 42$^{me}$ jusqu'au 78$^{me}$ parallele, qui marque pour chaque demi-degré de latitude, combien la Ruſſie y contient des *méſures aréales*, c'eſt-à-dire, des eſpaces ſphéroïdiques d'un degré de longitude & d'un demi-degré de latitude; & la totalité de ces meſures aréales pour chaque parallele de demi en demi-degré eſt evaluée par la méthode précedente en lieux géographiques quarrés, & de 5 à 5 degrés en verſtes ruſſes quarrées. C'eſt ainſi par exemple, que l'auteur trouve la ſurface géometrique de la Ruſſie entiere de 16041290 verſtes quarrées, ce qui fait $\frac{1}{13}$ de toute la moitié boréale du Sphéroïde terreſtre; la partie ſituée au delà du cercle polaire en contient 3259502, & celle ſituée dans la Zone tempérée 12781788 verſtes quarrées. Il trouve, que le parallele de 57°, 27′ diſtingue la Ruſſie dans la Zone tempérée en deux parties égales; enſorte qu'en prennant ce parallele pour la ligne de ſéparation entre la Ruſſie ſeptentrionale & méridionale, il vient pour la Ruſſie *polaire* 3259502, pour la Ruſſie *ſeptentrionale* 6390894, & pour la Ruſſie *méridionale* 6390894 verſtes quarrées. Pour l'enſemble de toutes les Lieutenances générales, de la Tauride & du pays des coſaques du Don, l'auteur trouve 13690132 verſtes quarrées. Il aura l'occaſion de faire encore d'autres applications de cette méthode en traitant de la différence des climats phyſiques de ce vaſte Empire.

## V.

## Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année 1783.

Par M. *Jean-Albert Euler.* Pag. 401.

Suivant le nouveau Stile.

### I. Été de 1783.

La Neva débacla le 25 Avril: elle fut repriſe le 17 Novembre: l'intervalle entre ces deux époques eſt de 206 jours.

Il géla pour la derniere fois le 4 Mai: il recommença à géler le 4 Octobre; ce qui donne un intervalle d'été de 153 jours.

La derniere neige tomba le 26 Avril: il recommença à neiger le 3 Octobre: ainſi après 160 jours.

La plus grande chaleur a été de 106 degrés de Délisle, le 17 Juin à 2 heures après midi.

La chaleur moyenne a été trouvée pour les après-midi: depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre de $125\frac{1}{3}$, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de $121\frac{1}{2}$ degrés.

La chaleur moyenne déduite de celles du matin & du ſoir a été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre de $135\frac{1}{2}$ & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre de 131 degrés.

La

La chaleur obſervée après-midi, a été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, ce qui comprend un nombre de 184 jours:

5 jours plus grande que 110$^{d.}$
59 jours entre 120 & 110.
62 jours entre 130 & 120.
42 jours entre 140 & 130 &
16 jours entre 150 & 140 degrés.

La chaleur obſervée le matin & le ſoir, a été pendant ces mêmes ſix mois d'été:

10 jours moindre que 150$^{d.}$
41 jours entre 140 & 150.
74 jours entre 130 & 140.
55 jours entre 120 & 130 &
4 jours entre 110 & 120 degrés.

L'État du Baromètre depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, a été:

au plus haut 28. 62. le 14 Octobre à 3 heures après-midi. Therm. 142. Ciel presque ſerein, vent du Nord.
au plus bas 27. 50 le 20 Octobre à 5 heures du ſoir. Therm. 140. Ciel entièrement couvert, pluie à verſe, vent fort du SOu.
la variation totale 1. 12.
le milieu - - 28. 06.

La hauteur moyenne 28, 123 c. à d. 28$\frac{123}{1000}$ pouces de Paris.

La hauteur du Baromètre s'eſt trouvée, 161 jours 6 heures au deſſus de 27. 90: 133 jours 15 heures au deſſus de 28. 00 & 104 jours 18 heures au deſſus de 28. 10.

Les vents forts ont ſoufflé pendant ces 6 mois d'été:

4 jours du NE. le 9. 20. 30 Mai & le 4 Juin.
4 jours de l'Eſt, le 21. 31. Mai, le 5 & 8 Août.
2 jours du SE. le 24 Mai & le 17 Juin.
10 jours du Sud, le 21 Juin, 22 Juillet, 13 Août, 5. 7. 8. 10. 13 Sept. le 5 & 28 Octobre.
7 jours du SOu. le 11 Août, 4. 11. 12 Sept. le 11. 20 & 30 Octobre.
22 jours de l'Oueſt, le 1 Mai, 9. 23. 24. 28. 30 Juin, 1. 29. 30. 31 Juillet, 1. 2. 4. 30 Août, 30 Sept. le 2. 3. 6. 7. 8. 12 & 31 Oct.
7 jours du NOu. le 3 Mai, 20. 22 Juin, 2 Juillet, 3. 6 Août & le 21 Octobre.

Parmi ces vents ſe trouvoient être les plus violens ceux du 20 & 24 Mai, du 30 Juin, du 1 & 4 Août, du 7. 11 & 30 Sept. & du 11 Octobre.

Enfin les autres variations atmoſphériques pendant les ſix mois d'été ſont marquées dans la table ſuivante.

| Atmoſphère. | Mai | Juin | Juill. | Août | Sept. | Oct. | Somme. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ciel entièrement ſerein - | 12 | 14 | 17 | 10 | 5 | 3 | 61 jours |
| ciel entièrement couvert. | 7 | 6 | 3 | 3 | 10 | 11 | 40 — |
| Brouillard - - - | 2 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 17 — |
| Pluïe - - {médiocre - | 10 | 7 | 4 | 8 | 15 | 18 | 62} 83 j. |
| {copieuſe - - | 1 | 6 | 2 | 6 | 5 | 1 | 21} |
| Neige - - - - | — | — | — | — | — | 7 | 7 jours |
| Grèle - - - - | — | — | — | — | — | 1 | 1 — |
| Orages complets - - - | 1 | 3 | 1 | — | — | — | 5 — |
| Tonnère - - | 2 | 2 | — | 3 | — | — | 7 — |
| Aurores boréales - - | 3 | — | — | — | 1 | 1 | 5 — |

La

La quantité de l'eau de pluie tombée pendant ces ſix mois de Mai —— Oct. a été de 9, 87 pouces de Paris.

Il y eut encore de remarquable une vapeur épaiſſe dont l'atmoſphère a été chargée preſque tous les jours de Juillet, ainſi que pendent une partie d'Août: enſorte que le Soleil même en plein midi paroiſſoit avoir encore moins de clarté que la Lune.

## II. Hyver de 1783 à 1784.

La Neva fut priſe pendant 160 jours, depuis le 17 Novembre 1783 jusqu'au 25 Avril où elle débacla.

L'Intervalle entre la premiere gélée, du 4 Octobre 1783, & la derniere, du 20 Mai 1784, eſt de 229 jours.

Il neigea pour la premiere fois le 3 Octobre, & après 248 jours pour la derniere fois le 7 Juin 1784.

Le plus grand froid n'a été que de 196 degrés de Déliſle, le 27 Décembre matin: elle ſurpaſſe pour l'ordinaire 200 degrés & tombe le plus fréquement en Janvier.

Le froid moyen, au matin & au ſoir, a été trouvé: depuis

le 1 Novembre 1783, jusqu'au 1 Mai 1784 - - $164\frac{1}{3}$ degrés
le 1 Décembre 1783, jusqu'au 1 Avril 1784 - - $168\frac{1}{3}$ ——

Le froid moyen à 2 heures après-midi: depuis

le 1 Novembre 1783, jusqu'au 1 Mai 1784 - - $154\frac{3}{4}$ degrés
le 1 Décembre 1783, jusqu'au 1 Avril 1784 - - 159 ——

Le froid de la nuit, depuis le 1 Novembre 1783, jusqu'au 1 Mai 1784, ce qui comprend un intervalle de 182 jours, a été:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | jours | plus grand que | 190 | | | |
| 16 | —— | entre | 180 | & | 190 | |
| 37 | —— | —— | 170 | & | 180 | |
| 52 | —— | —— | 160 | & | 170 | |
| 53 | —— | —— | 150 | & | 160 | |
| 21 | —— | —— | 140 | & | 150 | degrés. |

Le froid à midi, ou à 2 heures après-midi, a été pendant ce même intervalle de 182 jours d'hyver:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | jours | moindre que | 130 | | | |
| 20 | —— | entre | 140 | & | 130 | |
| 32 | —— | —— | 150 | & | 140 | |
| 65 | —— | —— | 160 | & | 150. | |
| 48 | —— | —— | 170 | & | 160 | |
| 11 | —— | —— | 180 | & | 170 | |
| 3 | —— | —— | 190 | & | 180 | degrés. |

L'État du Baromètre depuis le 1 Novembre 1783, jusqu'au 1 Mai 1784 a été:

au plus haut 28. 73, le 14 Février, à 4 heures après-midi. Therm. 170. Ciel ſerein, vent du NE.

au plus bas 27. 07, le 16 Janvier, à 12 heures du ſoir. Therm. 155. Ciel couvert, neige, vent de l'Oueſt.

la variation totale - 1. 66

le milieu - - - 27. 90

la hauteur moyenne 27. 987, ou bien 27. $\frac{987}{1000}$ pouces de Paris.

La

La hauteur du Baromètre a été pendant ces mêmes 182 jours d'hyver: 105 jours 12 heures au deſſus de 27. 90, 84 jours 12 heures au deſſus de 28. 00, & 66 jours 21 heures au deſſus de 28. 10 pouces.

Les vents forts, toujours pendant le même intervalle de temps, ont ſoufflé:

1 jour du Nord, le 15 Décembre.

3 jours du NE. le 5 Nov. 10 Févr. & le 30 Avril.

7 jours de l'Eſt, le 6. 13 Nov. 27 Déc. 24 Janvier, le 7. 9. & 11 Février.

6 jours du SE. le 14. 18. 19 Nov. 2. 8 Février & le 19 Avril.

12 jours du Sud, le 27 Nov. 20. 31 Déc. 3. 4. 6 Févr. 1. 2 Mars, le 21. 22. 23 & 25 Avril.

5 jours du SOu. le 1. 10. 11 Janvier, 5 Février & le 28 Avril.

4 jours de l'Oueſt, le 17 Déc. 13. 15 Janv. & le 24 Avril.

2 jours du NOu. le 1 Nov. & le 16 Décembre.

Parmi leſquels ſe trouvoient être les vents les plus forts, ceux du 27 Nov. du 20 Dec. & du 10 Janvier 1784.

Les autres variations & météores obſervés depuis le 1 Novembre 1783 jusqu'au 1 Mai 1784, ſont indiqués dans la table ci-jointe.

Atmo-

| Atmoſphère. | 1783. Nov. | Déc. | 1784. Jan. | Févr. | Mars | Avril | Somme. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ciel entièrement ſerein - | 5 | 2 | 5 | 4 | 4 | 17 | 37 jours |
| ciel entièrement couvert. | 17 | 18 | 16 | 11 | 11 | 7 | 80 — |
| Brouillard - - - | 3 | 2 | 2 | 9 | 6 | 7 | 29 — |
| Pluïe - - - - | 3 | 7 | 1 | — | — | 9 | 20 — |
| Neige - - médiocre - | 9 | 9 | 12 | 8 | 16 | 2 | 56 } 69 j. |
| Neige - - copieuſe - - | 2 | — | 2 | — | 9 | — | 13 } 69 j. |
| Aurores boréales - - | — | — | — | — | 1 | 1 | 2 jours |
| Parhélies - - - | — | 2 | — | — | — | — | 2 — |

La quantité de l'eau de neige fondue & de pluie tombée, pendant cet intervalle d'hyver, a été trouvée de 2. 92 pouces de Paris.

## Errata.

In poſtremo Tomo Actorum ad annum 1782.

Pag. 177. lin. 21. lege *exhibente.*

182. lin. 11. lege *perſici.*

In hoc primo Tomo nouorum Actorum.

Pag. 8. lin. 6. lege *ſecanda.*

21. lin. 23. lege *gratia.*

45. lin. 22. lege *a* loco *x.*

377. lin. vltima lege 30′. 35″ loco 40′. 35″.

380. lin. 25. lege 13° loco 30°.

—— lin. 30. lege + 0″, 13 loco — 1″, 24.

—— lin. 31. lege — 0″, 17 loco — 1″. 241.

386. lin. 21. lege 1′. 34″ loco 1′. 41″.

lege 55″. loco 32″.

—— lin. 22. lege 7″. loco 23″.

—— lin. 23 lege *quam illa ſuperat tantum* 5″.

MATHE-

# MATHEMATICA.

# CONSIDERATIONES SVPER
# TRAIECTORIIS
## TAM RECTANGVLIS QVAM OBLIQVANGVLIS.

Auctore
*L. EVLERO.*

*Conuent. exhib. d.* 3. *Iul.* 1775.

§. 1.

Propoſita aequatione pro circulo $yy = aa - xx$, ſi radio $a$ ſucceſſiue alii atque alii valores tribuantur, ab $a = 0$ vsque ad $a = \infty$, naſcentur infiniti circuli circa idem centrum C deſcripti, cuiusmodi ſunt circuli AY et $ay$, ita vt haec aequatio $yy = aa - xx$ infinitos circulos in ſe complectatur; atque in toto plano, in quo hi circuli deſcribuntur, nullum dabitur punctum Y, per quod non aliquis horum circulorum tranſeat. Simili modo ſi in hac aequatione pro circulo: $yy = 2ax - xx$, radio $a$ ſucceſſiue omnes valores, ab $a = 0$ vsque ad $a = \infty$, tribuantur, abſciſſae autem $x$ perpetuo in eodem axe atque ab eodem termino capiantur, etiam infiniti circuli deſcribentur, qui omnes ſe mutuo in initio abſciſſarum A tangent, et quorum centra in axe continuo longius a puncto A recedent. Quin etiam, ſi radio $a$ negatiui valores tribuantur, circuli ad alteram partem ſuper eodem axe cadent, pro quibus etiam abſciſſae fient negatiuae; atque hoc etiam caſu in toto ſpatio nullum dabitur punctum, per quod non quiſpiam horum circulorum tranſeat. Quod ſi vero talis ſtatuatur aequatio: $yy = cc - (x - a)^2$, et quantitati $a$ continuo omnes valores poſſibiles tribuantur, ma-

Tab. I. Fig. 1.

Fig. 2.

nente quantitate $c$ conſtante, infiniti circuli inter ſe aequales,
Tab. I. Fig. 3. quorum omnium radii $= c$, ſuper eodem axe deſcribentur, quorum primus, ſi $a = 0$, ſit D C B, exiſtente A initio abſciſſarum; alius vero quicunque erit $d c b$, alius D′ C′ B′, eodem radio $= c$ deſcripti, pro quibus interualla A $a$, A A′ $= a$, ita vt omnes hi circuli oriantur, ſi circulus B C D continuo iuxta axem promoueatur. Hoc autem caſu, quodcunque accipiatur punctum $y$, cuius diſtantia ab axe $x y$ non excedat radium $c$, ſemper dabitur circulus per iſtud punctum tranſiens. Quod ſi vero haec ſtatuatur aequatio: $y = \frac{a}{c} \sqrt{(c c - x x)}$, vbi iterum quantitas $a$ continuo augeatur, manente $c$ eadem, caſu $a = c$ deſcribetur
Fig. 4. circulus D C B. Si $a < c$, prodibit ellipſis B $c$ D, ſuper eodem axe B D $= 2 c$ deſcribenda; at ſi ſumatur $a > c$, orientur huiusmodi ellipſes B C′ D, quarum recta B D erat axis minor, maior vero continuo increſcit; ita vt haec aequatio infinitas complectatur ellipſes, ſuper eodem axe B D deſcribendas, dum alter axis, qui eſt $= 2 a$, continuo a 0 vsque in infinitum augetur. Dummodo ergo punctum $y$ ita capiatur, vt eius diſtantia a recta A C′ non maior ſit quam $c$, ſemper dabitur talis ellipſis, quae per id tranſeat.

§. 2. Ex his iam exemplis abvnde patet, quemadmodum infinitae lineae curuae ſub vna eademque aequatione comprehendi queant, quod ſcilicet eueniet, ſi aequatio inter coordinatas $x$ et $y$ eiusmodi quantitatem conſtantem $a$ inuoluat, cui ſucceſſiue omnes valores poſſibiles tribui concipiantur, ita tamen, vt pro eadem curua haec quantitas $a$ evndem retineat valorem; dum autem ad alias curuas tranſimus, eius valores continuo mutentur. Perpetuo vero abſciſſas et applicatas litteris $x$ et $y$ more ſolito deſignemus, illam autem quantitatem conſtantem, quae continuo mutari concipitur, littera $a$, quam *parametrum variabilem* iſtarum curuarum appellabimus.

§. 3.

§. 3. His poſitis, quaecunque aequatio pro talibus curuis infinitis fuerit conſtituta, parametrum variabilem $a$ vtcunque inuoluens, applicatam $y$ ſemper ſpectare licebit tanquam functionem binarum variabilium $x$ et $a$; vel etiam abſciſſa $x$ aequabitur certae functioni ipſarum $y$ et $a$; tum vero etiam iſte parameter variabilis $a$ ſpectari poterit tanquam functio binarum $x$ et $y$. Quemadmodum in poſtremo exemplo allato primo eſt $y = \frac{a}{c}\sqrt{(cc - xx)}$, hoc eſt functio ipſarum $x$ et $a$; dein vero erit $x = \frac{c}{a}\sqrt{(aa - yy)}$, hoc eſt functio ipſarum $y$ et $a$; denique ex eadem aequatione fit $a = \frac{cy}{\sqrt{(cc - xx)}}$, hoc eſt functio ipſarum $x$ et $y$.

§. 4. His praemiſſis problema Traiectoriarum ita dilucide proponi poterit: *Deſcriptis infinitis lineis curuis ſub eadem aequatione generali contentis, in quam ſcilicet parameter variabilis* a *vtcunque ingrediatur, definire eiusmodi lineam curuam, quae omnes illas lineas vbique ſub eodem angulo, ſiue recto ſiue obliquo, traiiciat.* Hocque eſt famoſiſſimum illud problema, in quo olim ſummi Geometrae incredibili ſtudio fuerunt occupati et ex quorum meditationibus maxima incrementa in Analyſin ſunt inuecta, inter quae imprimis ſunt referenda, quae de differentialibus functionum duarum variabilium poſtmodum ſunt vberius explorata.

§. 5. Quoniam igitur haec quaeſtio circa tangentes illarum infinitarum curuarum in ſingulis punctis verſatur, quippe quae a curua quaeſita vbique ſub dato angulo traiici debent, aequationem differentialem pro illis infinitis curuis conſiderari oportet; et quia curua quaeſita continuo alias atque alias ex illis infinitis curuis interſecabit, in hac differentiatione etiam variabilitatis parametri $a$ ratio eſt habenda, vnde tres caſus imprimis ſunt euoluendi: 1.) Si $y$ aequetur functioni ipſarum $x$

et $a$, aequatio differentialis huiusmodi habebit formam: $\partial y = p\,\partial x + q\,\partial a$, vbi $p$ et $q$ ita a ſe inuicem pendent, vt ſit $(\frac{\partial p}{\partial a}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$. 2.) Si $x$ aequetur functioni ipſarum $y$ et $a$, aequatio differentialis erit $\partial x = r\,\partial y + s\,\partial a$, vbi $r$ et $s$ ita a ſe inuicem pendebunt, vt ſit $(\frac{\partial r}{\partial a}) = (\frac{\partial s}{\partial y})$, quem autem caſum ſeorſim euolui ſuperfluum foret, quoniam binae coordinatae $x$ et $y$ natura ſua ſunt permutabiles. 3.) Sin autem parameter $a$ aequetur functioni ipſarum $x$ et $y$, aequatio differntialis huiusmodi prodibit: $\partial a = t\,\partial x + u\,\partial y$, in qua ſemper erit $(\frac{\partial t}{\partial y}) = (\frac{\partial u}{\partial x})$.

§. 6. At ſi aequatio propoſita inter $x$, $y$ et $a$ ita fuerit comparata, vt neque $y$ per $x$ et $a$, neque $x$ per $y$ et $a$, neque $a$ per $x$ et $y$ commode definire liceat, tum aequatio more ſolito differentiata perducet ad talem formam:

$$P\,\partial y + Q\,\partial x + R\,\partial a = 0,$$

vbi iam ſatis notum eſt, talem aequationem inter tres variabiles ſubſiſtere plane non poſſe, niſi inter quantitates P, Q et R certa quaedam relatio intercedat. Ad quam relationem inueſtigandam ante omnia perpendendum eſt, iſtam aequationem poſſibilem eſſe non poſſe, niſi detur quiſpiam multiplicator M, qui eam reuera integrabilem reddat, ita vt iſta formula:

$$M P\,\partial y + M Q\,\partial x + M R\,\partial a,$$

integrationem reuera admittat. Hinc ergo ſequitur, ſi quantitas $a$ conſtans accipiatur, hanc formulam $M P\,\partial y + M Q\,\partial x$ integrabilem eſſe debere, ad quod requiritur vt ſit

$$\partial . (\frac{MP}{\partial x}) = \partial . (\frac{MQ}{\partial y}),$$

quae aequatio euoluta praebet

$$\text{I. } M . (\frac{\partial P}{\partial x}) - M . (\frac{\partial Q}{\partial y}) = Q . (\frac{\partial M}{\partial y}) - P . (\frac{\partial M}{\partial x}).$$

Deinde

Deinde integrabilis quoque erit illa aequatio, ſi quantitas $x$ conſtans accipiatur, vnde neceſſe eſt fiat $\partial.\left(\frac{MP}{\partial a}\right) = \partial.\left(\frac{MR}{\partial y}\right)$ quae euoluta dat

$$\text{II. } M\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) - M\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = R\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - P\left(\frac{\partial M}{\partial a}\right).$$

Denique integrabilis etiam eſſe debet aequatio illa ſumto $y$ conſtante, vnde fit $\partial.\left(\frac{MQ}{\partial a}\right) = \partial.\left(\frac{MR}{\partial x}\right)$, quae euoluta praebet.

$$\text{III. } M\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right) - M\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) = R\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) - Q\left(\frac{\partial M}{\partial a}\right).$$

Vt nunc hinc multiplicatorem M penitus ex calculo expellamus, harum aequationum primam ducamus in R, ſecundam in $-Q$ ac tertiam in P, earumque aggregatum a dextra parte praebebit o: ſiniſtrae vero partes per M diuiſae ſuppeditant hanc aequationem:

$$R\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] + Q\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)\right] + P\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right] = 0.$$

Perpetuo igitur, niſi haec conditio locum habeat, eiusmodi aequationes inter ternas variabiles prorſus ſunt impoſſibiles.

§. 7. Cum igitur quadruplici modo aequatio differentialis pro infinitis curuis propoſitis, quas ſimpliciter *curuas ſecandas* appellabimus, conſtitui poſſit, vnamquamque ſpeciem ſeorſim euolui conueniet, quandoquidem pro ſingulis peculiaria praecepta reperientur, ad curuam quaeſitam, quam *Traiectoriam* vocabimus, inueniendam, vbi quidem caſum ſecundum cum primo coniunctim tractare licebit.

## Caſus I.

### Quo pro curuis ſecandis applicata $y$ aequatur functioni ipſarum $x$ et $a$.

§. 8. Pro curuis igitur ſecandis ponamus dari hanc aequationem differentialem: $\partial y = p\,\partial x + q\,\partial a$, ita vt ſit $\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$

et

et ex curuis ſecandis conſideremus vnam quamcunque E Y F, quam Traiectoria ſecet in puncto Y, ſitque angulus ſub quo
Tab. I. hacc interſectio fieri debet $= \alpha$. Iam quia idem punctum Y
Fig. 5. tam in curua ſecanda quam in Traiectoria exſiſtit, eius locus per easdem coordinatas $AX = x$ et $XY = y$ determinatur. Quatenus id in curua ſecunda exſiſtit, erit $\partial y = p \partial x + q \partial a$; quatenus autem in traiectoria exſiſtit, relatio inter $x$ et $y$ nunc demum explorari debet. Ducatur nunc recta Y T, quae curuam ſecandam tangat in Y, atque ad poſitionem huius rectae inueniendam, quoniam ad eandem curuam ſecandam refertur, parameter $a$ pro inuariabili accipi debebit, vnde habebitur $\partial y = p \partial x$, hincque $\frac{\partial y}{\partial x} = p$; vbi manifeſtum eſt, quantitatem $p$ exprimere tangentem anguli X T Y, ita vt, ſi ponamus hunc angulum $XTY = \tau$, futurum ſit $p = \text{tang.}\,\tau$. At vero pro Traiectoria, ſit eius tangens pro eodem puncto Y recta $Y\Theta$, exiſtente angulo $X\Theta Y = \theta$, erit vtique $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tang.}\,\theta$, vbi relatio inter $y$ et $x$ reſpicit Traiectoriam.

§. 9. Cum igitur angulus interſectionis debeat eſſe $= \alpha$, ei aequalis eſſe debet angulus $TY\Theta$, quem binae tangentes inuicem formant, vnde ſequitur fore $\alpha = \theta - \tau$, ideoque $\theta = \tau + \alpha$; vnde concluditur $\text{tang.}\,\theta = \frac{\text{tang.}\,\tau + \text{tang.}\,\alpha}{1 - \text{tang.}\,\tau . \text{tang.}\,\alpha}$. Quia vero eſt $\text{tang.}\,\tau = p$ et $\text{tang.}\,\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$, erit $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p + \text{tang.}\,\alpha}{1 - p\,\text{tang.}\,\alpha}$, hincque $\partial y = \frac{p + \text{tang.}\,\alpha}{1 - p\,\text{tang.}\,\alpha} . \partial x$. Ex qua ergo aequatione relatio inter $x$ et $y$ debet inueſtigari, eaque praebebit aequationem pro Traiectoria quaeſita.

§. 10. Conſideretur nunc Traiectoriae punctum proximum $y$, quod cadet in curuam ſecandam proximam $e\,y\,f$, cuius ergo parameter erit $a + \partial a$, vnde eius ſitus exprimetur

tur hac aequatione: $\partial y = p\,\partial x + q\,\partial a$. Quod ſi ergo hic praecedens valor ipſius $\partial y$ ſubſtituatur, habebitur iſta aequatio: $\frac{\text{tang.}\,\alpha + p}{1 - p\,\text{tang.}\,\alpha}\partial x = p\,\partial x + q\,\partial a$, quae reducitur ad hanc formam: $q\,\partial a = \frac{\text{tang.}\,\alpha\,(1 + p\,p)}{1 - p\,\text{tang.}\,\alpha}\partial x$, quae tantum duas variabiles continet, quandoquidem per hypotheſin $p$ et $q$ ſunt datae functiones ipſarum $x$ et $a$. Hinc igitur definiri poterit relatio inter $x$ et $a$; vnde, ſi valor ipſius $a$ per $x$ exprimatur et in aequatione generali pro curuis ſecandis ſubſtituatur, orietur aequatio inter binas variabiles $x$ et $y$, qua natura Traiectoriae exprimetur.

§. 11. Quoniam autem aequatio inuenta inter $x$ et $a$ eſt differentialis, in eius integralem introduci poterit noua conſtans arbitraria, cui provti ſucceſſiue alii atque alii valores tribuentur, innumerabiles orientur Traiectoriae, quarum ſingulae curuas ſecandas pariter ſub eodem angulo $\alpha$ traiicient; quae omnes ſub aequatione generali per integrationem inuenta continebuntur et quarum parameter variabilis erit ipſa illa conſtans per integrationem inducta. Vnde patet, curuas ſecandas et Traiectorias ita inter ſe reciprocari, vt, ſi Traiectoriae tanquam curuae ſecandae conſiderentur; tum illae, quae erant curuae ſecandae, nunc fiant illarum Traiectoriae, et quidem ſub eodem interſectionis angulo $\alpha$.

§. 12. Quod ſi ergo deſiderentur Traiectoriae orthogonales, ita vt angulus interſectionis $\alpha$ ſit rectus, ideoque $\text{tang.}\,\alpha = \infty$, pro iis habebitur iſta aequatio: $(1 + p\,p)\,\partial x + p\,q\,\partial a = 0$, quae ergo eſt formula principalis pro Traiectoriis rectangulis. Sin autem velimus, vt angulus interſectionis $\alpha$ euaneſcat, aequatio euadet $q\,\partial a = 0$, ſiue $q = 0$, quae aequatio non amplius eſt differentialis, vnde vnica tantum dabitur talis Traiectoria, quae tranſibit per omnia puncta,

in quibus binae curuae ſecandae proximae ſibi mutuo occurrunt, ſeu, quod eodem redit, iſta Traiectoria omnes curuas ſecandas tanget. Sin autem angulus interſectionis $\alpha$ debeat eſſe obliquus, id duplici modo obtineri poterit, provti angulus acutus vel ad dextram vel ad ſiniſtram fuerit conſtitutus. Ita ſi angulus interſectionis debeat eſſe obliquus, tang. $\alpha$ tam negatiue quam poſitiue ſumi poterit; ſicque etiam ſatisfaciet haec aequatio: $q\,\partial a = -\frac{\text{tang.}\,\alpha(1+pp)\partial x}{1+p\,\text{tang.}\,\alpha}$; vnde patet, has curuas a praecedentibus penitus fore diuerſas. Tantum igitur ſupereſt vt haec aliquot exemplis illuſtremus.

## Exemplum I.

§. 13. Sint curuae ſecandae omnes rectae ex eodem puncto A eductae, pro quibus aequatio generalis erit $y = \frac{ax}{c}$, vbi $c$ eſt quantitas conſtans, $a$ vero parameter ille variabilis; vnde cum ſit $\partial y = \frac{a\partial x}{c} + \frac{x\partial a}{c}$, erit $p = \frac{a}{c}$ et $q = \frac{x}{c}$. Hinc igitur ſi loco tang. $\alpha$ breuitatis gratia ſcribamus $\delta$, pro Traiectoria habebimus hanc aequationem: $x\,\partial a = \frac{\delta(cc+aa)}{(c-\delta a)}\partial x$, quam ergo aequationem differentialem inter $x$ et $a$ integrari oportet. Statim autem ſeparatio variabilium praebet:

$$\delta.\frac{\partial x}{x} = -\frac{\delta a\partial a + c\partial a}{cc+aa},$$

cuius aequationis integrale eſt

$$\delta\,l\,x = \text{A tang.}\,\frac{a}{c} - \delta\,l\,\sqrt{(cc+aa)} + \delta\,l\,\text{C}, \text{ ſiue}$$

$$\delta\,l\,\frac{x\sqrt{(cc+aa)}}{\text{C}} = \text{A tang.}\,\frac{a}{c}.$$

Hic loco C ſcribamus $bc$, ita vt $b$ ſit parameter variabilis Traiectoriarum, pro quibus ergo habebitur iſta aequatio:

$$l\,\frac{x\sqrt{(cc+aa)}}{bc} = \frac{1}{\delta}\,\text{A tang.}\,\frac{a}{c},$$

vbi $\delta$ eſt tangens anguli, ſub quo Traiectoria omnes rectas ex

puncto

puncto A eductas traiicit, quae ergo manifeſto eſt Spiralis logarithmica. Vnde patet, ſi angulus interſectionis debeat eſſe rectus, ideoque $\delta = \infty$, tum ſtatim fore $x \surd (cc + aa) = bc$, vnde colligimus $a = \frac{c \surd (bb - xx)}{x}$, qui valor in aequatione generali $y = \frac{ax}{c}$ ſubſtitutus praebet aequationem pro Traiectoriis $y = \surd (bb - xx)$; vnde patet, quod quidem per ſe eſt perſpicuum, Traiectorias eſſe circulos centro A, radio $b$, deſcriptos.

## Exemplum 2.

§. 14. Sint curuae ſecandae omnes circuli ex eodem centro C, radio variabili $a$ deſcripti, pro quibus ergo eſt $y = \surd (aa - xx)$, vnde fit $\partial y = \frac{a \partial a - x \partial x}{\surd (aa - xx)}$, quae aequatio cum formula generali $\partial y = p \partial x + q \partial a$ comparata, praebet Tab. I. Fig. 1.

$$p = \frac{-x}{\surd (aa - xx)} \text{ et } q = \frac{a}{\surd (aa - xx)},$$

ideoque $1 + pp = \frac{aa}{aa - xx}$. Quamobrem aequatio pro Traiectoriis, ponendo tang. $\alpha = \delta$, erit

$$\frac{a \partial a}{\surd (aa - xx)} = \frac{\delta aa \partial x}{(\delta x + \surd (aa - xx)) \surd (aa - xx)}, \text{ ſiue}$$

$$\partial a = \frac{\delta a \partial x}{\delta x + \surd (aa - xx)};$$

Hinc igitur, ſi angulus interſectionis debeat eſſe rectus, ſeu $\delta = \infty$, erit $\partial a = \frac{a \partial x}{x}$, ideoque $a = bx$, qui valor in aequatione generali $y = \surd (aa - xx)$ ſubſtitutus dat $y = x \surd (bb - 1)$, ſiue $y = cx$, quae aequatio in ſe complectitur omnes rectas e centro C eductas.

§. 15. Pro angulis autem obliquis aequatio inuenta hac forma repraeſentetur: $\partial a \surd (aa - xx) = \delta (a \partial x - x \partial a)$; vbi notetur, formulam $a \partial x - x \partial a$ integrabilem reddi, ſi diuidatur per functionem homogeneam duarum dimenſionum ipſarum $a$ et $x$. Diuidatur igitur haec aequatio per $a \surd (aa - xx)$, vt prodeat $\frac{\partial a}{a} = \frac{\delta (a \partial x - x \partial a)}{a \surd (aa - xx)}$. Fiat enim $x = av$, et aequa-

 tio

tio noſtra induet hanc formam: $\frac{\partial a}{a} = \frac{\delta . \partial v}{\surd (1 - vv)}$, quae integrata dat $l\, a = \delta$ A ſin. $v = \delta$ A ſin. $\frac{x}{a}$, ſiue $l\, \frac{a}{b} = \delta$. A ſin. $\frac{x}{a}$, vbi $b$ ſit parameter variabilis Traiectoriarum. Quia autem hinc fit $xx + yy = aa$, erit $a = \surd (xx + yy)$, qui valor in altervtra aequatione ſubſtitutus dat $\frac{x}{\surd (xx + yy)} =$ ſin. $\frac{1}{\delta}\, l\, \frac{\surd (xx + yy)}{b}$, ſiue ſin. $\frac{x}{\surd (xx + yy)} = \frac{1}{\delta}\, l\, \frac{\surd (xx + yy)}{b}$, quae ergo eſt aequatio inter $x$ et $y$ pro Traiectoriis. Ex ipſa autem aequatione propoſita $y = \surd (aa - xx)$ eius valorem $a = \surd (xx + yy)$ ſubſtituamus, quem breuitatis gratia ſtatuamus $= z$, eritque pro Traiectoriis $l\, \frac{z}{b} = \delta$ A ſin. $\frac{x}{z}$, vbi, ſi porro $\Phi$ ſit ille angulus, cuius ſinus eſt $\frac{x}{z}$, fiet $l\, \frac{z}{b} = \delta\, \Phi$. Cum igitur $z$ denotet diſtantiam puncti $y$ a centro C, $\Phi$ autem complementum anguli, quem haec recta cum axe conſtituit; euidens eſt logarithmum diſtantiae $z$ proportionalem eſſe iſti angulo, in quo conſiſtit indoles Spiralium logarithmicarum.

## Exemplum 3.

Fig. 2. §. 16. Sint nunc curuae ſecandae omnes circuli, ſeſe in ipſo puncto A tangentes, quae hac aequatione exprimantur: $y = \surd (2\, a\, x - x\, x)$, et cum ſit $\partial y = \frac{a \partial x - x \partial x + x \partial a}{\surd (2ax - xx)}$, erit

$$p = \frac{a - x}{\surd (2ax - xx)} \text{ et } q = \frac{x}{\surd (2ax - xx)},$$

hincque $1 + pp = \frac{aa}{2ax - xx}$, vnde pro Traiectoriis habebitur haec aequatio: $\frac{x \partial a}{\surd (2ax - xx)} = \frac{\delta . aa \partial x}{2ax - xx - \delta (a - x) \surd (2ax - xx)}$, ſiue

$$x \partial a \surd (2ax - xx) - \delta (a - x) x \partial a = \delta\, a\, a\, \partial x,$$

quae aequatio cum ſit homogenea, ponatur $x = a\, t$, vnde haec prodibit aequatio:

$$\frac{\partial a}{a} = \frac{\delta \partial t}{t \surd (2t - tt) + \delta tt - 2 \delta t} = \frac{\delta \partial t}{t \surd (2t - tt) - \delta (2t - tt)}$$

quae

quae aequatio quidem eſt ſeparata, eius autem integratio non ſtatim in oculos incurrit, cum tamen ex rei natura facile intelligatur, omnes has Traiectorias ſemper eſſe circulos.

§. 17. Euoluamus primo caſum quo angulus interſectionis eſt rectus, ſeu $\delta = \infty$, fietque

$$\frac{\partial a}{a} = -\frac{\partial t}{2t - tt} = -\frac{\partial t}{2t} - \frac{\partial t}{2(2-t)},$$

cuius integrale eſt

$$la = -\tfrac{1}{2}lt + \tfrac{1}{2}l(2-t) = \tfrac{1}{2}l\frac{2-t}{t} + lb,$$

hincque ad numeros regrediendo fit $a = b\sqrt{\frac{2-t}{t}}$, ita vt ſit $a = b\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, vnde, ob $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, fiet

$$ax = b\sqrt{(2ax - xx)} = by.$$

Sicque tantum opus eſt, vt loco $a$ eius valor ex aequatione propoſita ſubſtituatur, qui eſt $a = \frac{yy+xx}{2x}$, hincque prodit $yy + xx = 2by$, quae aequatio manifeſto eſt pro infinitis circulis, ſiquidem parameter $b$, qui eſt radius horum circulorum, tanquam variabilis ſpectetur. Atque hi circuli omnes axem in ipſo puncto A tangent.

§. 18. Pro angulis autem obliquis negotium facillime expedietur, ſtatuendo $\frac{2-t}{t} = vv$, ita vt ſit $t = \frac{2}{1+vv}$, ideoque $\partial t = -\frac{4v\partial v}{(1+vv)^2}$ atque $\sqrt{(2t - tt)} = \frac{2v}{1+vv}$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio induet hanc formam: $\frac{\partial a}{a} = -\frac{\delta\partial v}{1-\delta v}$, cuius integrale manifeſto eſt

$$la = l(1 - \delta v) + lb, \text{ ſiue } a = b(1 - \delta v).$$

Cum igitur ſit $v = \sqrt{\frac{2-t}{t}} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, erit

$$a = b\left(1 - \delta\sqrt{\frac{2a-x}{x}}\right);$$

 quae

quae aequatio, cum ſit $\sqrt{(2ax - xx)} = y$, fiet $a = b\left(1 - \frac{\delta y}{x}\right)$; et cum ex aequatione propoſita ſit $a = \frac{xx + yy}{2x}$, pro Traiectoriis prodibit iſta aequatio inter $x$ et $y$: $xx + yy = 2b(x - \delta y)$, quae aequatio manifeſto eſt pro infinitis circulis, ſiquidem quantitas $b$ variabilis accipiatur. Quanquam igitur huiusmodi exempla triuia videntur, tamen attentione imprimis ſunt digna, atque ad vires in Analyſi exercendas accommodata.

## Exemplum 4.

Tab. I. Fig. 6. §. 19. Propoſita ſit pro curuis ſecandis haec aequatio: $y = a + \sqrt{(cc - xx)}$, exiſtente $c$ quantitate conſtante, et $a$ parametro variabili, quae aequatio ergo continet infinitos circulos inter ſe aequales et ſuper recta diſpoſitos, quae ad axem in A eſt normalis. Quaeruntur igitur eiusmodi curuae, quae omnes hos circulos ſub angulo $\alpha$ traiiciant. Cum ergo hic ſit $\partial y = \partial a - \frac{x\partial x}{\sqrt{cc - xx}}$, erit $p = -\frac{x}{\sqrt{(cc - xx)}}$ et $q = 1$, vnde aequatio pro Traiectoriis fit $\partial a = \frac{\delta cc\partial x}{\sqrt{cc - xx}(\delta x + \sqrt{(cc - xx)})}$, in qua ſtatim loco $\partial a$ eius valor ex aequatione propoſita ſubſtitui poteſt, qui eſt $\partial y + \frac{x\partial x}{\sqrt{(cc - xx)}}$, vnde fit

$$\partial y = \frac{\delta\partial x\sqrt{(cc - xx)} - x\partial x}{\delta x + \sqrt{(cc - xx)}};$$

haec ergo aequatio inter binas coordinatas $x$ et $y$ ſubſiſtit, quae adeo a ſe inuicem ſponte ſunt ſeparatae.

§. 20. Conſideremus hic primo Traiectorias rectangulas, ſiue ſit $\delta = \infty$, eritque $\partial y = \frac{\partial x}{x}\sqrt{(cc - xx)}$, ad quam aequationem integrandam fiat $\sqrt{(cc - xx)} = t$, eritque $xx = cc - tt$, et ſumtis differentialibus logarithmicis: $\frac{\partial x}{x} = -\frac{t\partial t}{cc - tt}$; ſicque prodibit haec aequatio:

$$\partial y = -\frac{tt\partial t}{cc - tt} = \partial t - \frac{cc\partial t}{cc - tt},$$

cuius

cuius integrale eſt

$$y = t - \tfrac{1}{2} c\, l \frac{c+t}{c-t} + b.$$

Cum igitur $t = \surd(cc - xx)$, erit

$$y = b + \surd(cc - xx) - \tfrac{1}{2} c\, l \frac{c + \surd(cc - xx)}{c - \surd(cc - xx)}$$

quae ergo curua eſt tranſcendens per logarithmos conſtruenda; vnde quidem ſtatim patet, ſumto $x = 0$ fieri $y = -\infty$: at ſumto $x = c$ fieri $y = b$. Vt formam curuae in hoc loco ſcrutemur, ponamus $x = c - \omega$, exiſtente $\omega$ quaſi infinite paruo, eritque $\surd(cc - xx) = c\surd(2\omega - \omega\omega) = c\surd 2\omega(1 - \frac{\omega}{4} - \frac{\omega\omega}{32})$,

hincque

$$\frac{a + \surd(cc - xx)}{a - \surd(cc - xx)} = \frac{1 + \surd(2\omega - \omega\omega)}{1 - \surd(2\omega - \omega\omega)} = \frac{1 + \surd 2\omega(1 - \frac{\omega}{4} - \frac{\omega\omega}{32})}{1 - \surd 2\omega(1 - \frac{\omega}{4} - \frac{\omega\omega}{32})}.$$

Ponamus breuitatis gratia $\surd 2\omega(1 - \frac{\omega}{4} - \frac{\omega\omega}{32}) = \Omega$, vt ſit

$$y = b + c\,\Omega - \tfrac{1}{2} c\, l \frac{1+\Omega}{1-\Omega},$$

vbi $\Omega$ eſt quantitas quaſi infinite parua. Tum autem conſtat eſſe

$$\partial.\tfrac{1}{2} l \frac{1+\Omega}{1-\Omega} = \frac{d\Omega}{1 - \Omega\Omega} = \partial\Omega\left(\frac{1}{1-\Omega\Omega}\right) = \partial\Omega(1 + \Omega^2 + \Omega^4)$$

ideoque

$$\tfrac{1}{2} l \frac{1+\Omega}{1-\Omega} = \Omega + \tfrac{1}{3}\Omega^3 + \tfrac{1}{5}\Omega^5 \text{ etc.}$$

quibus valoribus ſubſtitutis fiet $y = b - \frac{1}{3} c\,\Omega^3$. Eſt vero $\Omega^3 = 2\omega\surd 2\omega$, ſicque prodit $y = b - \frac{2}{3} c\,\omega\surd 2\omega$; vnde patet Traiectoriam in his punctis habere cuſpidem parabolae cubicali ſecundae ſimilem.

§. 21. Pro angulis autem obliquis, quia inuenimus

$$\partial y = \frac{\delta\partial x\surd(cc - xx) - x\partial x}{\delta x + \surd(cc - xx)},$$

pro

pro huius aequationis integratione, quae vtique non exiguam dexteritatem poſtulat, ponamus $\frac{\delta\sqrt{cc-xx}-x}{\delta x+\sqrt{(cc-xx)}}=t$, eritque $\sqrt{(cc-xx)}=\frac{x(1+\delta t)}{\delta-t}$, vnde colligitur

$$x=\frac{c(\delta-t)}{\sqrt{(1+\delta\delta)(1+tt)}}=\frac{c}{\sqrt{(1+\delta\delta)}}\cdot\frac{\delta-t}{\sqrt{(1+tt)}},\text{ hincque}$$

$$\partial x=\frac{-c}{\sqrt{(1+\delta\delta)}}\left(\frac{\partial t+\delta t\,\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Cum igitur ſit $\partial y=t\,\partial x$, erit

$$-\frac{\partial y\sqrt{(1+\delta\delta)}}{c}=\frac{t\,\partial t+\delta tt\,dt}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}=\frac{t\,\partial t-\delta\,\partial t+\delta\,\partial t(1+tt)}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}},$$

ideoque

$$-\frac{\partial y\sqrt{(1+\delta\delta)}}{c}=\frac{t\,\partial t-\delta\,\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\delta\,\partial t}{\sqrt{(1+tt)}}.$$

Eſt vero

$$\int\frac{t\,\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{(1+tt)}},$$

$$\int\frac{\partial t}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}=\frac{t}{\sqrt{(1+tt)}}\text{ et}$$

$$\int\frac{\partial t}{\sqrt{(1+tt)}}=l(t+\sqrt{1+tt}),$$

quamobrem integrando habebimus

$$\frac{\sqrt{(1+\delta\delta)}}{c}(b-y)=-\frac{(1+\delta t)}{\sqrt{(1+tt)}}+\delta\,l(t+\sqrt{1+tt}),$$

vbi notetur eſſe $t=\frac{\delta\sqrt{cc-xx}-x}{\delta x+\sqrt{(cc-xx)}}$, ita vt haec curua etiam a logarithmis pendeat.

§. 22. Hic autem ſe offert alius modus multo concinnior eandem hanc integrationem per angulos expediendi. Statua-

Statuatur enim $x = c$ ſin. $\Phi$, erit $\surd(cc - xx) = c$ coſ. $\Phi$ et $\partial x = c\,\partial\Phi$ coſ. $\Phi$, vnde prodibit

$$\partial y = c\,\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi \left(\frac{\delta \text{ coſ. } \Phi - \text{ſin. } \Phi}{\delta \text{ ſin. } \Phi + \text{coſ. } \Phi}\right), \text{ ſiue}$$

$$\partial y = c\,\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi \left(\frac{\delta - \text{tang. } \Phi}{\delta \text{ tang. } \Phi + 1}\right).$$

Quare cum ſit $\delta =$ tang. $\alpha$, erit

$$\partial y = c\,\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi \left(\frac{\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \Phi}{1 + \text{tang. } \alpha \text{ tang. } \Phi}\right), \text{ ſiue}$$

$$\partial y = c\,\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi \text{ tang. } (\alpha - \Phi).$$

Hic porro loco $\Phi$ ſcribatur $\alpha - (\alpha - \Phi)$, vt fiat

$$\text{coſ. } \Phi = \text{coſ. } \alpha \text{ coſ. } (\alpha - \Phi) + \text{ſin. } \alpha \text{ ſin. } (\alpha - \Phi),$$

quo valore ſubſtituto erit

$$\partial y = c\,\partial\Phi \left[\text{coſ. } \alpha \text{ ſin. } (\alpha - \Phi) + \frac{\text{ſin. } \alpha \text{ ſin. } (\alpha - \Phi)^2}{\text{coſ. } (\alpha - \Phi)}\right], \text{ ſiue}$$

$$\partial y = c\,\partial\Phi \left[\text{coſ. } \alpha \text{ ſin. } (\alpha - \Phi) + \frac{\text{ſin. } \alpha}{\text{coſ. } (\alpha - \Phi)} - \text{ſin. } \alpha \text{ coſ. } (\alpha - \Phi)\right],$$

quae aequatio reducitur ad hanc:

$$\partial y = c\,\partial\Phi \left(\frac{\text{ſin. } \alpha}{\text{coſ. } (\alpha - \Phi)} - \text{ſin. } \Phi\right),$$

hincque integrando eruitur

$$y = c \text{ ſin. } \alpha \int \frac{\partial\Phi}{\text{coſ. } (\alpha - \Phi)} + c \text{ coſ. } \Phi + b.$$

Pro priore membro ſit $\alpha - \Phi = 90^\circ - \omega$, ideoque $\partial\Phi = \partial\omega$, eritque

$$\int \frac{\partial\Phi}{\text{coſ. } (\alpha - \Phi)} = \int \frac{\partial\omega}{\text{ſin. } \omega} = l \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\omega = l \text{ tang. } (45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\Phi),$$

quocirca aequatio integralis erit

$$y = b + c \text{ coſ. } \Phi + c \text{ ſin. } \alpha\, l \text{ tang. } (45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\Phi),$$

exiſtente $x = c$ ſin. $\Phi$. Sicque pro quouis angulo $\Phi$ tam $x$ quam $y$ aſſignare licebit.

## Exemplum 5.

§. 23. Proponatur pro curuis ſecandis haec aequatio: $y = \frac{a}{c}\surd(cc - xx)$, quae complectitur infinitas ellipſes ſuper

eodem axe $= 2c$ conſtructas, et cum ſit

$$\partial y = \frac{\partial a}{c}\sqrt{(cc - xx)} - \frac{ax\partial x}{c\sqrt{(cc-xx)}}, \text{ erit}$$

$$p = -\frac{ax}{c\sqrt{(cc-xx)}} \text{ et } q = \frac{1}{c}\sqrt{(cc-xx)},$$

vnde pro Traiectoria habebitur

$$\partial a(cc - xx) = \frac{\delta\partial x(c^4 + (aa-cc)xx)}{(c\sqrt{(cc-xx)} + \delta ax)},$$

quam aequationem quomodo tractari conueniat, haud facile perſpicitur.

§. 24. Euoluamus igitur caſum quo $\delta = \infty$, pro quo habebimus

$$\partial a(cc - xx) = \frac{(c^4 + (aa-cc)xx)\partial x}{ax}.$$

Ponatur hic $\sqrt{(cc - xx)} = t$, erit $xx = cc - tt$ et $\frac{\partial x}{x} = \frac{-t\partial t}{cc-tt}$, et aequatio noſtra hanc induet formam:

$$att\partial a = -\frac{t\partial t}{(cc-tt)}(aacc - aatt + cctt), \text{ ſiue}$$

$$att\partial a + aat\partial t = -\frac{cct^3\partial t}{cc-tt},$$

vnde integrando fit

$$\tfrac{1}{2}aatt = -cc\int\frac{t^3\partial t}{cc-tt} = \tfrac{1}{2}cctt + c^4 l\sqrt{(cc-tt)} + C.$$

Reſtituto igitur pro $t$ valore $\sqrt{(cc - xx)}$ et per $a$ multiplicando colligitur

$$aa(cc - xx) = C + cc(cc - xx) + c^4 lxx.$$

Verum ex aequatione propoſita eſt $aa = \frac{ccyy}{cc-xx}$, quo valore ſubſtituto habebitur haec aequatio inter $x$ et $y$ pro Traiectoria:

$$yy = bb - xx + cclxx.$$

## Phaenomena harum Traiectoriarum.

Tab. I. Fig. 7. §. 25. Forma harum Traiectoriarum quaedam phaenomena prorſus ſingularia offert, quae, cum non ſint obuia, vberiore explicatione digna videntur. Sit igitur C D $c$ ſemisſis

ſis vniuscuiuscunque illarum ellipſium ſuper axe communi $C A c = 2c$ conſtructarum, cuius ergo alter ſemi-axis $A D$ erit $= a$; et quia omnes hae curuae duobus diametris $C c$ et $D d$ ſunt praeditae, iidem quoque eſſe debent diametri Traiectoriarum, quarum ergo vnius quadrans ſit curua $E G F$, pro qua inter abſciſſam $A X = x$ et $X Y = y$, hanc nacti ſumus aequationem: $yy = bb - xx + cc\,l\,xx$, vbi quidem loco $c$ vnitatem ſcribere licebit, vt ſit $yy = bb - xx + l\,xx$, in qua loco $l\,xx$ non ſcribimus $2\,l\,x$, quia alioquin aequatio fieret imaginaria, ſi $x$ caperetur negatiue. Hoc enim modo aequatio manebit eadem, ſiue tam $x$ quam $y$ ſumantur poſitiue ſiue negatiue.

§. 26. Secundo loco obſeruo, hanc Traiectoriam realem eſſe non poſſe, niſi eius parameter $b$ vnitatem ſuperet, quod ita oſtendo. Ponatur $l\,xx = v$, vt fiat

$$xx = e^v = 1 + v + \frac{vv}{2} + \frac{v^3}{6} + \text{etc.}$$

vnde erit

$$yy = bb - 1 - \frac{vv}{2} - \frac{v^3}{6} - \text{etc.}$$

quae expreſſio, quamdiu $b < 1$, certe eſt negatiua; ſumto autem $b = 1$, fiet $yy = -\frac{vv}{2} - \frac{v^3}{6}$ etc., quae aequatio ſubſiſtere nequit, niſi ſit $v = 0$; tum autem erit $x = 1$ et $y = 0$. Hoc ergo caſu tota Traiectoria $E G F$ coaleſcit in vnico puncto $C$, cui quidem ſimile punctum ex altera parte $c$ reſpondebit.

§. 27. Sit igitur $b > 1$, et ſumto $x = 1 = A C$ erit $yy = bb - 1$, ideoque applicata $C G = \sqrt{(bb - 1)}$. Vtrinque autem aſſignari poterunt puncta $E$ et $F$, vbi applicata $y$ euaneſcet et curua axi normaliter inſiſtet. Cum enim poſito $l\,xx = v$ fiat $bb - 1 - \frac{1}{2}vv - \frac{1}{6}v^3 = 0$, ideoque $bb - 1 = \frac{1}{2}vv + \frac{1}{6}v^3$, euidens eſt pro $v$ dari duplicem valorem, alterum po-

 ſitiuum

ſitiuum, alterum negatiuum. Si enim $bb$ minime vnitatem ſuperet, erit tam $v = +\sqrt{2(bb-1)}$ quam $v = -\sqrt{2(bb-1)}$. Priore caſu abſciſſa $x$ erit vnitate maior et praebebit punctum in Traiectoria F; ſin autem $v$ negatiuum, erit abſciſſa $x$ vnitate minor et valebit pro Traiectoriae puncto E. Pro maioribus autem valoribus ipſius $b$, quia maiorum numerorum logarithmi prae ipſis ſunt valde exigui, pro maiore valore A F erit proxime $xx = bb + lbb$; vnde patet fore $x > b$. Pro negatiuo autem valore fiet proxime $lxx = -bb$, ideoque $xx = \frac{1}{e^{bb}}$, quae quantitas fit quam minima, ſtatim ac $b$ mediocriter vnitatem ſuperauerit, quo ergo caſu punctum E ad A proxime accedit: in ipſum autem incidere nequit, niſi $b$ fiat infinitum.

§. 28. Hinc igitur videmus, maiorem Traiectoriae portionem C G F extra curuas ſecandas cadere, id quod rei naturae aduerſari videtur, quia in hac regione nullae curuae ſecandae occurrere videntur. Verum cum pro curuis ſecandis haec aſſumta ſit aequatio generalis: $y = \frac{a}{c}\sqrt{(cc - xx)}$, vbi litterae $a$ omnes plane valores ſucceſſiue tribui aſſumimus; hinc etiam valores imaginarii excludi non debent, dummodo curuas reales exhibeant. Manifeſtum autem eſt, ſi loco $a$ ſcribatur $a\sqrt{-1}$, tum fore $y = \frac{a}{c}\sqrt{(xx - cc)}$, quae aequatio manifeſto infinitas hyperbolas ad eundem axem tranſuerſum $Cc = 2c$ relatas continet, quae a Traiectoriae portione GF in O normaliter ſecantur.

§. 29. Haec igitur obſeruanda venere pro angulo interſectionis recto; ſin autem interſectiones obliquae deſiderentur, ex hac aequatione:

$$\partial a (cc - xx) = \frac{\delta (c^4 + (aa - cc) xx) \partial x}{c)(cc - xx) + \delta a x}$$

determinandae, ſateri cogimur, nullis artificiis adhibitis hanc aequationem etiamnunc reſolui potuiſſe; atque haec ipſa difficultas plerumque occurrit, quando pro curuis ſecandis aequationes aliquanto magis complicatae accipiuntur; vnde iam olim haec nata eſt quaeſtio: quomodo aequationes pro curuis ſecandis comparatae eſſe debeant, vt aequationem pro Traiectoriis reſoluere liceat? Quod cum generatim neutiquam praeſtari poſſit, caſum prorſus ſingularem hic euoluamus, quandoquidem iam olim hinc pulcherrima incrementa in Analyſi ſunt patefacta.

## Euolutio caſus ſingularis.

§. 30. Conſideremus igitur pro curuis ſecandis aequationem generalem: $\partial y = p \partial x + q \partial a$, vbi $p$ et $q$ eiusmodi ſint functiones ipſarum $x$ et $a$, vt ſit $(\frac{\partial p}{\partial a}) = (\frac{\partial q}{\partial x})$; et quaeſtio iam huc redit, vt aequatio pro Traiectoriis inuenta: $q \partial a = \frac{\delta (1 + pp) \partial x}{\delta p}$, etiam fiat integrabilis, ſiue vt multiplicatorem admittat, quo ea integrabilis reddatur. Quod cum in genere etiam exſequi non liceat, in eos caſus inquiramus, quibus iſte multiplicator eſſe poteſt functio quaepiam ipſius $a$ tantum. Denotet igitur A iſtam functionem, ita vt haec forma $A . q \partial a - \frac{\delta \partial x (1 + pp)}{1 - \delta p}$, euadat integrabilis. Pro quo efficiendo ponatur breuitatis gratiae $\frac{\delta (1 + pp)}{\delta p - 1} = P$, ita vt P ſit functio ipſius $p$; et iam requiritur vt haec formula: $A q \partial a + A P \partial x$, fiat integrabilis.

§. 31. Per regulam igitur generalem eſſe oportet $(\frac{\partial . A q}{\partial x}) = (\frac{\partial . A P}{\partial a})$. Hic autem prior pars euoluta dat $A . (\frac{\partial q}{\partial x})$. Vidimus autem eſſe $(\frac{\partial q}{\partial x}) = (\frac{\partial p}{\partial a})$, ſicque ex hac parte habebimus

A. $(\frac{\partial p}{\partial a})$. Pro altera parte ſit $\partial P = P' \partial p$, vnde quia hic ſola $a$ pro variabili habetur, erit $(\frac{\partial P}{\partial a}) = P . (\frac{\partial p}{\partial a})$, tum vero, quia A eſt functio ſolius $a$, erit $(\frac{\partial A}{\partial a}) = \frac{\partial A}{\partial a}$. Hinc igitur pro altera parte habebimus:

$$(\frac{\partial . AP}{\partial a}) = P . \frac{\partial A}{\partial a} + A P' (\frac{\partial p}{\partial a}).$$

Ex his igitur conditio integrabilitatis erit

$$A (\frac{\partial p}{\partial a}) = P . \frac{\partial A}{\partial a} + A P' (\frac{\partial p}{\partial x}),$$

in qua aequatione ſola quantitas $a$ vt variabilis conſideratur, dum altera $x$ quaſi eſſet conſtans ſpectatur.

§. 32. Tractemus igitur in hac aequatione quantitatem $x$ vt prorſus conſtantem, quo facto erit vtique $(\frac{\partial p}{\partial a}) = \frac{\partial p}{\partial a}$, atque hinc per $d a$ multiplicando orietur iſta aequatio differentialis: $A \partial p = P \partial A + A P' \partial p$, quae, ob $P' \partial p = \partial P$, abit in hanc formam: $A \partial p = P \partial A + A \partial P$, quae per $A P$ diuiſa fit $\frac{\partial p}{P} = \frac{\partial A}{A} + \frac{\partial P}{P}$, cuius omnes termini ſunt integrabiles, propterea quod P eſt functio ipſius $p$. Integrale autem erit

$$\int \frac{\partial p}{P} = l A + l P - l X,$$

vbi loco conſtantis functionem quamcunque ipſius $x$ adiicere licet, ita vt iam habeamus $\int \frac{\partial p}{P} = l \frac{AP}{X}$, haecque aequatio eiusmodi relationem complectitur, vnde Traiectorias quaeſitas definire licebit.

§. 33. Cum igitur noſtro caſu ſit $P = \frac{\delta (1 + pp)}{\delta p - 1}$, erit $\frac{\partial p}{P} = \frac{(\delta p - 1) \partial p}{\delta (1 + pp)}$. Hinc integrando colligitur

$$\int \frac{\partial p}{P} = l \sqrt{(1 + pp)} - \frac{1}{\delta} A \text{ tang. } p,$$

vnde noſtra aequatio erit

$$0 = \frac{1}{\delta} A \text{ tang. } p + l \frac{AP}{X \sqrt{(1 + pp)}}, \text{ ſiue}$$

$$o = \frac{1}{\delta} \text{A tang.}\, p + l \frac{\delta \text{A} \surd(1 + pp)}{(\delta p - 1)\text{X}},$$

ex qua aequatione ſi liceret valorem ipſius $p$ elicere per A et X, vnde ſimul valor ipſius $q$ daretur, pro curuis ſecandis haberetur iſta aequatio: $\partial y = p\, \partial x + q\, \partial a$; pro Traiectoriis autem valeret haec ipſa aequatio, quam modo eruimus inter $x$ et $a$, quarum A et X ſunt functiones quaecunque pro lubitu accipiendae, ita vt hinc iam adipiſcamur aequationem ſatis generalem pro curuis ſecandis, quarum Traiectorias actu exhibere licet.

§. 34. Quoniam autem hinc in genere valorem ipſius $p$ per $x$ et $a$ elicere non licet, caſum euoluamus, quo angulus interſectionis debet eſſe rectus, ſeu $\delta = \infty$; tum igitur fieri debet $l \frac{\text{A} \surd(1 + pp)}{p\text{X}} = o = l\, 1$, ſicque erit $\text{A} \surd(1 + pp) = p\text{X}$, vnde elicitur $p = \frac{\text{A}}{\surd(\text{XX} - \text{AA})}$, ita vt pro curuis ſecandis habeatur haec aequatio differentialis: $\partial y = \frac{\text{A}\, \partial x}{\surd(\text{XX} - \text{AA})} + q\, \partial a$, vbi quidem $q$ eum habet valorem, quem integrabilitas huius formulae poſtulat, ſcilicet vt ſit $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)$. Cum igitur, ſumta ſola A pro variabili, ſit $\partial p = \frac{\text{XX}\, \partial \text{A}}{(\text{XX} - \text{AA})^{\frac{3}{2}}}$, erit

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \text{A}}{\partial a} \times \frac{\text{XX}}{(\text{XX} - \text{AA})^{\frac{3}{2}}}.$$

Quare ſi nunc ſola X pro variabili habeatur, erit

$$\partial q = \frac{\partial \text{A}}{\partial a} \times \frac{\text{XX}\, \partial x}{(\text{XX} - \text{AA})^{\frac{3}{2}}} \text{ hincque}$$

$$q = \frac{\partial \text{A}}{\partial a} \times \int \frac{\text{XX}\, \partial x}{(\text{XX} - \text{AA})^{\frac{3}{2}}},$$

in

in qua formula integrali ſola $x$ pro variabili eſt habenda. Tum vero ipſas Traiectorias ex hac aequatione differentiali:

$$q\,\partial a = -\frac{(1+pp)\partial x}{p} = -\frac{XX\partial x}{A\sqrt{(XX-AA)}},$$

definiri oportet, quae cum per hypotheſin integrabilis ſit facta per A multiplicando, pro Traiectoriis valebit iſta aequatio per ſe integrabilis: $A\,q\,\partial a + \frac{XX\partial x}{\sqrt{(XX-AA)}} = 0$, cuius integrale quantitati conſtanti C aequale poſitum dabit certam relationem inter X et A, ex qua, ſi valor ipſius A per $x$ definitus in aequatione pro curuis ſecandis ſubſtituatur, obtinebitur aequatio inter $x$ et $y$ pro Traiectoriis, iisque infinitis, ſiquidem conſtanti C ſucceſſiue omnes valores tribuantur.

§. 35. Cum igitur hi valores pro $p$ et $q$ inuenti reddant aequationem $\partial y = p\,\partial x + q\,\partial a$ integrabilem, eius integrale vtique erit

$$y = \int p\,\partial x = \int \frac{A\partial x}{\sqrt{(XX-AA)}},$$

ſiquidem hic quantitas A conſtans accipiatur, ita vt pro curvis ſecandis haec habeatur aequatio integralis: $y = \int \frac{A\partial x}{\sqrt{(XX-AA)}}$: ſiquidem in hac integratione parameter $a$ vt conſtans tractetur; vnde patet, quaecunque functio ipſius $x$ pro X accipiatur, hanc aequationem: $y = \int \frac{A\partial x}{\sqrt{(XX-AA)}}$ ſemper eiusmodi continere lineas curuas, et quidem infinitas, ſiquidem poſt integrationem ipſi A vel $a$ omnes poſſibiles valores tribuantur. Tum vero pro omnibus iſtis curuis Traiectorias orthogonales aſſignare licebit ope huius aequationis: $\int \frac{XX\partial x}{\sqrt{(XX-AA)}} = C$; vbi ſcilicet iterum quantitas A vt conſtans eſt tractanda. Ex hac enim, ſi valor ipſius A per X determinetur et in aequatione iam integrata pro curuis ſecandis ſubſtituatur, prodibit aequatio inter $x$ et $y$ pro Traiectoriis, quarum parameter variabilis in littera C continebitur. Cum autem haec in genere non

parum

parum abſtruſa videantur, rem aliquot exemplis illuſtrari conueniet.

## Exemplum 1.

§. 36. Sit $X = \sqrt{x}$ et $A = \sqrt{a}$, vt pro curuis ſecandis prodeat iſta aequatio: $y = \int \frac{\partial x \sqrt{a}}{\sqrt{(x-a)}} = 2\sqrt{(ax - aa)}$, quae infinitas parabolas in ſe comprehendit, quarum vniuscuiusque parameter eſt $= 4a$ et vertex a puncto fixo A diſtat interuallo $= a$. His igitur parabolis deſcriptis Traiectoriae orthogonales ex hac aequatione erunt determinandae: $\int \frac{x \partial x}{\sqrt{(x-a)}} = C$, ſiue integrando pro hic curuis habebimus $\frac{2}{3}(2a + x)\sqrt{(x-a)} = C$. Hac ergo aequatione cum aequatione ſuperiore $y = 2\sqrt{(ax - aa)}$ coniuncta quantitas $a$ eliminetur, et proueniet aequatio inter $x$ et $y$ tantum; calculo autem ſubducto peruenitur ad hanc aequationem:

$$(x^3 + 3xyy + C)^2 = (xx - yy)^3$$

quae eſt pro curua ſexti ordinis.

## Exemplum 2.

§. 37. Sumatur $X = \frac{1}{x}$ et $A = \frac{1}{a}$, et pro curuis ſecandis orietur haec aequatio: $y = \int \frac{x \partial x}{\sqrt{(aa - xx)}} = \sqrt{(aa - xx)}$, quae infinitos complectitur circulos concentricos. Pro Traiectoriis autem aequatio erit $\int \frac{a \partial x}{x\sqrt{(aa - xx)}} = C$, quod quidem integrale eſt tranſcendens. Quoniam autem poſito $x = at$ haec formula fit $\frac{\partial t}{t\sqrt{(1-tt)}} = C$, hinc patet, certam functionem ipſius $t$ conſtantem eſſe debere; ex quo manifeſtum eſt ipſam quantitatem $t$ eſſe conſtantem, hoc eſt $\frac{x}{a}$ erit quantitas conſtans, puta $n$, ita vt ſit $a = \frac{x}{n}$, qui valor in aequatione generali ſubſtitutus praebet $y = \frac{x\sqrt{(1-nn)}}{n}$, quae aequatio manifeſto continet infinitas lineas rectas, hicque caſus eo magis eſt notatu dignus, quod, ſi more ſo-

lito integrationem perficere voluiſſemus, vix patuiſſet quomodo inde ad Traiectorias rectas perueniri potuiſſet.

§. 38. Ex his abunde perſpicitur, quam profundae indaginis fuerit inueſtigatio huius aequationis: $y = \int \frac{A \partial x}{\sqrt{xx - AA}}$, ſiquidem ex natura functionum binarum variabilium eſt deducta, quae illo tempore prorſus adhuc erat ignorata. Primus autem, qui hoc praeclariſſimum ſpecimen talis Analyſeos in medium attulit, iam ante ſexaginta annos, fuit acutiſſimus *Nicolaus Bernoulli*, Nicolai filius, Profeſſor Iuris in Vniuerſitate Baſilienſi; cui ergo maxima incrementa, quae hinc deinceps in Analyſin ſunt inducta, potiſſimum accepta ſunt referenda.

§. 39. Quanquam autem hoc modo aequatio ſatis generalis pro curuis ſecandis eſt exhibita, vnde Traiectorias eruere licet; tamen ad hoc moleſtiſſimo calculo, vti vidimus, eſt opus, et curuae, quae hinc deducuntur, plerumque maxime ſunt tranſcendentes. Vnde ſi deſiderentur Traiectoriae algebraicae, hinc nullum fere ſubſidium exſpectare licet. At ſequens caſus, vbi ipſum parametrum variabilem $a$ per ambas coordinatas $x$ et $y$ exprimi aſſumimus, foecundiſſimum fontem Traiectorias algebraicas inueniendi largietur.

## Caſus II.

### Quo parameter variabilis $a$ per binas coordinatas $x$ et $y$ exprimi poteſt.

§. 40. Cum igitur hoc caſu parameter $a$ aequetur certae functioni binarum coordinatarum $x$ et $y$, aequatio differentialis talem habebit formam: $\partial a = p \partial x + q \partial y$, vbi $p$ et $q$ eiusmodi erunt functiones ipſarum $x$ et $y$, vt ſit $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$ et ex curuis ſecandis conſideremus vnamquamque E Y F, quam

Tab. I. Fig. 5.

Tra-

Traiectoria ſecet in puncto Y, ſitque angulus, ſub quo haec interſectio fieri debet $= \alpha$. Iam quia idem punctum Y tam in curua ſecanda quam in Traiectoria exſiſtit, eiusque locus per easdem coordinatas $AX = x$ et $XY = y$ determinatur; quatenus id punctum Y in curua ſecanda exſiſtit, erit $\partial a = p\,\partial x + q\,\partial y$; quatenus autem in Traiectoria exſiſtit, relatio inter $x$ et $y$ nunc demum explorari debet. Ducatur nunc recta YT, quae curuam ſecandam tangat in Y, atque ad poſitionem huius rectae inueniendam, quoniam ad eandem curuam ſecandam refertur, parameter $a$ pro inuariabili accipi debebit, vnde habemus $\partial y = -\frac{p\,\partial x}{q}$, hincque $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q}$; vbi manifeſtum eſt fractionem $-\frac{p}{q}$ exprimere tangentem anguli XTY, qui ſi vocetur $= \tau$, erit tang. $\tau = -\frac{p}{q}$. At vero pro Traiectoria, ſit eius tangens pro eodem puncto Y recta Y$\Theta$, exiſtente angulo X$\Theta$Y $= \theta$, erit vtique $\frac{\partial y}{\partial x} =$ tang. $\theta$, vbi relatio inter $y$ et $x$ reſpicit Traiectoriam.

§. 41. Cum igitur angulus interſectionis TY$\Theta$ debeat eſſe $= \alpha$, erit $\theta = \tau + \alpha$, hincque tang. $\theta = \frac{\text{tang.}\,\alpha + \text{tang.}\,\tau}{1 - \text{tang.}\,\alpha.\,\text{tang.}\,\tau}$; vnde ſubſtitutis valoribus habebitur pro Traiectoriis haec aequatio: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q\,\text{tang.}\,\alpha - p}{q + p\,\text{tang.}\,\alpha}$, ac ſi, vt hactenus, pro tang. $\alpha$ ſcribamus $\delta$, erit $\partial y = \frac{(\delta q - p)\,\partial x}{q + \delta p}$; vnde ſi angulus interſectionis $\alpha$ debeat eſſe rectus, pro Traiectoriis rectangulis valebit haec aequatio: $\partial y = \frac{q\,\partial x}{p}$, ſiue $p\,\partial y = q\,\partial x$; ſin autem angulus interſectionis $\alpha$ debeat euaneſcere, vt ſit $\delta = 0$, erit $\partial y = -\frac{p\,\partial x}{q}$, ſiue $p\,\partial x + q\,\partial y = 0$. Cum igitur ſit $\partial a = p\,\partial x + q\,\partial y$, patet, hoc caſu fore $\partial a = 0$, ita vt $a$ conſtans eſſe debeat: hoc ſcilicet caſu Traiectoriae cum ipſis curuis ſecandis conueniunt. Quo igitur vis huius methodi clarius perſpiciatur, eam aliquot exemplis illuſtremus.

## Exemplum 1.

§. 42. Sint primo omnes curuae ſecandae lineae rectae, ex eodem axis puncto A eductae, pro quibus aequatio generalis erit $y = \frac{ax}{b}$, vbi $a$ ſpectetur tanquam parameter variabilis, manente $b$ conſtante. Ex hac igitur aequatione erit $a = \frac{by}{x}$ hincque $\partial a = \frac{bx\partial y - by\partial x}{xx}$, vnde fit $p = -\frac{by}{xx}$ et $q = \frac{b}{x}$, quare pro Traiectoriis orietur haec aequatio:

$$\partial y = \frac{(\delta x + y)\partial x}{x - \delta y}, \text{ ſiue } \partial y(x - \delta y) = \partial x(\delta x + y).$$

Hac ſcilicet methodo pro Traiectoriis ſtatim peruenimus ad aequationem differentialem inter $x$ et $y$, dum methodo praecedente demum per plures ambages talem aequationem elicere oportebat, quam ob cauſſam haec methodus praecedente longe anteferenda videtur.

§. 43. Pro his Traiectoriis ſtatuamus primo angulum interſectionis $\alpha$ rectum, vt ſit $\delta = \infty$, eritque noſtra aequatio $x\partial x + y\partial y$, cuius integrale ſtatim dat $xx + yy = cc$, quae aequatio continet infinitos circulos concentricos ex ipſo puncto A deſcriptos, quorum ſcilicet radius $c$ vt variabilis ſpectari poteſt.

§. 44. Pro angulis autem obliquis aequatio hac forma repraeſentetur: $x\partial y - y\partial x = \delta(x\partial x + y\partial y)$, quae per $xx + yy$ diuiſa ſponte fit integrabilis: erit enim

$$\int \frac{x\partial y - y\partial x}{xx + yy} = \text{A tang.} \frac{y}{x}, \text{ ac}$$

$$\int \frac{x\partial x + y\partial y}{xx + yy} = l\sqrt{(xx + yy)}$$

ſicque habebitur

$$\text{A tang.} \frac{y}{x} = \delta l \sqrt{(xx + yy)}.$$

Quodſi iam vocetur angulus XAY $= \omega$, vt ſit tang. $\omega = \frac{y}{x}$ et

AY =

$AY = z = \sqrt{(xx+yy)}$, erit $\omega = \delta l z$, ita vt iſte angulus metiatur logarithmum diſtantiae $AY = z$, quae ergo lineae erunt ſpirales logarithmicae rectas ſingulas A Y ſub angulo cuius tangens $= \delta$ ſecantes.

## Exemplum 2.

§. 45. Sint curuae ſecantes omnes circuli axem A X in A normaliter ſecantes, hac aequatione: $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, contenti, eritque $a = \frac{xx+yy}{2x}$ hincque differentiando

$$\partial a = \frac{\partial x(xx-yy)}{2xx} + \frac{y\partial y}{x},$$

vnde fit $p = \frac{xx-yy}{2xx}$ et $q = \frac{y}{x}$. Cum igitur in genere inuenta ſit haec aequatio:

$$\partial y(q + \delta p) = \partial x(\delta q - p),$$

erit pro hoc caſu

$$\partial y[2xy + \delta(xx-yy)] = \partial x(2\delta xy - xx + yy), \text{ ſiue}$$
$$\delta(xx-yy)\partial y - 2\delta xy\partial x = (yy-xx)\partial x - 2xy\partial y.$$

§. 46. Quoniam autem haec aequatio eſt homogenea, ſtatim ponatur $y = tx$, vt ſit $\partial y = t\partial x + x\partial t$, et aequatio noſtra hanc induet formam: $x\partial t = \frac{(1+tt)(\delta t - 1)\partial x}{2t + \delta(1-tt)}$, vnde fit

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t(2t + \delta(1-tt))}{(1+tt)(\delta t - 1)}$$

quae fractio in duas partes reſoluta praebet

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{2t\partial t}{1+tt} + \frac{\delta\partial t}{\delta t - 1}$$

cuius integrale manifeſto eſt

$$lx = -l(1+tt) + l(\delta t - 1) + lc$$

ſiue $x = \frac{c(\delta t - 1)}{1+tt}$, et reſtituto valore $t = \frac{y}{x}$, erit $x = \frac{cx(\delta y - x)}{xx+yy}$, quae reducitur ad hanc formam; $xx + yy = c(\delta y - x)$, quae aequatio, vt iam ſupra eſt oſtenſum, complectitur infinitos circulos

culos ſuper axe obliquo diſpoſitos et per idem punctum fixum A tranſeuntes.

## Exemplum 3.

§. 47. Euoluamus exemplum multo latius patens, vbi A aequetur functioni cuicunque homogeneae nullius dimenſionis ipſarum $x$ et $y$. Poſito igitur $y = t x$ parameter aequabitur functioni ſolius quantitatis $t$, quae ſit T, ita vt ſit $a = T$. Ponamus autem $\partial T = T' \partial t$, ita vt ſit $\partial a = T' \partial t$. Vt autem hinc valores litterarum $p$ et $q$ definire queamus, loco $\partial t$ ſcribamus valorem $\frac{x \partial y - y \partial x}{x x}$, eritque $p = -\frac{T' y}{x x} = -\frac{T' t}{x}$ et $q = \frac{T'}{x}$. Hi autem valores in aequatione $\partial y = (\frac{\delta q - p}{q + \delta p}) \partial x$ ſubſtituti praebent $\partial y = \frac{(\delta + t)}{1 - \delta t} \partial x = t \partial x + x \partial t$, vnde colligitur fore $\frac{\partial x}{x} = \frac{(1 - \delta t) \partial t}{\delta (1 + t t)}$.

§. 48. Hic omnino notatu dignum occurrit, quod ratio ipſius functionis T ex calculo ſit egreſſa. Conſideremus autem primo caſum quo $\delta = \infty$, eritque $\frac{\partial x}{x} = \frac{-t \partial t}{1 + t t}$, vnde fit $l x = l c - l \sqrt{(1 + t t)}$, ſiue $x = \frac{c}{\sqrt{(1 + t t)}} = \frac{c x}{\sqrt{(x x + y y)}}$, quae ergo aequatio dat $\sqrt{(x x + y y)} = c$, prorſus vt in exemplo primo, id quod mirum eſt. Cum enim hic ſit $T = a$, ideoque conſtans, pro qualibet curua ſecanda erit etiam $t$, hoc eſt $\frac{y}{x}$, conſtans, ita vt etiam hoc caſu omnes lineae ſecandae ſint rectae. Ita etiam pro angulis obliquis Traiectoriae erunt ſpirales logarithmicae.

## Exemplum 4.

§. 49. Aequetur parameter variabilis $a$ functioni cuicunque homogeneae ipſarum $x$ et $y$, cuius dimenſionum numerus ſit $n$, quae igitur, poſito $y = t x$, accipiet hanc formam: $x^n . T$, ita vt T ſit certa functio ipſius $t$ tantum, cuius

ius differentiale ergo habebit hanc formam: $\partial T = T' \partial t$. Hinc igitur cum ſit $a = x^n T$, erit

$$\partial a = x^n T' \partial t + n x^{n-1} T \partial x,$$

vbi cum ſit $t = \frac{y}{x}$, erit $\partial t = \frac{\partial y}{x} - \frac{y \partial x}{xx}$; vnde, ſi haec forma cum generali $\partial a = p \partial x + q \partial y$ comparetur, erit $q = x^{n-1} T'$ et $p = n x^{n-1} T - x^{n-2} y T' = n x^{n-1} T - x^{n-1} T' t$. Iam aequatio pro Traiectoriis hac forma expreſſa repraeſentetur:

$$p \partial x + q \partial y = \delta (q \partial x - p \partial y)$$

atque habebimus

$$p \partial x + q \partial y = \partial a = x^n T' \partial t + n x^{n-1} T \partial x, \text{ at}$$

$$q \partial x - p \partial y = x^{n-1} T' \partial x - n x^{n-1} T \partial y + x^{n-1} T' t \partial y$$

$$= x^{n-1} T' \partial x - n x^{n-1} T t \partial x + x^{n-1} T' t t \partial x$$

$$- n x^n T \partial t + x^n T' t \partial t, \text{ ſiue}$$

$$q \partial x - p \partial y = x^{n-1} \partial x (T'(1+tt) - nTt) - x^n \partial t (nT - T't),$$

quibus valoribus ſubſtitutis aequatio pro Traiectoria, per $x^{n-1}$ diuiſa, erit

$$x T' \partial t + n T \partial x = \delta \partial x (T'(1+tt) - nTt) - \delta x \partial t (nT - T't).$$

Quoniam haec aequatio duas tantum variabiles $x$ et $t$ inuoluit, eae ſponte a ſe inuicem ſeparantur: reperietur enim

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\delta \partial t (nT - T't) + T' \partial t}{\delta (T'(1+tt) - nTt) - nT}.$$

Quodſi ergo haec formula per ſolos logarithmos integrari poterit, obtinebitur aequatio algebraica pro Traiectoriis. Generatim autem hoc caſu conſtructio Traiectoriarum nulla prorſus laborat difficultate.

§. 50. Pro Traiectoriis igitur rectangulis, vbi $\delta = \infty$, habebitur iſta aequatio: $\frac{\partial x}{x} = \frac{(nT - T't)\partial t}{T'(1+tt) - nTt}$, quae, cum ſit $T' \partial t$

$= \partial T$

$=\partial T$ erit $\frac{\partial x}{x}=\frac{nT\partial t-t\partial T}{T'(1+tt)-nTt}$. At ſi angulus interſectionis debeat euaneſcere, vt ſit $\delta=0$, fiet $\frac{\partial x}{x}=-\frac{T'\partial t}{nT}=-\frac{\partial T}{nT}$, cuius integrale eſt $lx=-\frac{1}{n}lT$, ſiue $x^n T=a$, quae eſt aequatio pro qualibet curua ſecanda, ita vt hinc videatur nullas alias dari curuas, quae omnes ſecandas tangant, cum tamen praecedente caſu aliae quoque inuentae ſint huiusmodi curuae, contentae ſcilicet in aequatione $q=0$ (vide §. 12). Verum quoniam hic terminos per $\delta$ affectos deleuimus, probe perpendendum eſt, id tantum fieri licere, ſi quantitates per $\delta$ multiplicatae non fiant infinitae; quamobrem, ſi eueniat, vt iſtae quantitates in infinitum excreſcere poſſint, tum ex iis eae curuae, quae omnes propoſitas tangant, deduci poſſunt.

§. 51. Hic autem imprimis notari meretur, quod iſte caſus, quo parameter $a$ per functionem binarum coordinatarum $x$ et $y$ exprimitur, facilem nobis largiatur methodum, innumerabiles caſus aſſignandi, quibus tam curuae ſecandae quam Traiectoriae fiant lineae algebraicae, quam inueſtigationem in caſu praecedente ne tentare quidem licuerat. Hanc ergo quaeſtionem maximi momenti in ſequente problemate expediamus.

## Problema.

*Inueſtigare innumeros caſus, quibus tam curuae ſecandae quam Traiectoriae omnes euadant lineae algebraicae.*

## Solutio.

§. 52. Quia pro curuis ſecandis poſuimus $\partial a=p\partial x+q\partial y$, primo neceſſe eſt vt formula $p\partial x+q\partial y$ admittat integrale algebraicum, quod ponatur $=P$, ita vt ſit $a=P$ et $\partial P=p\partial x+q\partial y$. Deinde vero, quia pro Traiectoriis ſub interſectionis angulo quocunque $\alpha$, cuius tangentem hic poſuimus $=\delta$, nacti ſumus hanc aequationem: $p\partial x+q\partial y$

$=\delta$

$= \delta (q \partial x - p \partial y)$, requiritur vt etiam haec aequatio reddatur integrabilis: cum autem eius pars prior $p \partial x + q \partial y$ iam per ſe ſit integrabilis, id tantum requiritur, vt etiam alterius partis $q \partial x - p \partial y$ integrale algebraicum efficiatur. Quod ſi ergo hoc integrale deſignemus littera Q, vt ſit $\partial Q = q \partial x - p \partial y$, erit pro Traiectoriis $\partial P = \delta \partial Q$, vnde aequatio integrata pro Traiectoriis colligitur $P = \delta Q + C$, vbi conſtans dabit parametrum variabilem pro omnibus Traiectoriis, quarum ergo aequatio hoc modo referri poterit: $b = P - \delta Q$, dum pro curuis ſecandis valet iſta aequatio: $a = P$.

§. 53. Totum ergo negotium huc eſt reductum, vt ſequentibus binis conditionibus ſatisfiat:

I. $\partial P = p \partial x + q \partial y$.

II. $\partial Q = q \partial x - p \partial y$.

Scilicet pro his litteris P et Q eiusmodi quantitates algebraicas ſiue functiones coordinatarum $x$ et $y$ ſcrutari oportet, vt hae duae conditiones adimpleantur. Hunc in finem multiplicemus priorem per $f$ poſteriorem vero per $g$, quae litterae denotent quantitates conſtantes quascunque, ac manifeſtum eſt, etiam hanc aequationem:

$$f \partial P + g \partial Q = p (f \partial x - g \partial y) + q (f \partial y + g \partial x),$$

effici debere integrabilem, et quoniam $f$ et $g$ ab arbitrio noſtro pendent, eas ita definiamus, vt ambae formulae differentiales $f \partial x - g \partial y$ et $f \partial y + g \partial x$ conſtantem inter ſe teneant rationem. Statuamus igitur

$$f \partial x - g \partial y : g \partial x + f \partial y = f : g,$$

vnde naſcitur iſta determinatio $f f = - g g$. Hinc ſi ſtatuamus $f = 1$, erit $g = \pm \sqrt{-1}$, quae determinatio, etſi imaginaria, tamen nobis egregiam ſolutionem ſuppeditabit.

§. 54. Quoniam igitur duplicem determinationem eliciumus, ſit primo $f = 1$ et $g = +\sqrt{-1}$ et poſtrema aequalitas induet hanc formam:

$$\partial P + \partial Q \sqrt{-1} = p(\partial x - \partial y \sqrt{-1}) + q(\partial y + \partial x \sqrt{-1}),$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\partial P + \partial Q \sqrt{-1} = p(\partial x - \partial y \sqrt{-1}) - \tfrac{q}{\sqrt{-1}}(\partial x - \partial y \sqrt{-1}),$$

hoc eſt

$$\partial P + \partial Q \sqrt{-1} = (p - \tfrac{q}{\sqrt{-1}})(\partial x - \partial y \sqrt{-1}),$$

quae formula cum debeat eſſe integrabilis, neceſſe eſt, vt $p - \frac{q}{\sqrt{-1}}$ ſit functio ipſius $x - y\sqrt{-1}$; tum autem etiam integrale erit functio formulae $x - y\sqrt{-1}$, quam more iam ſatis recepto ita deſignemus $\Gamma : (x - y\sqrt{-1})$, ſicque habebimus hanc aequalitatem $P + Q\sqrt{-1} = \Gamma : (x - y\sqrt{-1})$.

§. 55. Simili modo, ſi ponamus $f = 1$ et $g = -\sqrt{-1}$, habemus $\partial P - \partial Q \sqrt{-1})$

$$= p(\partial x + \partial y \sqrt{-1}) + q(\partial y - \partial x \sqrt{-1})$$

$$= p(\partial x + \partial y \sqrt{-1}) + \tfrac{q}{\sqrt{-1}}(\partial x + \partial y \sqrt{-1})$$

ideoque

$$\partial P - \partial Q \sqrt{-1} = (p + \tfrac{q}{\sqrt{-1}})(\partial x + \partial y \sqrt{-1})$$

quae aequatio cum debeat eſſe integrabilis, neceſſe eſt vt $p + \frac{q}{\sqrt{-1}}$ ſit functio formulae $x + y\sqrt{-1}$; tum autem etiam integrale functio erit eiusdem formulae, quae ſi deſignetur hoc modo: $\Delta : (x + y\sqrt{-1})$, nanciſcemur integrando

$$P - Q\sqrt{-1} = \Delta : (x + y\sqrt{-1}).$$

Ex his autem duabus aequationibus inuicem additis colligitur fore

$$2P = \Gamma : (x - y\sqrt{-1}) + \Delta : (x + y\sqrt{-1}):$$

poſte-

poſterior vero a priore ſubtracta dabit

$$2 Q \sqrt{-1} = \Gamma : (x - y \sqrt{-1}) - \Delta : (x + y \sqrt{-1}).$$

§. 56. Ex his igitur, per formulas quidem imaginarias, adepti ſumus tam pro P quam pro Q idoneas functiones ipſarum $x$ et $y$ noſtro problemati ſatisfacientes, quandoquidem erit

$$P = \tfrac{1}{2} \Gamma : (x - y \sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2} \Delta : (x + y \sqrt{-1});$$

$$Q = \tfrac{1}{2 \sqrt{-1}} \Gamma : (x - y \sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2 \sqrt{-1}} \Delta : (x + y \sqrt{-1});$$

vel ſi $\sqrt{-1}$ negatiue accipiamus, habebimus

$$P = \tfrac{1}{2} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2} \Delta : (x - y \sqrt{-1});$$

$$Q = \tfrac{-1}{2 \sqrt{-1}} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2 \sqrt{-1}} \Delta : (x - y \sqrt{-1}).$$

His autem valoribus repertis pro curuis ſecandis habebitur iſta aequatio: $a = P$; pro Traiectoriis autem haec: $b = P - \delta Q$.

§. 57. Solutionem igitur noſtri problematis impetravimus maxime generalem, namque pro curuis ſecandis obtinuimus hanc aequationem:

$$a = \tfrac{1}{2} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2} \Delta : (x - y \sqrt{-1}),$$

pro Traiectoriis vero, ſub angulo quocunque $\alpha$, cuius tangens eſt $\delta$, hanc:

$$b = \tfrac{1}{2} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2} \Delta : (x - y \sqrt{-1})$$
$$+ \tfrac{\delta}{2 \sqrt{-1}} \Gamma : (x + y \sqrt{-1}) - \tfrac{\delta}{2 \sqrt{-1}} \Delta : (x - y \sqrt{-1}),$$

vbi $a$ denotat parametrum variabilem curuarum ſecandarum et $b$ parametrum variabilem Traiectoriarum; manifeſtum autem eſt, vtramque aequationem fore algebraicam, ſi modo characteres $\Gamma$ et $\Delta$ denotent functiones algebraicas.



§. 58.

§. 58. Vt autem has aequationes ab imaginariis liberemus, euidens eſt, id obtineri, ſi $\Delta$ eandem functionem ſuae quantitatis $x - y\sqrt{-1}$ deſignet, qualis functio $\Gamma$ eſt ſuae quantitatis $x + y\sqrt{-1}$; tum enim, ſi ambae hae functiones addantur, omnes termini imaginarii ſe mutuo tollent, reales vero duplicabuntur, vnde pro P prodibit functio realis; ſin autem altera formula ab altera ſubtrahatur, termini reales deſtruentur et ſoli imaginarii duplicabuntur, qui ergo per $2\sqrt{-1}$ diuiſi euadent reales, ita vt hoc caſu etiam pro Q prodeat valor realis. Hanc ob rem loco $\Delta$ ſcribamus $\Gamma$, et ambae noſtrae aequationes erunt:

Pro curuis ſecandis:

$$a = \tfrac{1}{2}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma : (x - y\sqrt{-1}).$$

Pro Traiectoriis.

$$b = \tfrac{1}{2}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma : (x - y\sqrt{-1})$$
$$\frac{+\delta}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) - \frac{\delta}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x - y\sqrt{-1}).$$

§. 59. Quo nunc has formulas propius ad vſum noſtrum accommodemus, ponamus breuitatis gratia

$$P = \tfrac{1}{2}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma : (x - y\sqrt{-1}) \text{ et}$$
$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x - y\sqrt{-1}),$$

vt pro curuis ſecandis habeatur haec aequatio: $a = P$ et pro Traiectoriis $b = P + \delta Q$; vnde ſtatim patet, hanc ſolutionem multo latius patere, quam primo intuitu eſt viſa. Si enim ſucceſſiue functioni $\Gamma$ alias atque alias ſignificationes tribuamus, ex quibus oriantur bini valores $P'$ et $Q'$, tum vero etiam $P''$ et $Q''$, porro pariter $P'''$ et $Q'''$ etc.; tum, ſi pro ſecandis accipiatur iſta aequatio $a = P + P' + P'' + P''' +$ etc. pro Traiectoriis valebit iſta:

$$b = P + \delta Q, \ + P' + \delta Q', \ + P'' + \delta Q'', \ + P''' + \delta Q''', \text{ etc.}$$

Quin

Quin etiam ſingulos hos valores per quantitates conſtantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. multiplicare licebit, ita vt pro ſecandis habeatur

$$a = \mathfrak{A}\,P + \mathfrak{B}\,P' + \mathfrak{C}\,P'' + \mathfrak{D}\,P''' \text{ etc.}$$

pro Traiectoriis vero:

$$b = \mathfrak{A}\,P + \mathfrak{B}\,P' + \mathfrak{C}\,P'' + \text{ etc.}$$
$$+ \delta\,\mathfrak{A}\,Q + \delta\,\mathfrak{B}\,Q' + \delta\,\mathfrak{C}\,Q'' + \text{ etc.}$$

vnde patet numerum ſolutionum in infinitum facile augeri poſſe.

§. 60. Cum igitur quaelibet functio $\Gamma$ certos valores pro P et Q ſuppeditet, caſus ſimpliciores euoluamus, quibus character $\Gamma$ denotat ſimplices poteſtates, quos ſequenti modo exhibeamus:

I. Si $\Gamma = (\ )^1$ erit $P = x$ et $Q = y$.

II. Si $\Gamma = (\ )^2$ erit $P = xx - yy$ et $Q = 2xy$.

III. Si $\Gamma = (\ )^3$ erit $P = x^3 - 3xxy$ et $Q = 3xxy - y^3$.

IV. Si $\Gamma = (\ )^4$ erit $P = x^4 - 6xxyy + y^4$ et $Q = 4x^3y - 4xy^3$.

V. Si $\Gamma = (\ )^5$ erit $P = x^5 - 10x^3yy + 5xy^4$
et $Q = 5x^4y - 10xxy^3 + y^5$.

VI. Si $\Gamma = (\ )^6$ erit $P = x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6$ et
$Q = 6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5$.

VII. Si $\Gamma = (\ )^7$ erit $P = x^7 - 21x^5yy + 35x^3y^4 - 6xy^6$ et
$Q = x^6y - 35x^4y^3 + 21xxy^5 - y^7$.

VIII. Si $\Gamma = (\ )^8$ erit $P = x^8 - 28x^6yy + 70x^4y^4 - 28xxy^6 + y^8$
et $Q = 8x^7y - 56x^5y^3 + 56x^3y^5 - 8xy^7$.

IX. Si $\Gamma = (\ )^9$ erit $P = x^9 - 36x^7yy + 126x^5y^4 - 84x^3y^6 + 9xy^8$
et $Q = 9x^8y - 84x^6y^3 + 126x^4y^5 - 36xxy^7 + y^9$.

X. Si $\Gamma = (\ )^{10}$ erit $P = x^{10} - 45x^8yy + 210x^6y^4 - 210x^4y^6 + 45xxy^8 - y^{10}$
et $Q = 10x^9y - 120x^7y^3 + 252x^5y^5 - 120x^3y^7 + 10xy^9$.

§. 61. Quoniam hi valores pro P et Q ſecundum dimenſiones coordinatarum $x$ et $y$ ordine aſcendunt, ex quolibet linearum ordine tam lineas ſecandas quam Traiectorias exhibere licebit, et quidem eo plures, quo altior fuerit ordo, quoniam pro quolibet ordine valores inferiores implicari posſunt. Quamobrem aequationes tam pro ſecandis quam pro Traiectoriis ad ſingulos ordines pertinentibus hic exhibeamus.

*Pro ordine primo.*

$a = \mathfrak{A}x$ et $b = \mathfrak{A}x + \delta\mathfrak{A}y$.

*Pro ordine ſecundo.*

$a = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}(xx - yy)$ et

$b = \mathfrak{A}x + \delta\mathfrak{A}y + \mathfrak{B}(xx - yy) + 2\delta\mathfrak{B}xy$.

*Pro ordine tertio.*

$a = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}(xx - yy) + \mathfrak{C}(x^3 - 3xyy)$ et

$b = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}(xx - yy) + \mathfrak{C}(x^3 - 3yy)$

$+ \delta\mathfrak{A}y + 2\delta\mathfrak{B}xy + \delta\mathfrak{C}(3xxy - y^3)$.

*Pro ordine quarto.*

$a =$ Praeced. $+ \mathfrak{D}(x^4 - 6xxyy + y^4)$;

$b =$ Praeced. $+ \mathfrak{D}(x^4 - 6xxyy + y^4)$

$+$ Praeced. $+ \mathfrak{D}(4x^3y + 4xy^3)$.

*Pro ordine quinto.*

$a =$ Praeced. $+ \mathfrak{E}(x^5 - 10x^3yy + 5xy^4)$;

$b =$ Praeced. $+ \mathfrak{E}(x^5 - 10x^3yy + 5xy^4)$

$+$ Praeced. $+ \delta\mathfrak{E}(5x^4y - 10xxy^3 + y^5)$.

*Pro ordine ſexto.*

$a =$ Praeced. $+ \mathfrak{F}(x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6)$;

$b =$ Praeced. $+ \mathfrak{F}(x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6)$

$+$ Praeced. $+ \delta\mathfrak{F}(6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5)$.

etc.

§. 62. Quin etiam pro functione Γ poteſtates negatiuas accipere licet, ad quod expediendum ſit in genere

$$P = \tfrac{1}{2}(x + y\sqrt{-1})^{-n} + \tfrac{1}{2}(x - y\sqrt{-1})^{-n}$$

quae ad exponentes poſitiuos reducatur, eritque

$$P = \frac{\tfrac{1}{2}(x - y\sqrt{-1})^n + \tfrac{1}{2}(x + y\sqrt{-1})^n}{(xx + yy)^n}.$$

Simili modo, ſi ponatur

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x + y\sqrt{-1})^{-n} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x - y\sqrt{-1})^{-n}$$

facta reductione ad exponentes poſitiuos fiet

$$Q = \frac{(x - y\sqrt{-1})^n - (x + y\sqrt{-1})^n}{2(xx + yy)^n\sqrt{-1}}.$$

Hinc igitur ſi exponenti $n$ ſucceſſiue tribuamus valores 1, 2, 3, 4 etc. obtinebimus ſequentes valores

I. Si $n = 1$ erit $P = \frac{x}{xx + yy}$ et $Q = -\frac{y}{xx + yy}$,

II. Si $n = 2$ erit $P = \frac{xx - yy}{(xx + yy)^2}$ et $Q = -\frac{2xy}{(xx + yy)^2}$,

III. Si $n = 3$ erit $P = \frac{x^3 - 3xyy}{(xx + yy)^3}$ et

$$Q = \frac{-3xxy + y^3}{(xx + yy)^3},$$

IV. Si $n = 4$ erit $P = \frac{x^4 - 6xxyy + y^4}{(xx + yy)^4}$ et

$$Q = \frac{-4x^3y + 4xy^3}{(xx + yy)^4},$$

V. Si $n = 5$ erit $P = \frac{x^5 - 10x^3yy + 5xy^4}{(xx + yy)^5}$ et

$$Q = \frac{-5x^4y + 10xxy^3 - y^5}{(xx + yy)^5},$$

VI. Si $n = 6$ erit $P = \frac{x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6}{(xx + yy)^6}$ et

$$Q = \frac{-6x^5y + 20x^3y^3 - 6xy^5}{(xx + yy)^6}.$$

Hinc igitur multitudo curuarum ſatisfacientium ſupra exhibita multo magis augeri poterit.

§. 63.

§. 63. Praeterea vero etiam exponentes fractos adhibere licebit, ſi modo fractiones in hac forma $\frac{n}{2}$ contineantur, quoniam, ſi aliae partes admitterentur, tum quantitates P et Q non amplius euolui poſſent, ſed demum per reſolutionem aequationum erui deberent. Sit igitur

$$P = \tfrac{1}{2}(x + y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n} + \tfrac{1}{2}(x - y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n}$$

et ſumtis quadratis erit

$$PP = \tfrac{1}{4}(x+y\sqrt{-1})^n + \tfrac{1}{4}(x-y\sqrt{-1})^n + \tfrac{1}{2}(xx+yy)^{\frac{1}{2}n},\ \text{ſiue}$$

$$2PP = \tfrac{1}{2}(x+y\sqrt{-1})^n + \tfrac{1}{2}(x-y\sqrt{-1})^n + (xx+yy)^{\frac{1}{2}n},$$

vbi cum binae partes imaginariae iam ſupra realiter ſint explicatae, hinc valor realis pro P eruitur. Simili modo ſi ponatur

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x + y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x - y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n},$$

erit ſumtis quadratis

$$-4QQ = (x+y\sqrt{-1})^n + (x-y\sqrt{-1})^n - 2(xx+yy)^{\frac{1}{2}n},$$

vbi iterum partes imaginariae ſe mutuo tollunt.

§. 64. Ad hoc oſtendendum ſit $n = 1$ eritque

$$2PP = x + \sqrt{(xx+yy)} \text{ ideoque } P = \sqrt{\left(\frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{2}\right)};$$

deinde eſt $-4QQ = 2x - 2\sqrt{(xx+yy)}$, vnde fit

$$Q = \sqrt{\frac{-x+\sqrt{(xx+yy)}}{2}}.$$

Eodem modo ſi ſit $n = 3$, erit

$$2PP = x^3 - 3xyy + (xx+yy)^{\frac{3}{2}} \text{ hincque}$$

$$P = \sqrt{\left(\frac{x^3 - 3xyy + (xx+yy)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)};$$

de-

deinde pro Q habebitur haec aequatio:

$$-2QQ = x^3 - 3xyy - (xx+yy)^{\frac{3}{2}} \text{ ideoque}$$

$$Q = \sqrt{\left(\frac{-x^3 + 3xyy + (xx+yy)^{\frac{3}{2}}}{2}\right)}.$$

Similique modo multitudo valorum idoneorum pro P et Q vlterius augeri poteſt. Quin etiam, ſi ſumere velimus $n = -k$, erit

$$2PP = \frac{1}{2(x+y\sqrt{-1})} + \frac{1}{2(x-y\sqrt{-1})} + \frac{1}{\sqrt{(xx+yy)}}, \text{ ſiue}$$

$$2PP = \frac{x}{xx+yy} + \frac{1}{\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{xx+yy},$$

vnde fit

$$P = \sqrt{\frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{2(xx+yy)}};$$

deinde vero erit

$$-4QQ = \frac{1}{x+y\sqrt{-1}} + \frac{1}{x-y\sqrt{-1}} - \frac{2}{\sqrt{(xx+yy)}} = \frac{2x}{xx+yy} - \frac{2}{\sqrt{(xx+yy)}},$$

vnde fit

$$Q = \sqrt{\left(\frac{-x+\sqrt{(xx+yy)}}{2(xx+yy)}\right)}.$$

§. 65. Omnes autem has formulas multo concinnius per multiplicationem angulorum exhibere licebit. Si enim ponamus $\sqrt{(xx+yy)} = z$, et $\Phi$ denotet angulum, cuius tangens $\frac{y}{x}$, erit $x = z \operatorname{cof.} \Phi$ et $y = z \operatorname{fin.} \Phi$; quibus valoribus ſubſtitutis, ſi functio $\Gamma$ denotet poteſtatem exponentis $n$, erit

$$P = \tfrac{1}{2} z^n (\operatorname{cof.}\Phi + \sqrt{-1} \operatorname{fin.}\Phi)^n + \tfrac{1}{2} z^n (\operatorname{cof.}\Phi - \sqrt{-1} \operatorname{fin.}\Phi)^n,$$

quae formula per notas reductiones praebet $P = z^n \operatorname{cof.} n\Phi$. Similique modo ex forma

$$Q = \frac{z^n}{2\sqrt{-1}} (\operatorname{cof.}\Phi + \sqrt{-1} \operatorname{fin.}\Phi)^n$$

$$- \frac{z^n}{2\sqrt{-1}} (\operatorname{cof.}\Phi - \sqrt{-1} \operatorname{fin.}\Phi)^n$$

 pro-

prodit $Q = z^n$ ſin. $n\Phi$, qui valores, ſi loco $z$ et $\Phi$ valores modo aſſignati ſubſtituantur, ſtatim praebent formulas iam ſupra euolutas. Nunc autem praeterea pro numero $n$ ad arbitrium etiam fractiones quascunque accipere licebit, ſiquidem multiplicatio ac diuiſio angulorum tanquam conceſſa ſpectetur.

§. 66. Quantumuis autem magna ſit multiplicitas harum ſolutionum, tamen ea inſuper vsque ad duplum augeri poteſt. Quod ſi enim bini valores coniugati pro litteris P et Q fuerint $P = M$ et $Q = N$; tum etiam ſemper ſumi poterit $P = -N$ et $Q = +M$, hoc eſt, iſtos valores inter ſe permutare licet, dummodo altervtrius ſignum inuertatur, quod ita oſtendi poteſt. Cum ſit $M = P$; $N = Q$; $\partial M = p\,\partial x + q\,\partial y$ et $\partial N = q\,\partial x - p\,\partial y$, ſcribatur nunc $q'$ loco $p$ et $p'$ loco $-q$, fiet $\partial M = q'\,\partial x - p'\,\partial y$ et $\partial N = -p'\,\partial x - q'\,\partial y$; vnde patet, litteram M idoneum praebere valorem pro Q, litteram vero N pro $-P$.

§. 67. Hinc ergo ſi pro P et Q ſumantur quicunque valores coniugati, in ſuperioribus tabulis dati, pro curuis ſecandis ſtatui poterit talis aequatio:

$$a = \mathfrak{A}\,P + \mathfrak{B}\,Q + \mathfrak{A}'\,P' + \mathfrak{B}'\,Q' + \text{etc.}$$

tumque pro Traiectoriis habebitur iſta aequatio:

$$b = \mathfrak{A}\,(P + \delta\,Q) + \mathfrak{B}\,(Q - \delta\,P) + \mathfrak{A}'\,(P' + \delta\,Q') + \mathfrak{B}'\,(Q' - \delta\,P')\ \text{etc.}$$

§. 68. Quoniam curuae ſecandae et Traiectoriae inter ſe permutari poſſunt, id quod tamen ex formulis inuentis non apparet, operae pretium erit has formulas ita transformare, vt permutabilitas ſtatim in oculos incurrat. Hunc in finem conſideremus has formulas:

$a =$

$a = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q$ et $b = \mathfrak{A}(P + \delta Q) + \mathfrak{B}(Q - \delta P)$, ſiue
$b = P(\mathfrak{A} - \delta\mathfrak{B}) + Q(\delta\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$,

et ponamus $\mathfrak{A} = f\,\text{coſ.}\,\lambda$ et $\mathfrak{B} = f\,\text{ſin.}\,\lambda$, eritque ob $\delta = \text{tang.}\,\alpha$,

$$\mathfrak{A} - \delta\mathfrak{B} = f\,\text{coſ.}\,\lambda - f\,\text{tang.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\lambda = \frac{f}{\text{coſ.}\,\alpha}\,\text{coſ.}(\alpha + \lambda) \text{ et}$$

$$\delta\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = f\,\text{tang.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\lambda + f\,\text{ſin.}\,\lambda = \frac{f}{\text{coſ.}\,\alpha}\,\text{ſin.}(\alpha + \lambda),$$

vnde quia loco $b$ ſcribi poteſt $\frac{b}{\text{coſ.}\,\alpha}$, aequationes noſtrae erunt

$$a = fP\,\text{coſ.}\,\lambda + fQ\,\text{ſin.}\,\lambda \text{ et}$$
$$b = fP\,\text{coſ.}(\alpha + \lambda) + fQ\,\text{ſin.}(\alpha + \lambda),$$

in quibus iam egregia harmonia perſpicitur, quae autem magis euadet manifeſta, ſi loco $\lambda$ ſcribamus $\theta - \frac{1}{2}\alpha$: tum enim pro duplici ordine noſtrarum curuarum habebimus has aequationes:

$$a = fP\,\text{coſ.}(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) + fQ\,\text{ſin.}(\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) \text{ et}$$
$$b = fP\,\text{coſ.}(\theta + \tfrac{1}{2}\alpha) + fQ\,\text{ſin.}(\theta + \tfrac{1}{2}\alpha);$$

quarum altera in alteram transmutatur, ſi loco $\alpha$ ſcribatur $-\alpha$. Supra autem iam notauimus, interſectionem eandem manere, ſiue angulus $\alpha$ capiatur negatiue ſiue poſitiue, id quod etiam natura rei poſtulat; ſi enim reſpectu curuarum ſecandarum angulus interſectionis $\alpha$ ad dextram cadat, tum reſpectu Traiectoriarum cadet ad ſiniſtram.

§. 69. His obſeruatis videamus quotuplici modo lineae ſecundi ordinis, ſiue ſectiones conicae, ad ſolutionem noſtri problematis accommodari queant. Hunc in finem ex tabula §. 60. ſumamus primo $P = x$ et $Q = y$, tum vero etiam $P = xx - yy$ et $Q = 2xy$, ex quibus coniunctis pro binis ordinibus linearum habebimus primo

$$a = fx\,\text{coſ.}(\zeta - \tfrac{1}{2}\alpha) + fy\,\text{ſin.}(\zeta - \tfrac{1}{2}\alpha) + g(xx - yy)\,\text{coſ.}(\eta - \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$+ 2gxy\,\text{ſin.}(\eta - \tfrac{1}{2}\alpha) \text{ et}$$
$$b = fx\,\text{coſ.}(\zeta + \tfrac{1}{2}\alpha) + fy\,\text{ſin.}(\zeta + \tfrac{1}{2}\alpha) + g(xx - yy)\,\text{coſ.}(\eta + \tfrac{1}{2}\alpha)$$
$$+ 2gxy\,\text{ſin.}(\eta + \tfrac{1}{2}\alpha)$$

vbi tam quantitates $f$ et $g$ quam anguli $\zeta$ et $\eta$ pro arbitrio accipi poſſunt. Euidens autem eſt, omnes has curuas ſemper eſſe Hyperbolas aequilateras ſuper eodem axe et ex eodem centro deſcriptas.

§. 70. Supra autem vidimus, ſi curuae ſecandae fuerint infiniti circuli ſe inuicem in eodem puncto tangentes, tum etiam Traiectorias eſſe eiusmodi circulos, qui ergo caſus non in formulis modo inuentis continetur. Hic autem caſus deducetur ex formulis §. 62. vbi erat $P = \frac{x}{xx+yy}$ et $Q = \frac{-y}{xx+yy}$, ex quibus pro duplici linearum ordine naſcuntur hae aequationes:

$$a = \frac{fx}{xx+yy} \operatorname{coſ.} (\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) - \frac{fy}{xx+yy} \operatorname{ſin.} (\theta - \tfrac{1}{2}\alpha);$$

$$b = \frac{fx}{xx+yy} \operatorname{coſ.} (\theta + \tfrac{1}{2}\alpha) - \frac{fy}{xx+yy} \operatorname{ſin.} (\theta + \tfrac{1}{2}\alpha);$$

at ſi loco $a$ et $b$ ſcribamus $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ et per $xx+yy$ multiplicemus, hae aequationes erunt:

$$xx+yy = afx \operatorname{coſ.} (\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) - afy \operatorname{ſin.} (\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) \text{ et}$$

$$xx+yy = bfx \operatorname{coſ.} (\theta + \tfrac{1}{2}\alpha) - bfy \operatorname{ſin.} (\theta + \tfrac{1}{2}\alpha)$$

quarum vtraque manifeſto eſt pro circulo.

§. 71. Praeterea vero ex formulis ſupra §. 64. datis:

$$P = \sqrt{\frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{2}} \text{ et } Q = \sqrt{\frac{-x+\sqrt{(xx+yy)}}{2}};$$

etiam lineas ſecundi ordinis elicere licet; hinc enim pro priore ordine erit

$$a = f \operatorname{coſ.} (\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) \sqrt{\frac{x+\sqrt{(xx+yy)}}{2}} + f \operatorname{ſin.} (\theta - \tfrac{1}{2}\alpha) \sqrt{\frac{-x+\sqrt{(xx+yy)}}{2}}$$

vnde ſumtis quadratis erit

$$2aa = ffx \operatorname{coſ.} (2\theta - \alpha) + ff\sqrt{(xx+yy)} + ffy \operatorname{ſin.} (2\theta - \alpha),$$

quae porro reducta praebet

$$4a^4-4aaffx\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha)-4aaffy\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)$$
$$+f^4xx\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha)^2+2f^4xy\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha)$$
$$+f^4yy\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)^2=f^4xx+f^4yy$$

quae expreſſio porro redigitur ad hanc formam:

$$4a^4-4aaffx\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha)-4aaffy\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)=$$
$$f^4xx\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)^2+f^4yy\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha)^2-2f^4xy\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha)$$
$$=f^4(x\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)-y\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha))^2,$$

vbi, ſi loco $a$ ſcribamus $\frac{f\sqrt{a}}{2}$, erit illa aequatio

$$aa-2ax\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha)-2ay\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)=$$
$$(x\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)-y\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha))^2.$$

Pro altero autem ordine loco $a$ ſcribatur $b$, et $\alpha$ capiatur negatiue, eritque

$$bb-2bx\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha)-2by\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)=$$
$$(x\,\text{ſin.}(2\theta-\alpha)-y\,\text{coſ.}(2\theta-\alpha))^2;$$

vbi, cum membrum ſupremum ſit quadratum, vtraeque hae lineae erunt parabolae, et quidem omnes ſuper eodem axe et circa evndem ſocum deſcriptae; vnde concludere licet, nullas dari ellipſes noſtro problemati ſatisfacientes.

§. 72. Vberrimum igitur fontem deteximus, non ſolum Problema Traiectoriarum in genere ſoluendi, ſed etiam innumerabiles curuas algebraicas exhibendi, huncque fontem nobis aperuit caſus ſecundus, quo parametrum variabilem $x$ per binas coordinatas $x$ et $y$ exprimere licuit, dum prior caſus, quo applicata $y$ per $a$ et $x$ fuerat expreſſa, ad hunc ſcopum parum vtilis eſt deprehenſus; vnde iam ſatis intelligitur, ex poſtremo caſu, quo trium variabilium $a$, $x$ et $y$ nullam per binas reliquas exprimere licet, nihil plane ad vſum noſtrum deduci poſſe, vnde eius euolutione prorſus ſuperſedemus. Ceterum, quanquam hoc Problema iam plus quam quinquaginta abhinc annis

ſummo ſtudio a Geometris fuit pertractatum; tamen equidem mihi non videor actum egiſſe, quandoquidem hic plura plane noua occurrunt, et multa, quae tum temporis adhuc obſcura videri poterant, hic dilucide expoſita reperiuntur. Neque etiam vllum eſt dubium, quin ex eodem argumento plurima egregia inuenta adhuc deriuari queant.

---

---

NOVAE

# NOVAE DEMONSTRATIONES CIRCA DIVISORES NVMERORVM FORMAE $xx + nyy$.

Auctore
*L. EVLERO.*

*Conuent. exhib. d.* 20 *Nouembr.* 1775.

Cum nuper eximia inuenta Illuſtris *de la Grange* ſuper diviſoribus numerorum formae $xx + nyy$ recenſuiſſem et cum meis obſeruationibus, quas olim plerumque per inductionem erueram, contuliſſem, quippe quae inde haud exiguum firmamentum acceperant, non dubitaui mox perfectas demonſtrationes, quae adhuc deſiderabantur, polliceri. Fretus ſcilicet eram ſagacitate acutiſſimi viri *de la Grange*, qua iam plures huius generis demonſtrationes feliciſſimo ſucceſſu in lucem produxit. Poſtquam autem omnes circumſtantias, ad quas in hac inueſtigatione eſt attendendum, accuratius perpendiſſem, mihi quoque contigit praecipua momenta, quibus iſtae exoptatae demonſtrationes innituntur, perſpicere, quae igitur hic exponere conſtitui.

## Theorema 1.

§. 1. *Si omnes numeri quadrati per numerum quemcunque primum* P (*binario excepto, quippe cuius ratio per ſe eſt manifeſta*) *diuidantur, numerus omnium reſiduorum diuerſorum, quae inde reſultare poſſunt, ſemper eſt* $= \frac{1}{2}(P - 1)$.

Demon-

## Demonſtratio.

Omnes numeri per propoſitum primum P non diuiſibiles in aliqua harum formularum continentur: $\lambda P \pm 1$, $\lambda P \pm 2$, $\lambda P \pm 3$, $\lambda P \pm 4$, . . . . . . $\lambda P \pm \omega$, in quarum vltima eſt $\omega = \frac{1}{2}(P - 1)$, quarum ergo formularum numerus eſt $\frac{1}{2}(P - 1)$. Iam vero, ſi quadrata cuiusque harum formularum, veluti $(\lambda P \pm a)^2$, per numerum P diuidantur, idem remanebit reſiduum, quod ex quadrato $aa$ reſultat, vnde cum $a$ non ſuperet numerum $\omega = \frac{1}{2}(P - 1)$; manifeſtum eſt, numerum reſiduorum, quae ex diuiſione quadratorum per numerum primum P oriri poſſunt, maiorem eſſe non poſſe quam $\frac{1}{2}(P - 1)$. Haecque omnia reſidua naſcuntur ex quadratis 1, 4, 9, 16, . . . . . . . . $\omega\omega$, exſiſtente $\omega = \frac{1}{2}(P - 1)$, quae, quamdiu ſunt minora quam P, ipſa erunt reſidua; ſin autem fuerint maiora, per diuiſionem infra P deprimi poſſunt, ita vt omnia minora euadant quam P, vti ex natura diuiſionis eſt manifeſtum. Supereſt igitur vt demonſtretur, numerum horum reſiduorum minorem eſſe non poſſe quam $\frac{1}{2}(P - 1)$, id quod inde patebit, ſi oſtenderimus, omnia quadrata non maiora quam $\omega\omega$, diuerſa producere reſidua. Hunc in finem ſint $aa$ et $bb$ duo huiusmodi quadrata, quae ſi per P diuiſa idem praeberent reſiduum, eorum differentia $bb - aa$ foret per P diuiſibilis; quia igitur P eſt numerus primus, vel $b + a$ vel $b - a$ deberet eſſe diuiſibile per P, quia vero tam $a$ quam $b$ non ſuperant $\omega = \frac{1}{2}(P - 1)$; manifeſtum eſt, tam $b + a$ quam $b - a$ numeros ipſo P minores eſſe, ideoque certe per P diuidi non poſſe; vnde euidens eſt numerum reſiduorum diuerſorum etiam minorem non eſſe quam $\frac{1}{2}(P - 1)$. Sicque demonſtratum eſt, numerum omnium reſiduorum diuerſorum eſſe $= \frac{1}{2}(P - 1)$.

Corol-

## Corollarium 1.

§. 2. Quod ſi ergo litterae latinae *a*, *b*, *c*, *d*, etc. denotent omnia reſidua, quae ex diuiſione numerorum quadratorum per numerum primum P reſultare poſſunt, earum multitudo ſemper erit $\frac{1}{2}$(P — 1), in iisque ſemper occurrent quadrata 1, 4, 9, 16, etc. quatenus ipſo numero P ſunt minora, reliqua vero naſcuntur ex quadratis maioribus quam P.

## Corollarium 2.

§. 3. Cum omnia reſidua *a*, *b*, *c*, *d*, etc. ſint minora quam diuiſor P, eorumque numerus tantum ſit $\frac{1}{2}$(P—1), dum omnium numerorum ipſo P minorum multitudo eſt P—1; horum tantum ſemiſſis claſſem reſiduorum conſtituit, reliqui vero numeri, quorum multitudo etiam eſt $\frac{1}{2}$(P — 1), ex hac claſſe penitus excluduntur, quos ergo litteris graecis $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. deſignemus et *non-reſidua* appellemus, ita vt pro quouis numero primo P omnes numeri ipſo minores in duas claſſes ſint referendi, quarum altera continet omnia reſidua *a*, *b*, *c*, *d*, etc. altera vero non-reſidua $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. In vtraque autem claſſe perpetuo totidem continebuntur numeri, quorum multitudo eſt $\frac{1}{2}$(P — 1).

## Corollarium 3.

§. 4. Si ergo *a* denotet reſiduum quodcunque, omnes numeri quadrati continebuntur in hac formula generali: $\lambda P + a$, et ſemper coëfficientem $\lambda$ ita accipere licebit, vt iſta formula euadat quadratum; contra autem ſi $\alpha$ denotet non-reſiduum quodcunque, haec formula $\lambda P + \alpha$ nunquam fieri poterit quadratum, quicunque numeri loco $\lambda$ accipiantur.

## Scholion.

§. 5. Iam olim plures egregias proprietates tam reſiduorum quam non-reſiduorum demonſtraui, quas omnes hic repetere ſuperfluum foret: ſequentes autem tantum hic meminiſſe iuuabit. 1°. Quod producta ex binis reſiduis, veluti $a\,b$, ſemper etiam in claſſe reſiduorum occurrant, poſtquam ſcilicet diuiſione per P ad valores minimos fuerint reducta; vnde patet, etiam omnes poteſtates cuiusque reſidui in eadem claſſe reperiri debere. 2°. Sin autem reſidua per quodpiam non-reſiduum multiplicentur, producta ſemper in claſſe non-reſiduorum reperientur; vnde patet, ex vnico non-reſiduo $\alpha$ reliqua omnia reperiri poſſe, dum ſcilicet reſidua $a$, $b$, $c$, $d$, per $\alpha$ multiplicentur. 3°. Sin autem bina non-reſidua, veluti $\alpha$ et $\beta$ in ſe inuicem multiplicentur, producta $\alpha\beta$ in claſſem reſiduorum incidunt, producta vero ex ternis non-reſiduis iterum euadunt non-reſidua, ex quaternis vero denuo reſidua, et ita porro 4°. Tum vero etiam, ſi quoduis reſiduum $a$ per aliud reſiduum $b$ diuidatur, etiam quotus in claſſe reſiduorum reperietur, ſiquidem $a$ diuidi queat per $b$; ſin vero diuidi nequeat, ſemper dabitur tale multiplum ipſius P, quod ſit $\mu P$, vt formula $\mu P + a$ diuiſionem per $b$ admittat; atque etiam hoc caſu quotus ſemper reperietur in claſſe reſiduorum.

## Theorema 2.

§. 6. *Denotante* a *reſiduum quodcunque, quod ex diuiſione quadratorum per numerum primum* P *oriri poteſt, ſi numerus* n *contineatur in formula* $\lambda P - a$; *ſemper aſſignari poterunt numeri* x et y *tales, vt forma* $xx + nyy$ *diuiſionem admittat per numerum primum* P.

Demon-

## Demonſtratio.

Ponamus numerum primum P diuiſorem eſſe cuiuspiam numeri in forma $xx+nyy$ contenti, ita vt ſit $\mu P = xx+nyy$; erit ergo $nyy = \mu P - xx$. Verum quadratum $xx$ in forma $\lambda P + a$ continetur, quo ſubſtituto fiet $nyy = (\mu - \lambda) P - a = \nu P - a$, ideoque $n = \frac{\nu P - a}{yy}$. Quia autem $yy$ eſt quadratum, in claſſe reſiduorum continetur, conſequenter erit etiam $\frac{a}{yy}$ reſiduum, ideoque ſub $a$ comprehendi poteſt, vnde in integris habebimus $n = \lambda P - a$. Hinc igitur viciſſim ſequitur, quoties $n$ fuerit numerus in forma $\lambda P - a$ contentus, tum ſemper exhiberi poſſe numerum formae $xx+nyy$ diuiſibilem per numerum primum P.

## Corollarium 1.

§. 7. Hinc ergo etiam intelligitur, ſi $\alpha$ denotet quodcunque non-reſiduum, reſpectu numeri primi P, fueritque $n$ numerus in hac forma $\mu P - \alpha$ contentus, tum hunc numerum primum P nullo modo diuiſorem fieri poſſe vllius numeri in forma $xx+nyy$ contenti.

## Corollarium 2.

§. 8. Cum igitur omnes plane numeri vel in forma $\mu P - a$, vel in $\mu P - \alpha$ contineantur, hinc diſcimus, pro quouis numero primo P omnes numeros in duas claſſes diſtribui, quarum vtraque totidem contineat numeros, propterea quod multitudo valorum ipſius $a$ eadem eſt ac valorum ipſius $\alpha$, quarum claſſium altera omnes continebit numeros $n$, vnde formula $xx+nyy$ recipere queat diuiſorem P; altera vero claſſis reliquos continebit numeros, qui ſi pro $n$ accipiantur, formula $xx+nyy$ nullo modo per P diuiſibilis eſſe queat.

## Scholion 1.

§. 9. Quo haec exemplo clariora reddantur, conſideremus numerum primum 13, pro quo reſidua reperiuntur: 1, 4, 9, 3, 12, 10, non-reſidua vero: 2, 5, 6, 7, 8, 11; atque vt forma $xx+nyy$ diuiſibilis eſſe queat per 13, numerus $n$ in aliqua ſex ſequentium formularum contentus eſſe debet:

$$13\lambda-1,\ 13\lambda-4,\ 13\lambda-3,\ 13\lambda-12,\ 13\lambda-10,$$

ſicque valores idonei pro iſto numero $n$ ordine naturali diſpoſiti erunt ſequentes:

1, 3, 4, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 22, 23, 25, 27, 29, 30, 35, 36, 38, 40, 42, 43, 48, 49, 51, 53, 55, 56, 61, 62, 64, 66, 68, 69, 74, 75, 77, 79, 81, 82, 87, 88, 90, 92, 94, 95, 100;

quorum numerus vsque ad 100 eſt 46. Reliqui ergo numeri qui diuiſorem 13 a formula $xx+nyy$ penitus excludunt, deletis iis qui ipſi per 13 ſunt diuiſibiles, ordine erunt iſti:

2, 5, 6, 7, 8, 11, 15, 18, 19, 20, 21, 24, 28, 31, 32, 33, 34, 37, 41, 44, 45, 46, 47, 50, 54, 57, 58, 59, 60, 63, 67, 70, 71, 72, 73, 76, 80, 83, 84, 85, 86, 89, 93, 96, 97, 98, 99,

quorum numerus eſt 47, ideoque tantum non aequalis priori. Ratio autem, cur multipla ipſius 13 excluſimus, eſt, quod de formula $xx+13vyy$, vtrum diuiſorem 13 accipiat, quaeſtio eſſe non poteſt, quia manifeſto numerus deberet eſſe diuiſibilis per 13.

## Scholion 2.

§. 10. Quoniam vis noſtrae demonſtrationis clarius in exemplis perſpicitur, contemplemur alium numerum primum 19, pro quo nouem reſidua ſunt: 1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5, nouem vero non-reſidua: 2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18.

Hinc

Hinc igitur formula $xx+nyy$ diuiſorem 19 recipere poterit, ſi numerus $n$ in ſequenti forma contineatur:

$$n = 19\lambda - (1, 4, 9, 16, 6, 17, 11, 7, 5);$$

Sin autem $n$ contineatur in ſequenti formula:

$$n = 19\lambda - (2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18),$$

tum nullus numerus formae $xx+nyy$ per 19 diuidi poterit. Valores igitur idonei pro numero $n$ vsque ad centum ordine erunt

2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 21, 22, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 37, 40, 41, 46, 48, 50, 51, 52, 53, 56, 59, 60, 65, 67, 69, 70, 71, 72, 75, 78, 79, 84, 86, 88, 89, 90, 91, 94, 97, 98,

quorum multitudo eſt 47. Reliqui vero numeri ad hunc ſcopum inepti, excluſis multiplis ipſius 19, erunt numero 48 ſequentes:

1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17, 20, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 35, 36, 39, 42, 43, 44, 45, 47, 49, 54, 55, 58, 61, 62, 63, 64, 66, 68, 73, 74, 77, 80, 81, 82, 83, 85, 87, 92, 93, 96, 99, 100.

## Scholion 3.

§. 11. Quo autem facilius intelligatur, quomodo quouis caſu, vbi numerus $n$ idoneum habet valorem, formula $xx+nyy$ diuiſibilis reddatur per numerum primum P, notetur, hoc ſemper fieri poſſe, dum pro $x$ et $y$ numeri non maiores quam $\frac{1}{2}(P-1)$ accipiantur, atque adeo alterum horum numerorum $y$ pro lubitu accipi poſſe. Sit igitur $y=1$, ita vt habeatur haec formula: $xx+n$, numerique $n$ reſiduum naſcatur $r$; tum igitur pro $xx$ id quaeratur quadratum, cui conueniat reſiduum $P-r$, ac manifeſto ſumma $xx+n$ per P erit diuiſibilis. Hoc autem ſemper fieri poſſe euidens eſt, cum ſit $n=\lambda P-a$, vnde fit reſiduum $r=P-a$, ideoque

$P - r = a$, ſicque pro $xx$ id ſumi debet quadratum, cui reſpondet reſiduum $a$. Ita ſumto $P = 13$ accipiatur pro $n$, pro lubitu, valor idoneus ex ſupra inuentis, veluti $n = 82$, et quaeratur $x$ ita, vt fiat forma $xx + 82$ per 13 diuiſibilis. Hic autem fit reſiduum $r = 4$, hincque $P - r = 9$; erit ergo $x = 3$ et formula $3^2 + 82$ per 13 diuidi poteſt. Simili modo ſi pro diviſore 19 ſumatur $n = 88$, inde oritur reſiduum $r = 12$, ideoque $P - r = 7$; quadratum autem, quod per 19 diuiſum relinquit 7, eſt 64, ſicque formula $8^2 + 88$ prodit diuiſibilis per 19. Atque hinc deduci poteſt facilior et concinnior demonſtratio noſtri Theorematis.

## Alia Demonſtratio Theorematis 2.

§. 12. Oſtendi ſcilicet poteſt, ſi fuerit $n = \lambda P - a$, tum ſemper dari numerum $x$, vt formula $xx + n$ diuiſionem admittat: tantum enim pro $xx$ id ſumatur quadratum, quod per P diuiſum relinquat $a$, quod ergo erit formae $\mu P + a$; quare ob $n = \lambda P - a$, erit formula $xx + n = (\mu + \lambda) P$, ideoque manifeſto diuiſibilis per numerum P.

## Scholion 1.

§. 13. Cum igitur pro quolibet numero primo P facile omnes valores numeri $n$ exhiberi queant, quibus forma $xx + nyy$ diuiſionem per P admittere poteſt, quandoquidem, denotante $a$ reſidua omnia ex diuiſione quadratorum per P oriunda, inuenimus $n = \lambda P - a$: manifeſtum eſt, pro $n$ etiam infinitos valores negatiuos dari, qui oriuntur, ſi pro $\lambda$ etiam numeri negatiui accipiantur. Quamobrem non inutile erit, pro numeris primis ſimplicioribus formulas exhibere, quae omnes valores idoneos numeri $n$ contineant, quibus forma $xx + nyy$ per numerum primum P diuiſibilis reddi queat, quas igitur hic apponemus.

| P | $n$ |
|---|---|
| 3 | $3\lambda - 1$ |
| 5 | $5\lambda - (1,4)$ |
| 7 | $7\lambda - (1,4,2)$ |
| 11 | $11\lambda - (1,4,9,5,3)$ |
| 13 | $13\lambda - (1.4,9,3,12,10)$ |
| 17 | $17\lambda - (1,4,9,16,8,2,15,13)$ |
| 19 | $19\lambda - (1,4,9,16,6,17,11,7,5)$ |
| 23 | $23\lambda - (1,4,9,16,2,13,3,18,12,8,6)$ |
| 29 | $29\lambda - (1,4,9,16,25,7,20,6,23,13,5,28,24,22)$ |
| 31 | $31\lambda - (1,4,9,16,25,5,18,2,19,7,28,20,14,10,8)$ |
| 37 | $37\lambda - (1,4,9,16,25,36,12,27,7,26,10,33,21,11,3,34,30,28)$ |
| 41 | $41\lambda - (1,4,9,16,25,36,8,23,40,18,39,21,5,32,20,10,2,37,33,31)$ |
| 43 | $43\lambda - (1,4,9,16,25,36,6,21,38,14,35,15,40,24,10,41,31,23,17,13,11)$ |
| 47 | $47\lambda - (1,4,9,16,25,36,2,17,34,6,27,3,28,8,37,21,7,42,32,24,18,14,12)$ |

## Corollarium.

§. 14. Si ergo $n$ fuerit numerus negatiuus, puta $n = -m$, ſumto $\lambda$ negatiuo erit $m = \lambda P + a$, quae forma cum contineat omnes numeros quadratos, quicunque numerus primus pro P accipiatur; patet, ſi fuerit $m$ numerus quadratus, ſcilicet $m = k^2$, numeros formae $xx - kkyy$ per omnes plane numeros primos diuiſibiles exſiſtere poſſe, quo ergo caſu nulli numeri primi excluduntur, id quod per ſe eſt manifeſtum, quoniam formula $xx - kkyy$ in genere factores habet $x + ky$ et $x - ky$, quorum vterque per omnes numeros primos diuiſibilis reddi poteſt, id quod nullo alio caſu fieri licet.

## Scholion 2.

§. 15. Quemadmodum reſpectu cuiusuis numeri primi P omnes numeri in duas claſſes diſtinguuntur, quarum altera

tera continet valores idoneos litterae $n$, vt formula $xx+nyy$ per eum numerum primum P diuiſibilis reddi queat, altera vero eos numeros, qui talem diuiſionem reſpuunt, ac praeterea multitudo numerorum in vtraque claſſe contentorum eadem deprehenditur: ita viciſſim pro quolibet numero $n$ omnes numeros primos etiam in duas claſſes diſtingui oportet, quarum altera continebit eos, qui diuiſores exſiſtere poſſunt formae $xx+nyy$, altera vero reliquos, qui nullo modo huius formae diuiſores exſiſtere poſſunt. Pro vtraque autem claſſe iam olim formulas dedi generales, ſimiles illis, quibus hic pro quolibet numero primo valores idoneos numeri $n$ ab ineptis diſtinxi: hoc tantum diſcrimine, quod, dum hic formulae diuiſorem P reſpiciunt, ibi numerus $4n$ diuiſoris locum obtineat. Scilicet pro diuiſoribus primis numerorum formae $xx+nyy$ dedi talem formam: $4ni+A$, pro iis vero, qui nullo modo diuiſores eſſe poſſunt, talem: $4ni+\mathfrak{A}$, vbi litterae A et $\mathfrak{A}$ ſimul complectuntur omnes numeros ad $4n$ primos ipſoque minores, ex quibus littera A continet eos qui ad diuiſionem ſunt apti, littera vero $\mathfrak{A}$ eos qui excluduntur. Cum igitur has formulas olim per inductionem elicuiſſem, nunc nullum amplius dubium ſupereſſe poteſt, quin prior formula $4ni+A$ complectatur omnes numeros primos, per quos formulam $xx+nyy$ diuidere licet, dum altera $4ni+\mathfrak{A}$ eos inuoluit, qui nullo modo diuiſores exſiſtere poſſunt. Interim tamen has ambas formulas ſequenti modo ex poſitis principiis deriuare licebit.

## Problema.

*Propoſito numero quocunque* n *poſitiuo, aſſignare omnes numeros primos, per quos numeri formae* $xx+nyy$ *diuiſionem admittere queant.*

**Solutio.**

## Solutio.

§. 16. Denotet P diuiſorem quemcunque primum formae propoſitae $xx+nyy$, ſitque $\lambda$ quotus ex hac diuiſione oriundus, atque habebimus hanc aequationem: $\lambda P = xx+nyy$, quam expreſſionem transformemus ponendo $x = 2nr+s$ et $y = 2t+u$, prodibitque iſta aequatio:

$$\lambda P = 4n(nrr+rs+tu+tt)+ss+nuu,$$

cuius loco, quia $nrr+rs+tu+tt$ omnes numeros deſignare poteſt, ſcribamus breuitatis gratia $\lambda i$, vt ſcilicet prius membrum per $\lambda$ diuidi poſſit, atque habebimus hanc aequalitatem: $P = 4ni+\frac{ss+nuu}{\lambda}$.

§. 17. Hoc igitur modo iam nacti ſumus formam ſupra memoratam: $4ni+A$, ſimulque patet loco A ſumi debere omnes numeros ex formula $\frac{ss+nuu}{\lambda}$ reſultantes, vbi cum $\lambda$ quemcunque numerum deſignare poſſit, littera A tam omnes numeros ipſos in forma $ss+nuu$ contentos, quam eorum diuiſores omnes in ſe comprehendet. Quoniam autem noſtra forma numeros primos exhibere debet, loco A alios numeros accipere non licebit, niſi qui ad $4n$ fuerint primi, quos ergo oportebit eſſe impares ſimulque primos ad ipſum numerum $n$, ſiue cum $n$ nullum habere debent diuiſorem communem.

§. 18. Primo igitur inter valores litterae A, ſumendo $u=0$ et $\lambda=1$, occurrent omnes numeri quadrati $ss$ impares et ad $n$ primi, vel ipſi, vel diuiſione per $4n$ facta depreſſi. Deinde ſumendo $u=1$, manente $\lambda=1$, etiam occurrent omnes numeri in forma $ss+n$ contenti, quatenus ſcilicet ad $4n$ fuerint primi; vbi quidem plurimum notaſſe iuuabit, poſtquam iam aliquot numeri idonei pro A fuerint inuenti, qui ſint $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, etc. etiam omnia producta ex binis, ſcilicet $ab$,

$ac$, $bc$, etc. ibidem occurrere debere, cuius rei ratio eſt, quod producta ex pluribus numeris formae $ss+nuu$ ſemper ad eandem formam reducere licet.

§. 19. Quod vero ad eos valores ipſius A attinet, qui oriuntur ſi $\lambda$ non fuerit vnitas, ſeu qui tantum ſint diuiſores formae $ss+nuu$, quorum multitudo videri poſſet indefinita, recurrere debemus ad theorema Illuſtris *de la Grange*, quo demonſtrauit, omnes diuiſores numerorum formae $ss+nuu$ ſemper contineri in hac formula: $fpp \pm 2gpq + hqq$, exſiſtente $fh = gg + n$, neque has formulas vlterius continuari opus eſſe, quamdiu fuerit vel $2g < f$, vel $2g < h$, quarum formarum numerus ſemper eſt ſatis modicus. Hinc igitur ſemper pro A accipere licebit vel $f$ vel $h$, niſi forte ad $4n$ non fuerint primi. Hoc enim caſu pro A ſumi conueniet vel numeros $f \pm 2g + h$, vel $4f \pm 4g + h$, vel $f \pm 4g + 4h$, etc. quatenus ſcilicet hi numeri fuerint primi ad $4n$. Simulac vero vnicus talis valor fuerit repertus, is per eos, qui iam ante ſunt inuenti, multiplicatus, dabit totidem nouos valores idoneos pro A.

§. 20. Hoc autem modo mox omnes valores idoneos pro A adipiſcemur, cum eorum numerus ſemper aequetur ſemiſſi omnium numerorum minorum quam $4n$ ad eumque primorum. Hinc ſi multitudo omnium iſtorum numerorum fuerit $= 2k$ (eum enim ſemper eſſe parem aliunde conſtat), multitudo valorum litterae A ſemper erit $= k$, ſolo caſu excepto, quo $n$ eſt numerus quadratus negatiuus, quippe quo omnes plane hi numeri locum inueniunt: reliquis vero caſibus omnibus multitudo numerorum excluſorum itidem erit $= k$, qui ſi deſignentur litteris graecis $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. hi dabunt omnes valores litterae $\mathfrak{A}$ pro formula $4ni + \mathfrak{A}$, quae omnes

conti-

continet numeros primos, qui nullo modo diuiſores eſſe poſſunt vllius numeri in forma $xx + nyy$ contenti.

§. 21. Quod ad ipſos valores ipſius A attinet, qui oriuntur ex forma $fpp \pm 2gpq + hqq$, quia haec forma, ſiue per $f$ ſiue per $h$ multiplicetur, reducitur ad formam $xx + nyy$; ob $fh = gg + n$, his caſibus erit ſiue $\lambda = f$, ſiue $\lambda = h$, ita vt tum pro numeris primis inde natis tam $fP$ quam $hP$ ſemper futurus ſit numerus formae $xx + nyy$, vbi ergo ſufficiet minorem horum duorum numerorum $f$ et $h$ accepiſſe, ita vt pronunciare liceat: quoties numerus primus P fuerit diviſor cuiuspiam numeri formae $xx + nyy$, tum vel ipſum hunc numerum P, vel eius multiplum $fP$, fore quoque numerum formae eiusdem $xx + nyy$.

§. 22. Cum igitur formula $4ni + \mathfrak{A}$ certe omnes numeros contineat, qui nullo modo eſſe poſſunt diuiſores formae $xx + nyy$, neceſſe eſt vt omnes numeri primi in forma $4ni + A$ contenti ſimul ſint diuiſores cuiuspiam formae $xx + nyy$.

## Corollarium 1.

§. 23. Quod multitudo valorum litterae $\mathfrak{A}$ ſemper aequalis ſit multitudini valorum ipſius A, quos ponimus $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, etc. inde patet, quod ſi vnicus innotuerit, veluti $\alpha$, ad $\mathfrak{A}$ referendus, tum etiam omnia producta $\alpha a$, $\alpha b$, $\alpha c$, $\alpha d$, etc. ad eandem claſſem pertinere, vnde tamen vnicum caſum, quo $n = -mm$, excipi oportet, quoniam hoc caſu nulli prorſus valores pro $\mathfrak{A}$ dantur.

## Corollarium 2.

§. 24. Quoniam pro quouis numero $n$ forma diuiſorum *Grangiana* $fpp \pm 2gpq + hqq$ exiguam variationem

recipit, quandoquidem ea ſemper ita reduci poteſt, vt $2g$ fiat minus quam $f$ vel $h$, ſi valores iſti minores deſignentur littera $f$, tum omnes diuiſores primi numerorum formae $xx + nyy$ vel ipſi erunt eiusdem formae, vel per $f$ multiplicati, vnde ſi $f$ alios non habeat valores praeter vnitatem, quod euenit caſibus $n = 1$, $n = \pm 2$ et $n = \pm 3$, tum omnes diviſores primi his caſibus quoque ipſi habebunt eandem formam.

## Corollarium 3.

§. 25. Quoniam omnes valores pro littera A debent eſſe numeri impares, omnes formae $fpp \pm 2gpq + hqq$ hinc ſunt excludendae, in quibus ambo numeri $f$ et $h$ pares. Quare cum ſit $fh = gg + n$, numerum $gg + n$ ita in duos factores reſolui conuenit, vt alter ſaltem euadat impar, vnde ſi numerus $gg + n$ plures habeat diuiſores pares, plures reſolutiones tanquam inutiles erunt reiiciendae.

## Scholion 1.

§. 26. Quemadmodum valores litterae A pro forma $4ni + A$ ſunt minores quam $4n$, ita ſi negatiuos introducere velimus, eos infra $2n$ deprimere licebit. Obſeruaui autem porro, pro omnibus caſibus, quibus $n$ eſt numerus poſitiuus, multitudinem iſtorum valorum ipſius A ad ſemiſſem redigi poſſe, ita vt ſinguli non ſuperent ipſum numerum $n$, ſi ſcilicet non ad formam $4ni$, ſed ad eius dimidium tantum $2ni$ referantur. Hic autem duos caſus probe a ſe inuicem diſtingui oportet, prouti $n$ vel in alterutra harum formularum: $4k$ et $4k - 1$, vel in alterutra harum: $4k + 1$ et $4k + 2$ continetur. Hoc enim poſteriori caſu ſingulis valoribus ipſius A ſignum ambiguum, ſiue $\pm$, ſiue $\mp$, praefigi debet, quorum ſignorum ſuperiora

periora valeant, quoties $i$ fuerit numerus par, inferiora autem quoties impar. Hoc igitur modo ſequens tabula eſt conſtructa tres columnas complexa, quarum prima exhibet valores numeri $n$ ordine naturali procedentes, ſecunda formulas pro diuiſoribus P, tertia vero indices littera $f$ ſupra indicatos, quos ita interpretari decet, vt, quoties P fuerit numerus primus, eius productum per quempiam indicum $f$ fiat numerus formae $xx + nyy$.

## Tabula exhibens omnes diuiſores primos pro numeris formae $xx + nyy$, vna cum indicibus $f$.

Vbi circa ſigna ambigua eſt obſeruandum, ſuperiora valere quoties $i$ numerus par, inferiora vero, quoties $i$ numerus impar.

| $n$ | Diuiſores P | $f$ |
|---|---|---|
| 1 | $2i \pm 1$ | 1 |
| 2 | $4i \pm 1$ | 1 |
| 3 | $6i + 1$ | 1 |
| 4 | $8i + 1, - 3$ | 1 |
| 5 | $10i \pm 1, \pm 3$ | 1,2 |
| 6 | $12i \pm 1, \pm 5$ | 1,2 |
| 7 | $14i + 1, - 3, + 5$ | 1 |
| 8 | $16i + 1, + 3, - 5, - 7$ | 1,3 |
| 9 | $18i \pm 1, \pm 5, \mp 7,$ | 1,2 |
| 10 | $20i \pm 1, \mp 3, \pm 7, \pm 9$ | 1,2 |
| 11 | $22i + 1, + 3, + 5, - 7, + 9$ | 1,3 |
| 12 | $24i + 1, - 5, + 7, - 11,$ | 1,3 |
| 13 | $26i \pm 1, \mp 3, \mp 5, \pm 7, \pm 9, \pm 11$ | 1,2 |
| 14 | $28i \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \mp 11, \pm 13$ | 1,2,3 |
| 15 | $30i + 1, - 7, - 11, - 13,$ | 1,3 |

| $n$ | Diuiſores P | $f$ |
|---|---|---|
| 16 | $32i + 1, -3, \pm 5, -7, +9, -11, +13, -15,$ | 1,4 |
| 17 | $34i \pm 1, \pm 3, \mp 5, \pm 7, \pm 9, \pm 11, \pm 13, \mp 15,$ | 1,2,3 |
| 18 | $36i \pm 1, \mp 5, \mp 7, \pm 11, \mp 13, \pm 17,$ | 1,2,3 |
| 19 | $38i + 1, -3, +5, +7, +11, -13, -15, +17$ | 1,4 |
| 20 | $40i + 1, +3, +7, +9, -11, -13, -17, -19,$ | 1,3,4 |
| 21 | $42i \pm 1, \pm 5, \pm 11, \mp 13, \pm 17, \pm 19,$ | 1,2,3 |
| 22 | $44i \pm 1, \mp 3, \mp 5, \mp 7, \pm 9, \pm 13, \pm 15, \mp 17, \pm 19, \pm 21$ | 1,2 |
| 23 | $46i + 1, +3, -5, -7, +9, -11, +13, -15, -17, -19, -21$ | 1,3,4 |
| 24 | $48i + 1, +5, +7, +11, -13, -17, -19, -23,$ | 1,3,5 |
| 25 | $50i \pm 1, \mp 3, \mp 7, \pm 9, \mp 11, \pm 13, \mp 17, \mp 19, \pm 21, \mp 23,$ | 1,2 |
| 26 | $52i \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \mp 11, \pm 15, \pm 17, \mp 19, \pm 21, \mp 23, \pm 25,$ | 1,2,3 |
| 27 | $54i + 1, +5, +7, -11, -13, +17, -19, -23, +25.$ | 1,4 |
| 28 | $56i + 1, -3, -5, +9, +11, -13, +15, -17, -19, -21, +23, +25, -27$ | 1,4 |
| 29 | $58i \pm 1, \pm 3, \pm 5, \mp 7, \pm 9, \pm 11, \pm 13, \pm 15, \mp 17, \pm 19, \mp 21, \mp 23, \pm 25, \pm 27$ | 1,2,3,5 |
| 30 | $60i \pm 1, \mp 7, \pm 11, \pm 13, \pm 17, \mp 19, \pm 23, \pm 29$ | 1,2,3,5 |
| 31 | $62i + 1, -3, +5, +7, +9, -11, -13, -15, -17, +19, -21, -23, +25, -27, -29,$ | 1,5 |
| 32 | $64i + 1, +3, -5, -7, +9, +11, -13, -15, +17, +19, -21, -23, +25, +27, -29, -31,$ | 1,3,4 |
| 33 | $66i \pm 1, \mp 5, \pm 7, \mp 13, \pm 17, \pm 19, \pm 23, \pm 25, \pm 29, \mp 31$ | 1,2,3 |
| 34 | $68i \pm 1, \mp 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \mp 11, \mp 13, \mp 15, \pm 19, \mp 21, \pm 23, \pm 25, \mp 27, \pm 29, \pm 31, \pm 33$ | 1,2,5 |
| 35 | $70i + 1, +3, +9, +11, +13, +17, -19, -23, +27, +29, -31, +33$ | 1,4,5 |

n

| n | Diuiſores P | f |
|---|---|---|
| 36 | $72i+1,+5,-7,-11,+13,+17,-19,-23,+25,+29,$ $-31,-35$ | 1,3,4,5 |
| 37 | $74i\pm1,\mp3,\mp5,\mp7,\pm9,\mp11,\mp13,\pm15,\mp17,\pm19,$ $\pm21,\pm23,\pm25,\mp27,\mp29,\pm31,\pm33,\pm35$ | 1,2 |
| 38 | $76i\pm1,\pm3,\mp5,\pm7,\pm9,\mp11,\pm13,\mp15,\pm17,\pm21,$ $\pm23,\pm25,\pm27,\pm29,\mp31,\mp33,\mp37,$ | 1,2,3,6 |
| 39 | $78i+1,+5,-7,+11,-17,-19,-23,+25,-29,-31,$ $-35,-37,$ | 1,3,5 |
| 40 | $80i+1,-3,+7,+9,+11,+13,-17,+19,-21,+23,$ $-27,-29,-31,-33,+37,-39$ | 1,4,5,7 |
| 41 | $82i\pm1,\pm3,\pm5,\pm7,\pm9,\pm11,\mp13,\pm15\mp17,\pm19,$ $\pm21,\mp23,\pm25,\pm27,\mp29,\mp31,\pm33,\pm35,\pm37,$ $\mp39$ | 1,2,3,5,6 |
| 42 | $84i\pm1,\mp5,\mp11,\pm13,\pm17,\mp19,\pm23,\pm25,\pm29,$ $\pm31,\mp37,\pm41$ | 1,2,3,6 |
| 43 | $86i+1,-3,-5,-7,+9,+11,+13,+15,+17,-19,$ $+21,+23,+25,-27,-29,+31,-33,+35,-37,$ $-39,+41$ | 1,4 |
| 44 | $88i+1,+3,+5,-7,+9,-13,+15,-17,-19,-21,$ $+23,+25,+27,-29,+31,-35,+37,-39,$ $-41,-43$ | 1,3,4,5 |
| 45 | $90i\pm1,\pm7,\mp11,\mp13,\mp17,\mp19,\pm23,\pm29,\mp31,$ $\mp37,\pm41,\pm43$ | 1,2,3,5,7 |
| 46 | $92i\pm1,\mp3,\pm5,\mp7,\pm9,\pm11,\mp13,\mp15,\mp17,\pm19,$ $\pm21,\pm25,\mp27,\mp29,\pm31,\mp33,\mp35,\pm37,\pm39,$ $\pm41,\pm43,\pm45$ | 1,2,5 |
| 47 | $94i+1,+3,-5,+7,+9,-11,-13,-15,+17,-19,+21$ $-23,+25,+27,-29,-31,-33,-35,+37,-39,$ $-41,-43,-45$ | 1,3,7 |
| 48 | $96i+1,-5,+7,-11,+13,-17,+19,-23,+25,$ $-29,+31,-35,+37,-41,+43,-47$ | 1,3,4,7 |

n

| $n$ | Diuiſores P | $f$ |
|---|---|---|
| 49 | $98i \pm 1, \mp 3, \pm 5, \pm 9, + 11, \pm 13, \mp 15, \pm 17, + 19, + 23,$ $\pm 25, \mp 27, \pm 29, \mp 31, \pm 33, \pm 37, \mp 39, \pm 41, \mp 43,$ $\pm 45, \mp 47$ | 1,2,5 |
| 50 | $100i \pm 1, \pm 3, \mp 7, \pm 9, \pm 11, \mp 13, \pm 17, \pm 19, \mp 21,$ $\mp 23, \pm 27, \mp 29, \mp 31, \pm 33, \mp 37, \mp 39, \pm 41, \pm 43,$ $\mp 47, \pm 49$ | 1,2,3,6 |

## Scholion 2.

§. 27. Haec tabula facili negotio quousque libuerit continuari poteſt. Propoſito enim quocunque numero $n$, pro formula $2ni + A$ quaerantur primo omnes numeri primi minores quam $n$ ſimulque ad $n$ primi, quibus ſignum $+$ tribuatur, ſi $n$ fuerit formae vel $4k$ vel $4k - 1$; caſibus autem quibus $n$ eſt formae $4k + 1$ vel $4k + 2$, praefigendum eſt ſignum ambiguum $\pm$; reliquis vero numeris primis praefigatur ſiue ſignum $-$ ſiue ambiguum $\mp$. Quodſi $n$ diuiſores habeat impares, eos omnes ex valoribus ipſius A excludi oportet, reliqui vero numeri primi deſumantur ex diuiſoribus numerorum in hac formula $n + xx$ contentorum, dum loco $x$ ſucceſſiue ſcribuntur ordine numeri 1, 2, 3, 4, 5, etc. quos autem non vltra $\frac{1}{2}n$ continuare opus eſt. Si enim $p$ denotet maximum numerum primum minorem quam $n$, niſi is fuerit diuiſor formae $n + xx$, ſumto $x < \frac{1}{2}p$, tum certe non erit diuiſor, quantumuis magni numeri ſcribantur. Hoc ergo modo facile omnes numeri loco A ſcribendi deteguntur, quibus inuentis numeri compoſiti facile ex ipſa compoſitione colliguntur, dum ſignum cuiusque producti ex ſignis factorum more ſolito formatur. Totam hanc operationem operae pretium erit aliquot exemplis declarare. Sit igitur primo $n = 40$, ideoque formae $4k$, vnde omnes valores A ſignis ſimplicibus afficien-

ficientur. Quia iam 37 eſt maximus numerus primus infra 40, ſufficiet numeros $x$ vsque ad 18 continuaſſe. Hos ergo valores formae $40+xx$ hic vna cum ſingulis diuiſoribus primis infra 40, praeter 5, apponamus:

| $n+xx$ | Diuiſores. | $n+xx$ | Diuiſores. |
|---|---|---|---|
| 41 | — | 140 | 7 |
| 44 | 11 | 161 | 7, 23 |
| 49 | 7 | 184 | 23 |
| 56 | 7 | 209 | 11, 19 |
| 65 | 13 | 236 | — |
| 76 | 19 | 265 | — |
| 89 | — | 296 | 37 |
| 104 | 13 | 329 | 7 |
| 121 | 11 | 364 | 7, 13 |

Hinc ergo numeri primi ſigno $+$ afficiendi ſunt $+1$, $+7$, $+11$, $+13$, $+19$, $+23$, $+37$, reliqui vero numeri primi minores quam 40 habebunt ſignum $-$, eruntque $-3$, $-17$, $-29$, $-31$, atque ex his numeri compoſiti erunt $+9$, $-21$, $-27$, $-33$, $-39$, quocirca formula pro diuiſoribus primis P erit ſequens:

$$80i+1,\ -3,\ +7,\ +9,\ +11,\ +13,\ -17,\ +19,\ -21,\ +23\ -27,\ -29,\ -31,\ -33,\ +37,\ -39.$$

Pro altero exemplo ſumatur $n=41$, qui numerus cum ſit formae $4k+1$, ſigna ambigua erunt adhibenda. Quaerantur igitur primo omnes diuiſores primi numerorum formae $41+xx$, quos non vltra $x=18$ continuare eſt opus, quia maximus numerus primus infra 41 eſt 37, cuius dimidium eſt 18; haec ergo operatio vt ante inſtituatur.

| $n+xx$ | Diuiſores. | $n+xx$ | Diuiſores. |
|---|---|---|---|
| 42 | 3, 7 | 141 | 3 — |
| 45 | 3, 5 | 162 | 3 |
| 50 | 5 | 185 | 5, 37 |
| 57 | 3, 19 | 210 | 3, 5, 7 |
| 66 | 3, 11 | 237 | 3 |
| 77 | 7, 11 | 266 | 7, 19 |
| 90 | 3, 5 | 297 | 3, 11 |
| 105 | 3, 5, 7 | 330 | 3, 5, 11 |
| 122 | — | 365 | 5 |

Numeri ergo primi ſigno $\pm$ afficiendi ſunt $\pm 1$, $\pm 3$, $\pm 5$, $\pm 7$, $\pm 11$, $\pm 19$, $\pm 37$, reliqui vero ſigno $\mp$ afficiendi ſunt $\mp 13$, $\mp 17$, $\mp 23$, $\mp 29$, $\mp 31$, vnde numeri compoſiti colliguntur $\pm 9$, $\pm 15$, $\pm 21$, $\pm 25$, $\pm 27$, $\pm 33$, $\pm 35$, $\mp 39$, quare formula pro diuiſoribus primis P ita ſe habebit:

$$82i \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \pm 11, \mp 13, \pm 15, \mp 17, \pm 19, \pm 21, \mp 23, \pm 25, \pm 27, \mp 29, \mp 31, \pm 33, \pm 35, \pm 37, \mp 39.$$

## Scholion 3.

§. 28. Quod ad indices $f$ pro quouis numero $n$ attinet, forma generalis, quam illuſtris *de la Grange* pro diuiſoribus formae $xx+nyy$ dedit, conſiderari debet, quae erat $fpp+2gpq+hqq$, exſiſtente $fh=n+gg$, vbi notetur, plures huiusmodi formulas quouis caſu non opus eſſe formari, quam vbi $2g$ non excedit $f$; praeterea autem hic pro $f$ ſumimus minorem factorem formulae $n+gg$; tum vero neceſſe eſt, vt alter numerorum $f$ et $h$ ſit par, hocque pacto facile erit, omnes indices $f$ aſſignare. Ita pro priori exemplo ſupra allato, vbi $n=40$, ſumatur primo $g=0$, eritque $fh=40=5\cdot 8$, ſicque

ſicque erit $f = 5$; deinde ſumto $g = 1$ fiet $fh = 41$, ideoque $f = 1$; ſumto porro $g = 2$ erit $fh = 44$, ideoque $f = 4$; ſumto autem $g = 3$, ob $fh = 49$ eſſe poterit $f = 7$, vnde omnes valores ipſius $f$ erunt 1, 4, 5, 7. Pro altero exemplo, quo $n = 41$, valor $g = 0$ tantum dat $f = 1$; valor $g = 1$ praebet $fh = 42$, hincque vel $f = 2$, vel $f = 3$, vel $f = 6$; porro valor $g = 2$ praebet $fh = 45$, vnde colligitur $f = 5$; denique valor $g = 3$ dat $fh = 50$, vnde iterum ſequitur $f = 5$, ſicque omnes valores pro $f$ ſunt 1, 2, 3, 5, 6. Hinc ergo colligimus, quoties pro formula $xx + 41yy$ prodeat P numerus primus, tum ſemper fore vel P, vel 2P, vel 3P, vel 5P, vel 6P, certum numerum formae $xx + 41yy$. Veluti ſumto $i = 1$, quia eſt $82 - 3 = 79$, ideoque numerus primus, ſtatim patet, hunc ipſum numerum 79 in forma $xx + 41yy$ non contineri, neque etiam eius duplum 158: at eius triplum 237 eſt $14^2 + 41.1^2$. Simili modo pro P etiam reperitur numerus primus 73, qui neque ipſe, neque eius duplum, neque triplum in propoſita forma continetur, at vero eius quintuplum 365 eſt $= 18^2 + 41.1^2$.

## Problema.

*Si* n *fuerit numerus negatiuus, puta* n $= -$ m, *inuenire formulam generalem pro omnibus numeris primis, qui exſiſtere poſſunt diuiſores cuiuspiam numeri formae* $xx - myy$, *vel etiam formae* $myy - xx$.

## Solutio.

§. 29. Solutio huius problematis inſtituatur vti praecedentis, ſcribendo ſcilicet $-m$ loco $n$, tum vero ſi P denotet diuiſorem primum formulae propoſitae, quoniam is neceſſario eſſe debet poſitiuus, etiam numerum $i$ negatiuum accipi

 conuenit

conuenit, vnde formula ſupra inuenta euadet

$$P = 4mi + \frac{ss - muu}{\lambda},$$

vel etiam

$$P = 4mi - \frac{ss + muu}{\lambda},$$

ex quo manifeſtum eſt, omnes numeros primo membro $4mi$ adiungendos tam poſitiue quam negatiue accipi poſſe, ita vt generatim habeamus $P = 4mi \pm A$, vbi A denotat omnes diuiſores, ſiue formulae $ss - m$, ſiue formulae $m - ss$, qui quidem ad $4n$ ſint primi, vnde ex his diuiſoribus excluduntur primo omnes numeri pares, deinde etiam ii impares, qui cum numero $m$ communem inuoluunt diuiſorem.

§. 30. Quodſi multitudo omnium numerorum ad $4n$ primorum eoque minorum ſit $= 4k$, numerus valorum ipſius A tantum erit $= k$, qui autem ob ſigna ambigua cenſendus eſt $= 2k$, ita vt numerus excluſorum itidem ſit $= 2k$. Hoc obſeruato, ſi $a$ fuerit diuiſor formae $m - ss$, vel $ss - m$, tum quoties $4mi \pm a$ fuerit numerus primus, is ſemper erit diuiſor numeri cuiuſpiam formae propoſitae; contra autem, ſi $\alpha$ fuerit numerus hinc excluſus, tum certe affirmare licet, nullum numerum formae $4mi \pm \alpha$ vnquam diuiſorem eſſe poſſe formae propoſitae.

§. 31. Ex theoremate autem illuſtris *de la Grange* omnes diuiſores formae propoſitae continentur in hac formula generali: $fpp \pm 2gpq - hgg$, exſiſtente $fh = m - gg$, quas autem formulas eo vsque tantum continuare opus eſt, donec $2g$ ſuperet $f$; ſemper enim nobis denotet $f$ minorem binorum factorum, in quos numerus $m - gg$ reſoluitur. Praeterea vero, vt caſu praecedente, alter numerorum $f$ et $h$ ſumi debet impar; vnde intelligitur, pro quouis caſu multitudinem valo-

valorum ipſius $f$ ſatis fore modicam, quibus inuentis omnes diuiſores primi P, vel ipſi, vel per quempiam valorem ipſius $f$ multiplicati, in forma propoſita continebuntur, idque non vnico modo, vti caſu praecedente vſu venit, ſed infinitis adeo modis.

§. 32. Hinc autem merito excludimus caſus quibus $m$ eſt numerus quadratus, quia tum omnes plane numeri primi, nullo excluſo, euadere poſſunt diuiſores formae propoſitae, id quod etiam inde patet, quod pro A ſumi debent omnes diuiſores formulae $ss - m$; hinc enim ſi fuerit $m = ll$, et capiatur $s = l$, haec formula fit o, at vero ciphra per omnes plane numeros eſt diuiſibilis.

## Corollarium 1.

§. 33. Quodſi ergo $a$ fuerit diuiſor cuiuspiam numeri formae $xx - myy$, tum omnes numeri primi tam in hac forma $4mi + a$, quam in hac: $4mi - a$, certe erunt diuiſores cuiuspiam numeri formae propoſitae; tum vero etiam vel ipſi, vel per quempiam valorem ipſius $f$ multiplicati, in eadem forma continebuntur.

## Corollarium 2.

§. 34. Quoniam omnes valores ipſius A tam poſitiue quam negatiue accipiuntur, eos non vltra terminum $2m$ continuari neceſſe eſt, ideoque ſi numeri $m - ss$, vel $ss - m$, ordine ſcribantur, valores litterae $s$ non vltra $\frac{1}{2}p$ continuare opus eſt, ſiquidem $p$ denotet maximum numerum primum minorem quam $2m$.

## Corollarium 4.

§. 35. Cum valores producti $fh$ ſint $m$, $m-1$, $m-4$, $m-9$, $m-16$, $m-25$, etc., qui ab initio decreſcunt, ſi ex quopiam maiore ſumatur $fh$, in minoribus vero occurrant ſiue $fk$, ſiue $kk$, ita vt $k$ ſit $<f$, tum in indices loco $f$ referri debet $k$; vnde ſi fuerit $k=1$, multitudo indicum hinc non augebitur: ſi enim fuerit $f$P formae $xx-myy$, ſiue $myy-xx$, tum etiam ſemper $h$P eandem habebit formam, ideoque etiam $k$P eandem formam habebit.

## Scholion 1.

§. 36. Poſtquam omnes numeri primi ipſo $4m$ minores ſimulque ad eum primi, fuerint notati, qui ſint $a$, $b$, $c$, $d$, etc. reliqui etiam notentur, qui ſint $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. et numeri compoſiti vel erunt producta ex numeris $a$, $b$, $c$, $d$, etc. vel producta ex binis excluſorum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. Quodſi ergo P denotet omnes diuiſores primos numerorum formae $xx-myy$, ſumamus $\Pi$ pro denotandis numeris inde excluſis, erit

$$P = 4mi \pm (a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \text{etc.}),$$
$$\Pi = 4mi \pm (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \text{etc.}),$$

vnde pro quouis numero $m$ iſtae binae formulae facile conſtruentur; ſemper autem ambae pari terminorum numero conſtabunt. Veluti ſi fuerit $m=21$, ita vt ex diuiſoribus excludi debeant numeri 3 et 7 cum ſuis multiplis, euoluantur numeri ex forma $21-ss$ oriundi, nullo reſpectu habito ſiue ſint poſitiui ſiue negatiui, et pro quouis notentur diuiſores primi, praeter 3 et 7, non ſuperantes $2m=42$, quae operatio hoc modo inſtituatur.

| $2r - ss$ | Diuiſores. | $2r - ss$ | Diuiſores. |
|---|---|---|---|
| 21 | | 79 | — |
| 20 | 5 | 100 | 5 |
| 17 | 17 | 123 | 41 |
| 12 | — | 148 | 37 |
| 5 | 5 | 175 | 5 |
| 4 | — | 204 | 17 |
| 15 | 5 | 235 | — |
| 28 | — | 268 | — |
| 43 | — | 303 | — |
| 60 | 5 | 340 | 17, 5 |

Hinc ergo valores pro litteris $a$, $b$, $c$, $d$, ſunt 5, 17, 37, 41, excluſi vero, litteris $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. denotati, ſunt 11, 13, 19, 23, 29, 31: ad illos igitur accedit compoſitus 25, ita vt ambae noſtrae formulae futurae ſint

$$P = 84i \pm (1, 5, 17, 25, 37, 41),$$
$$\Pi = 84i \pm (11, 13, 19, 23, 29, 31).$$

Sicque vtraque forma eodem terminorum numero conſtat, id quod ſemper fieri neceſſe eſt. Pro productis autem $fh$, prouti ex terminis decreſcentibus oriuntur, habebimus ſequentia: 3.7, 4.5, 3.4, 1.5, 1.4, ex quorum minimis 5 et 4 patet, vnitatem tantum inter indices eſſe referendam. Hinc ex 3.4 etiam 3 ad vnitatem reducitur, vnde concluditur, vnicum dari indicem 1. Hic conueniebat etiam formulas afferre pro numeris qui nullo modo diuiſores eſſe poſſunt, quas in ſuperiori tabula ſuperfluum fuiſſet adiungere, quoniam ſi in formulis pro P datis ſingula ſigna in contraria mutentur, tum eae praebebunt omnes numeros Π.

Tabula

# Tabula exhibens omnes diuiſores primos pro numeris formae vel $xx - myy$ vel $myy - xx$, vna cum indicibus $f$.

Vbi perpetuo ſigna ambigua ſimul locum inueniunt.

| $m$ | P et Π. | $f$ |
|---|---|---|
| 2 | $8i \pm 1$ | 1 |
| | $8i \pm 3$ | |
| 3 | $12i \pm 1$ | 1 |
| | $12i \pm 5$ | |
| 5 | $20i \pm (1, 9)$ | 1 |
| | $20i \pm (3, 7)$ | |
| 6 | $24i \pm (1, 5)$ | 1 |
| | $24i \pm (7, 11)$ | |
| 7 | $28i \pm (1, 3, 9)$ | 1 |
| | $28i \pm (5, 11, 13)$ | |
| 8 | $32i \pm (1, 7, 9, 15)$ | 1 |
| | $32i \pm (3, 5, 11, 13)$ | |
| 10 | $40i \pm (1, 3, 9, 13)$ | 1, 2 |
| | $40i \pm (7, 11, 17, 19)$ | |
| 11 | $44i \pm (1, 5, 7, 9, 19)$ | 1 |
| | $44i \pm (3, 11, 13, 17, 21)$ | |
| 12 | $48i \pm (1, 11, 13, 23)$ | 1 |
| | $48i \pm (5, 7, 17, 19)$ | |
| 13 | $52i \pm (1, 3, 9, 17, 23, 25)$ | 1 |
| | $52i \pm (5, 7, 11, 15, 19, 21)$ | |
| 14 | $56i \pm (1, 5, 9, 11, 13, 25)$ | 1 |
| | $56i \pm (3, 15, 17, 19, 23, 27)$ | |
| 15 | $60i \pm (1, 7, 11, 17)$ | 1, 2 |
| | $60i \pm (13, 19, 23, 29)$ | |

| $m$ | P et Π. | $f$ |
|---|---|---|
| 17 | $68\,i \pm (1, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 33)$ | 1 |
| | $68\,i \pm (3, 5, 7, 11, 23, 27, 29, 31)$ | |
| 18 | $72\,i \pm (1, 7, 17, 23, 25, 31)$ | 1 |
| | $72\,i \pm (5, 11, 13, 19, 25, 35)$ | |
| 19 | $76\,i \pm (1, 3, 5, 9, 15, 17, 25, 27, 31)$ | 1 |
| | $76\,i \pm (7, 11, 13, 21, 23, 29, 33, 35, 37)$ | |
| 20 | $80\,i \pm (1, 9, 11, 19, 21, 29, 31, 39)$ | 1 |
| | $80\,i \pm (3, 7, 13, 17, 23, 27, 33, 37)$ | |
| 21 | $84\,i \pm (1, 5, 17, 25, 37, 41)$ | 1 |
| | $84\,i \pm (11, 13, 19, 23, 29, 31)$ | |
| 22 | $84\,i \pm (1, 3, 7, 9, 13, 21, 25, 27, 29, 39)$ | 1 |
| | $84\,i \pm (5, 15, 17, 19, 23, 31, 35, 37, 41, 43)$ | |
| 23 | $92\,i \pm (1, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 25, 29, 41, 43)$ | 1 |
| | $92\,i \pm (3, 5, 17, 21, 27, 31, 33, 35, 37, 39, 45)$ | |
| 24 | $96\,i \pm (1, 5, 19, 23, 25, 29, 43, 47)$ | 1 |
| | $96\,i \pm (7, 11, 13, 17, 31, 35, 37, 41)$. | |

## Scholion 2.

§. 37. Manifeſtum hic eſt, formulas P et Π pro caſu $m = 24$ non differre ab iis, quae pro caſu $m = 6$ ſunt datae, quemadmodum rei natura poſtulat, quoniam forma $xx - 6yy$ redigitur ad formam $xx - 24yy$, dum in priore loco $y$ ſcribitur $2y$, quae conuenientia in genere locum habere debet, ſi numerus $m$ per 4, aliumue numerum quadratum, multiplicetur. Eadem quoque harmonia reperitur in formulis prioris problematis: interim tamen diſcrimen intercedere poteſt ratione indicum $f$, quam ob cauſſam tales caſus a ſe inuicem diſtinximus. His igitur expeditis coronidis loco ſubiungam duo theoremata, quibus in caſibus prioris problematis formulae P ad

ad membrum $2ni$ ſunt reductae, et quorum veritatem ex hactenus traditis haud difficulter cognoſcere licebit.

## Theorema 3.

§. 38. Si fuerit $n = 4k + 1$, vel $n = 4k + 2$, quoties fuerit $4ni + 2n + 1$ numerus primus, is erit diuiſor formae $xx + nyy$.

## Theorema 4.

§. 39. Si fuerit vel $n = 4k$, vel $n = 4k - 1$, tum, quoties fuerit $4ni - 2n + 1$ numerus primus, is erit diuiſor formae $xx + nyy$.

# INVESTIGATIO CVRVARVM QVAE SIMILES SINT SVIS EVOLVTIS VEL PRIMIS, VEL SECVNDIS, VEL TERTIIS, VEL ADEO ORDINIS CVIVSCVNQVE.

Auctore
*L. EVLERO.*

*Conuent. exhib. d.* 11. *Dec.* 1775.

§. 1.

Sit $a\,s$ curua quaeſita ad axem $a\,r$ relata, qui ad curuam in $a$ ſit normalis, & ſtatuatur curuae in $s$ radius oſculi $s\,s'$, erit $s'$ punctum in euoluta prima, quae ſit $a'\,s'$ et referatur ad axem $a'\,r'$ priori $a\,r$ normalem. Tum pro hac euoluta prima $a'\,s'$ ſit $s'\,s''$ radius oſculi in puncto $s'$, erit $s''$ punctum in euoluta ſecunda $a''\,s''$, quae referatur ad axem $a''\,r''$ priori $a'\,r'$ normalem ideoque parallelum axi primo $a\,r$. Simili modo euolutae huius ſecundae $a''\,s''$ ſit in puncto $s''$ radius oſculi $s''\,s'''$, erit $s'''$ punctum in euoluta tertia, quae referatur ad axem $a'''\,r'''$; hocque modo, quovsque libuerit, progredi licet. Hinc igitur primo ex natura euolutionis erit radius oſculi $s\,s' = a\,a' + a'\,s'$; eodemque modo radius oſculi $s'\,s'' = a'\,a'' + a''\,s''$; porro radius oſculi $s''\,s''' = a''\,a''' + a'''\,s'''$; etc. Deinde quia ſinguli radii oſculi ſunt normales ad curuas, ad quas pertinent, ſequentes autem tangunt: manifeſtum eſt, omnes angulos $a\,r\,s$, $a'\,r'\,s'$, $a''\,r''\,s''$, Tab. II. Fig. 1.

 $a'''$

$a''' r''' s'''$, etc. eſſe inter ſe aequales: ſunt vero iſti anguli amplitudines arcuum $a s$, $a' s'$, $a'' s''$, $a''' s'''$ etc., vnde patet, omnes iſtos arcus ſibi inuicem reſpondentes etiam eſſe aeque amplos.

§. 2. Cum igitur omnes arcus $a s$, $a' s'$, $a'' s''$, etc., ſint aeque ampli, ponatur iſta amplitudo $= \Phi$, cui ergo aequales erunt anguli $a' r' s'$, $a'' r'' s''$, $a''' r''' s'''$. Iam pro ipſa curua quaeſita $a s$ vocetur arcus $a s = s$ et radius oſculi $s s' = r$; tum vero pro prima euoluta $a' s'$ ſit arcus $a' s' = s'$ et radius $s' s'' = r'$; ſimilique modo pro euoluta ſecunda ſit arcus $a'' s'' = s''$ et radius oſculi $s'' s''' = r''$; eodemque modo denominationes fiant pro omnibus ſequentibus euolutis. Praeterea vero ponantur interualla conſtantia $a a' = a$; $a' a'' = a'$; $a'' a''' = a''$; etc. quae ſimul radios oſculi exhibent curuarum in punctis $a'$, $a''$, $a'''$ etc. Hinc igitur primo habebimus ſequentes aequalitates:

$$r = a + s',\quad r' = a' + s'',\quad r'' = a'' + s''',\quad r''' = a''' + s'''', \text{ etc.}$$

vnde colliguntur ſequentes valores:

$$s' = r - a,\quad s'' = r' - a',\quad s''' = r'' - a'',\quad s'''' = r''' - a''', \text{ etc.}$$

Tab. II. Fig. 2. §. 3. Cum nunc ſit amplitudo arcus $a s$, ſeu angulus $a r s = \Phi$, ducto radio oſculi proximo $\sigma \varrho \sigma'$, erit primo elementum $s \sigma = \partial s$ et angulus $a \varrho \sigma = \Phi + \partial \Phi$, vnde conficitur angulus $r s' \varrho = \partial \Phi$; hinc igitur fiet $\partial \Phi = \frac{\partial s}{r}$, ideoque $\partial s = r \partial \Phi$. Simili igitur modo pro curuis ſequentibus erit $\partial s' = r' \partial \Phi$, $\partial s'' = r'' \partial \Phi$, $\partial s''' = r''' \partial \Phi$ etc. Ex ſuperioribus autem fit $\partial s' = \partial r$, $\partial s'' = \partial r'$, $\partial s''' = \partial r''$, etc. quibus valoribus ſubſtitutis prodibunt ſequentes aequationes:

$$\partial r = r' \partial \Phi;\quad \partial r' = r'' \partial \Phi;\quad \partial r'' = r''' \partial \Phi; \text{ etc.}$$

ex quibus ſequuntur valores

$$r' = \frac{\partial r}{\partial \Phi};\quad r'' = \frac{\partial r'}{\partial \Phi};\quad r''' = \frac{\partial r''}{\partial \Phi}; \text{ etc.}$$

Quare

Quare ſi elementum $\partial\Phi$ pro conſtante accipiamus, omnes radios oſculi ſe inuicem inſequentes per differentialia primi radii oſculi $r$ poterimus exprimere, quandoquidem erit

$$r' = \frac{\partial r}{\partial\Phi},\ r'' = \frac{\partial\partial r}{\partial\Phi^2},\ r''' = \frac{\partial^3 r}{\partial\Phi^3},\ r'''' = \frac{\partial^4 r}{\partial\Phi^4},\ \text{etc.}$$

§. 4. In genere igitur pro euoluta ordinis $n$ erit radius oſculi $r^{(n)} = \frac{\partial^{(n)} r}{\partial\Phi^n}$; quamobrem ſi haec euoluta ſimilis eſſe debeat ipſi curuae quaeſitae, radius oſculi $r^{(n)}$ ſimili modo ſe habere debebit ad amplitudinem $\Phi$, quo ſe habet $r$ ad $\Phi$, vnde cum amplitudo $\Phi$ vbique ſit eadem, neceſſe eſt vt ſit $r^{(n)} = C r$, vbi littera C inuoluit rationem ſimilitudinis, qua indicatur, quoties euoluta ordinis $n$ maior minorue eſſe debeat quam ipſa curua quaeſita. Quoniam autem fieri poteſt vt euolutio in inuolutionem vertatur, his caſibus conſtanti C valorem negatiuum tribui conueniet; hanc ob rem, quo curua quaeſita ſimilis euadat ſuae euolutae ordinis $n$, ob $r^{(n)} = \pm C r$ erit aequatio pro curua quaeſita $C r = \frac{\partial^{(n)} r}{\partial\Phi^n}$, quae ergo aequatio plenam continet ſolutionem problematis propoſiti, totumque negotium redit ad reſolutionem huius aequationis differentialis ordinis $n$.

§. 5. Quoniam in hac aequatione quantitas $r$ in vtroque termino vnicam habet dimenſionem, euidens eſt, ſi huic aequationi ſatisfaciant valores $r = P$, $r = Q$, $r = R$, etc. eidemque ſatisfacturum eſſe valorem $r = \alpha P + \beta Q + \gamma R$, ex qua conditione, poſtquam omnia integralia particularia fuerint inuenta, facili negotio colligetur integrale completum, quando ſcilicet numerus integralium particularium fuerit $= n$, quod ergo continebit relationem inter radium oculi $r$ curuae quaeſitae

eiusque amplitudinem $\Phi$, ex qua quemadmodum aequationem inter coordinatas more ſolito elici oporteat deinceps ſumus oſtenſuri.

§. 6. Quo igitur integralia particularia huius aequationis: $\frac{\partial^n r}{\partial \Phi^n} \pm C r = 0$ eruamus, facile patet, ei ſatisfacere huiusmodi valores: $r = A e^{\lambda \Phi}$, denotante $e$ numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$; hinc enim erit vt ſequitur:

$$\frac{\partial r}{\partial \Phi} = A \lambda e^{\lambda \Phi}; \quad \frac{\partial \partial r}{\partial \Phi^2} = A \lambda \lambda e^{\lambda \Phi}; \quad \frac{\partial^3 r}{\partial \Phi^3} = A \lambda^3 e^{\lambda \Phi}; \text{ etc.}$$

vnde in genere colligitur $\frac{\partial^n r}{\partial \Phi^n} = A \lambda^n e^{\lambda \Phi}$, quo valore ſubſtituto aequatio noſtra euadit $A \lambda^n e^{\lambda \Phi} \pm C A e^{\lambda \Phi} = 0$, quae reducitur ad hanc formam: $\lambda^n \pm C = 0$, ex qua ergo aequatione omnes valores ipſius $\lambda$ erui oportet; quae aequatio cum ſit ordinis $n$, etiam totidem diuerſos valores pro littera $\lambda$ ſuppeditabit, quorum quilibet praebebit integrale particulare $r = A e^{\lambda \Phi}$. Hi ergo valores omnes in vnam ſummam collecti dabunt integrale completum.

§. 7. Cum igitur tota ſolutio ad hanc aequationem ſit perducta: $\lambda^n \pm C = 0$, nihil aliud opus eſt, niſi vt huius aequationis radices ſiue reales ſiue imaginarii eruantur, id quod nulla amplius laborat difficultate, quod autem quo commodius fieri poſſit, loco C ſcribamus ſimilem poteſtatem $\alpha^n$, vt haec aequatio nobis ſit reſoluenda: $\lambda^n \pm \alpha^n = 0$. Nouimus autem formulae $\lambda^n - \alpha^n$ factorem trinomialem in genere eſſe

$$\lambda \lambda - 2 \alpha \lambda \operatorname{coſ.} \frac{2 i \pi}{n} + \alpha \alpha,$$

alterius vero formae $\lambda^n + \alpha^n$ hunc fore factorem trinomialem:

$$\lambda \lambda - 2 \alpha \lambda \operatorname{coſ.} \frac{(2 i + 1) \pi}{n} + \alpha \alpha.$$

Quod

Quodſi ergo breuitatis gratia ſcribamus $\omega$, tam pro angulo $\frac{2i\pi}{n}$, quam pro $\frac{(2i+1)\pi}{n}$, vt habeamus hunc factorem: $\lambda\lambda - 2\alpha\lambda \cos.\omega + \alpha\alpha$, ex eo nihilo aequato colligitur

$$\lambda = \alpha(\cos.\omega \pm \sqrt{-1}\sin.\omega)$$

quae expreſſio totidem continet valores, quot numerus $n$ habet vnitates.

§. 8. Hoc igitur valore pro $\lambda$ in genere ſubſtituto aequatio pro curua quaeſita erit $r = A\, e^{\alpha\Phi\cos.\omega} \times e^{\pm\alpha\Phi\sqrt{-1}\sin.\omega}$, vbi factor poſtremus, in quo exponens eſt imaginarius, per notam reductionem, qua nouimus eſſe $e^{z\sqrt{-1}} = \cos.z + \sqrt{-1}\sin.z$, reducitur ad hanc formam:

$$\cos.\alpha\Phi\sin.\omega \pm \sqrt{-1}\sin.\alpha\Phi\sin.\omega,$$

ita vt in genere ſit

$$r = A\, e^{\alpha\Phi\cos.\omega}(\cos.\alpha\Phi\sin.\omega \pm \sqrt{-1}\sin.\alpha\Phi\sin.\omega).$$

§. 9. Quia haec formula duplicem inuoluit valorem, ob ſignum ambiguum, quo $\sqrt{-1}$ afficitur, mutato ſigno ſimili modo habebimus

$$r = B\, e^{\alpha\Phi\cos.\omega}(\cos.\alpha\Phi\sin.\omega \mp \sqrt{-1}\sin.\alpha\Phi\sin.\omega),$$

vnde ſi ponamus

$$A + B = \mathfrak{A} \text{ et } \pm A\sqrt{-1} \mp B\sqrt{-1} = \mathfrak{B},$$

erit ſublatis imaginariis

$$r = e^{\alpha\Phi\cos.\omega}(\mathfrak{A}\cos.\alpha\Phi\sin.\omega + \mathfrak{B}\sin.\alpha\Phi\sin.\omega).$$

Quoniam igitur pro $\omega$ ſemper habemus duas conſtantes arbitrarias $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, ex omnibus valoribus ipſius $\omega$ formabitur pro $r$ expreſſio, quae continebit $n$ conſtantes arbitrarias. At vero pro formula $\lambda^n - \alpha^n$ valores ipſius $\omega$ erunt ſequentes: $\frac{0\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$,

$\frac{4\pi}{n}$,

$\frac{4\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$, etc., pro altero autem caſu $\lambda^n + \alpha^n$ valores pro $\omega$ erunt $\frac{1\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, $\frac{5\pi}{n}$, etc.

§. 10. Ponamus ad abbreuiandum $\alpha\, \text{coſ.}\, \omega = \zeta$ et $\alpha\, \text{ſin.}\, \omega = \eta$, vt ſit $\alpha\alpha = \zeta\zeta + \eta\eta$ et habebimus

$$r = e^{\zeta\Phi}(\mathfrak{A}\, \text{coſ.}\, \eta\Phi + \mathfrak{B}\, \text{ſin.}\, \eta\Phi).$$

Hinc iam poterimus etiam radios oſculi $r'$, $r''$, $r'''$, etc. pro ſingulis euolutis aſſignare. Cum enim ſit $r' = \frac{\partial r}{\partial\Phi}$, erit

$$r' = e^{\zeta\Phi}\begin{pmatrix} \mathfrak{A}\zeta\, \text{coſ.}\, \eta\Phi + \mathfrak{B}\zeta\, \text{ſin.}\, \eta\Phi \\ + \mathfrak{B}\eta\, \text{coſ.}\, \eta\Phi - \mathfrak{A}\eta\, \text{ſin.}\, \eta\Phi \end{pmatrix}$$

Quodſi igitur breuitatis gratia ponamus $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}\zeta + \mathfrak{B}\eta$ et $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}\zeta - \mathfrak{A}\eta$, habebimus

$$r' = e^{\zeta\Phi}(\mathfrak{A}'\, \text{coſ.}\, \eta\Phi + \mathfrak{B}'\, \text{ſin.}\, \eta\Phi).$$

Pro ſequentibus ponamus porro

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'\zeta + \mathfrak{B}'\eta = \mathfrak{A}(\zeta\zeta - \eta\eta) + 2\mathfrak{B}\zeta\eta \text{ et}$$

$$\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B}'\zeta - \mathfrak{A}'\eta = \mathfrak{B}(\zeta\zeta - \eta\eta) - 2\mathfrak{A}\zeta\eta, \text{ erit}$$

$$r'' = \frac{\partial r'}{\partial\Phi} = e^{\zeta\Phi}(\mathfrak{A}''\, \text{coſ.}\, \eta\Phi + \mathfrak{B}''\, \text{ſin.}\, \eta\Phi).$$

Simili modo ponamus vlterius

$$\mathfrak{A}''' = \mathfrak{A}''\zeta + \mathfrak{B}''\eta = \mathfrak{A}(\zeta^3 - 3\zeta\eta\eta) + \mathfrak{B}(3\zeta\zeta\eta - \eta^3) \text{ et}$$

$$\mathfrak{B}''' = \mathfrak{B}''\zeta - \mathfrak{A}''\eta = \mathfrak{B}(\zeta^3 - 3\zeta\eta\eta) - \mathfrak{A}(3\zeta\zeta\eta - \eta^3) \text{ eritque}$$

$$r''' = e^{\zeta\Phi}(\mathfrak{A}'''\, \text{coſ.}\, \eta\Phi + \mathfrak{B}'''\, \text{ſin.}\, \eta\Phi),$$

ſimilique modo vlterius progredi licebit.

§. 11. Quo autem has formulas ad maiorem vniformitatem reducamus, reſtituamus loco $\zeta$ et $\eta$ valores aſſumtos $\zeta = \alpha\, \text{coſ.}\, \omega$ et $\eta = \alpha\, \text{ſin.}\, \omega$, quo facto habebimus

$$\mathfrak{A}' = \alpha(\mathfrak{A}\, \text{coſ.}\, \omega + \mathfrak{B}\, \text{ſin.}\, \omega);$$

$$\mathfrak{B}' = \alpha(\mathfrak{B}\, \text{coſ.}\, \omega - \mathfrak{A}\, \text{ſin.}\, \omega);$$

$$\mathfrak{A}'' = \alpha\,\alpha\,(\mathfrak{A}\ \text{coſ.}\ 2\,\omega + \mathfrak{B}\ \text{ſin.}\ 2\,\omega);$$
$$\mathfrak{B}'' = \alpha\,\alpha\,(\mathfrak{B}\ \text{coſ.}\ 2\,\omega - \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ 2\,\omega);$$
$$\mathfrak{A}''' = \alpha^3\,(\mathfrak{A}\ \text{coſ.}\ 3\,\omega + \mathfrak{B}\ \text{ſin.}\ 3\,\omega);$$
$$\mathfrak{B}''' = \alpha^3\,(\mathfrak{B}\ \text{coſ.}\ 3\,\omega - \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ 3\,\omega).$$
etc.

Hinc igitur pro euoluta ordinis $n$ erit

$$\mathfrak{A}^{(n)} = \alpha^n\,(\mathfrak{A}\ \text{coſ.}\ n\,\omega + \mathfrak{B}\ \text{ſin.}\ n\,\omega);$$
$$\mathfrak{B}^{(n)} = \alpha^n\,(\mathfrak{B}\ \text{coſ.}\ n\,\omega - \mathfrak{A}\ \text{ſin.}\ n\,\omega).$$

Cum igitur ſit vel $\omega = \frac{2\,i\,\pi}{n}$, vel $\omega = \frac{(2\,i+1)\,\pi}{n}$, erit priore caſu $n\,\omega = 2\,i\,\pi$, ideoque ſin. $n\,\omega = 0$ et coſ. $n\,\omega = 1$; poſteriore vero caſu erit $n\,\omega = (2\,i+1)\,\pi$, ideoque ſin. $n\,\omega = 0$, at coſ. $n\,\omega = -1$, quamobrem pro priore caſu erit $\mathfrak{A}^{(n)} = \alpha^n\,\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}^{(n)} = \alpha^n\,\mathfrak{B}$, vnde fit

$$r^{(n)} = e^{\zeta\,\Phi}\,(\mathfrak{A}^{(n)}\ \text{coſ.}\ \eta\,\Phi + \mathfrak{B}^{(n)}\ \text{ſin.}\ \eta\,\Phi)\ \text{ideoque}$$
$$r^{(n)} = \alpha^n\,e^{\zeta\,\Phi}\,(\mathfrak{A}\ \text{coſ.}\ \eta\,\Phi + \mathfrak{B}\ \text{ſin.}\ \eta\,\Phi),$$

qui valor ſe habet ad $r$, vt $\alpha^n : 1$; pro poſteriore vero caſu erit $\mathfrak{A}^{(n)} = -\alpha^n\,\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}^{(n)} = -\alpha^n\,\mathfrak{B}$, hincque naſcitur

$$r^{(n)} = -\alpha^n\,e^{\zeta\,\Phi}\,(\mathfrak{A}\ \text{coſ.}\ \eta\,\Phi + \mathfrak{B}\ \text{ſin.}\ \eta\,\Phi)$$

ergo $r^{(n)} = -\alpha^n\,r$, ſicque pro vtroque caſu ſimilitudo eſt manifeſta.

§. 12. Hoc igitur modo pro curua quaeſita, quae in genere ſuae euolutae ordinis $n$ eſt ſimilis, aequationem nacti ſumus inter eius radium oſculi $r$ et amplitudinem $\Phi$: imprimis igitur requiritur, vt hanc aequationem ad coordinatas orthogonales more ſolito reuocemus. Hunc in finem ad axem $a\,r$ ex curuae puncto $s$ demittatur perpendiculum $s\,x$, ac vocentur abſciſſa $a\,x = x$ et applicata $x\,s = y$, vt ſit $\partial\,s^2 = \partial\,x^2 + \partial\,y^2$.

 Iam

Iam quia applicata $xs$ inclinatur ad curuam $as$ ſub angulo $asx = \Phi$, erit

$$\partial x = \partial s \text{ ſin. } \Phi \text{ et } \partial y = \partial s \text{ coſ. } \Phi;$$

quia igitur eſt

$$\partial s = r \partial \Phi = e^{\varsigma \Phi} \partial \Phi (\mathfrak{A} \text{ coſ. } \eta \Phi + \mathfrak{B} \text{ ſin. } \eta \Phi),$$

hinc ambas coordinatas $x$ et $y$ per amplitudinem $\Phi$ exprimere licebit ſequenti modo:

$$\partial x = e^{\varsigma \Phi} \partial \Phi \text{ ſin. } \Phi (\mathfrak{A} \text{ coſ. } \eta \Phi + \mathfrak{B} \text{ ſin. } \eta \Phi) \text{ et}$$
$$\partial y = e^{\varsigma \Phi} \partial \Phi \text{ coſ. } \Phi (\mathfrak{A} \text{ coſ. } \eta \Phi + \mathfrak{B} \text{ ſin. } \eta \Phi).$$

ad quas formulas integrandas notetur eſſe

$$\text{ſin. } \Phi \text{ coſ. } \eta \Phi = \tfrac{1}{2} \text{ ſin. } (\eta + 1) \Phi - \tfrac{1}{2} \text{ ſin. } (\eta - 1) \Phi;$$
$$\text{ſin. } \Phi \text{ ſin. } \eta \Phi = \tfrac{1}{2} \text{ coſ. } (\eta - 1) \Phi - \tfrac{1}{2} \text{ coſ. } (\eta + 1) \Phi;$$
$$\text{coſ. } \Phi \text{ coſ. } \eta \Phi = \tfrac{1}{2} \text{ coſ. } (\eta - 1) \Phi + \tfrac{1}{2} \text{ coſ. } (\eta + 1) \Phi;$$
$$\text{coſ. } \Phi \text{ ſin. } \eta \Phi = \tfrac{1}{2} \text{ ſin. } (\eta + 1) \Phi + \tfrac{1}{2} \text{ ſin. } (\eta - 1) \Phi.$$

His igitur valoribus ſubſtitutis, ambae noſtrae formulae in quatuor partes diſcerpantur, et integratione indicata fiet

$$x = \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\int e^{\varsigma\Phi}\partial\Phi \text{ ſin. } (\eta+1)\Phi + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\int e^{\varsigma\Phi}\partial\Phi \text{ coſ. } (\eta-1)\Phi \\ -\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\int e^{\varsigma\Phi}\partial\Phi \text{ ſin. } (\eta-1)\Phi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\int e^{\varsigma\Phi}\partial\Phi \text{ coſ. } (\eta+1)\Phi \end{array} \right\};$$

$$y = \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\int e^{\varsigma\Phi}\partial\Phi \text{ coſ. } (\eta-1)\Phi + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\int e^{\varsigma\Phi}\partial\Phi \text{ ſin. } (\eta+1)\Phi \\ +\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\int e^{\varsigma\Phi}\partial\Phi \text{ coſ. } (\eta+1)\Phi + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\int e^{\varsigma\Phi}\partial\Phi \text{ ſin. } (\eta-1)\Phi \end{array} \right\}.$$

§. 13. Pro his integralibus inueniendis in ſubſidium vocentur iſtae integrationes generales:

$$\int e^{\varsigma\Phi} \partial \Phi \text{ ſin. } \lambda \Phi = -\frac{\lambda}{\varsigma\varsigma + \lambda\lambda} e^{\varsigma\Phi} \text{ coſ. } \lambda \Phi + \frac{\varsigma}{\varsigma\varsigma + \lambda\lambda} e^{\varsigma\Phi} \text{ ſin. } \lambda \Phi;$$
$$\int e^{\varsigma\Phi} \partial \Phi \text{ coſ. } \lambda \Phi = \frac{\lambda}{\varsigma\varsigma + \lambda\lambda} e^{\varsigma\Phi} \text{ ſin. } \lambda \Phi + \frac{\varsigma}{\varsigma\varsigma + \lambda\lambda} e^{\varsigma\Phi} \text{ coſ. } \lambda \Phi.$$

Hinc igitur erit

$$x = \frac{e^{\zeta\Phi}}{2(\zeta\zeta+(\eta+1)^2)}[(\mathfrak{A}\zeta-\mathfrak{B}(\eta+1))\,\text{ſin.}(\eta+1)\Phi-(\mathfrak{B}\zeta+\mathfrak{A}(\eta+1))\,\text{coſ.}(\eta+1)\Phi]$$

$$-\frac{e^{\zeta\Phi}}{2(\zeta\zeta+(\eta-1)^2)}[(\mathfrak{A}\zeta-\mathfrak{B}(\eta-1))\,\text{ſin.}(\eta-1)\Phi-(\mathfrak{B}\zeta+\mathfrak{A}(\eta-1))\,\text{coſ.}(\eta-1)\Phi];$$

ſimili modo reperietur

$$y = \frac{e^{\zeta\Phi}}{2(\zeta\zeta+(\eta+1)^2)}[(\mathfrak{A}\zeta-\mathfrak{B}(\eta+1))\,\text{coſ.}(\eta+1)\Phi+(\mathfrak{B}\zeta+\mathfrak{A}(\eta+1))\,\text{ſin.}(\eta+1)\Phi]$$

$$+\frac{e^{\zeta\Phi}}{2(\zeta\zeta+(\eta-1)^2)}[(\mathfrak{A}\zeta-\mathfrak{B}(\eta-1))\,\text{coſ.}(\eta-1)\Phi+(\mathfrak{B}\zeta+\mathfrak{A}(\eta-1))\,\text{ſin.}(\eta-1)\Phi].$$

Hic notetur, ob $\zeta = \alpha\,\text{coſ.}\,\omega$ et $\eta = \alpha\,\text{ſin.}\,\omega$ pro denominatoribus fore

$$\zeta\zeta+(\eta+1)^2 = \alpha\alpha+2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega+1 \text{ et}$$
$$\zeta\zeta+(\eta-1)^2 = \alpha\alpha-2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega+1.$$

§. 14. Caſus hic notatu dignus occurrit, quo fit $\omega = 0$, qui eſt primus valor ipſius $\omega$, quoties fuerit $r^{(n)} = +\alpha^n r$: hoc igitur caſu erit $\zeta = \alpha$ et $\eta = 0$, tum igitur erit $r = e^{\alpha\Phi}\mathfrak{A}$, hincque

$$x = \left\{\begin{array}{l} \frac{e^{\alpha\Phi}}{2(\alpha\alpha+1)}[(\mathfrak{A}\alpha-\mathfrak{B})\,\text{ſin.}\,\Phi-(\mathfrak{B}\alpha+\mathfrak{A})\,\text{coſ.}\Phi] \\ +\frac{e^{\alpha\Phi}}{2(\alpha\alpha+1)}[(\mathfrak{A}\alpha+\mathfrak{B})\,\text{ſin.}\,\Phi+(\mathfrak{B}\alpha-\mathfrak{A})\,\text{coſ.}\Phi] \end{array}\right\};$$

$$y = \left\{\begin{array}{l} \frac{e^{\alpha\Phi}}{2(\alpha\alpha+1)}[(\mathfrak{A}\alpha-\mathfrak{B})\,\text{coſ.}\,\Phi+(\mathfrak{B}\alpha+\mathfrak{A})\,\text{ſin.}\,\Phi] \\ +\frac{e^{\alpha\Phi}}{2(\alpha\alpha+1)}[(\mathfrak{A}\alpha+\mathfrak{B})\,\text{coſ.}\,\Phi-(\mathfrak{B}\alpha-\mathfrak{A})\,\text{ſin.}\,\Phi] \end{array}\right\};$$

quae expreſſiones contrahuntur in ſequentes formas ſimplices:

$$x = \frac{e^{\alpha\Phi}\mathfrak{A}}{(\alpha\alpha + 1)} (\alpha \text{ ſin. } \Phi - \text{coſ. } \Phi) \text{ et}$$

$$y = \frac{e^{\alpha\Phi}\mathfrak{A}}{(\alpha\alpha + 1)} (\alpha \text{ coſ. } \Phi + \text{ſin. } \Phi)$$

ſicque vnica tantum hoc caſu conſtans arbitraria $\mathfrak{A}$ ingreditur.

§. 15. Deinde etiam caſus ſingulari attentione dignus eſt, quo fit $\omega = {}^{\pi} = 90°$, tum enim erit $\zeta = 0$ et $\eta = \alpha$, vnde habebimus $r = \mathfrak{A} \text{ coſ. } \alpha\Phi + \mathfrak{B} \text{ ſin. } \alpha\Phi$, hincque porro colligitur fore

$$x = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{2(\alpha + 1)} (\mathfrak{B} \text{ ſin. } (\alpha + 1)\Phi + \mathfrak{A} \text{ coſ. } (\alpha + 1)\Phi) \\ + \frac{1}{2(\alpha - 1)} (\mathfrak{B} \text{ ſin. } (\alpha - 1)\Phi + \mathfrak{A} \text{ coſ. } (\alpha - 1)\Phi) \end{array} \right\}$$

$$y = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1}{2(\alpha + 1)} (\mathfrak{A} \text{ ſin. } (\alpha + 1)\Phi - \mathfrak{B} \text{ coſ. } (\alpha + 1)\Phi) \\ + \frac{1}{2(\alpha - 1)} (\mathfrak{A} \text{ ſin. } (\alpha - 1)\Phi - \mathfrak{B} \text{ coſ. } (\alpha - 1)\Phi). \end{array} \right\}$$

§. 16. Hic caſus quo $\alpha = 1$ peculiarem euolutionem poſtulat, quia in partibus poſterioribus denominator euaneſcit; iſte autem caſus locum habet, quando euoluta ordinis $n$ non ſolum ſimilis, verum adeo aequalis eſſe debet ipſi curuae quaeſitae, ita vt ſit $r^{(n)} = r$, ad quem caſum euoluendum ponatur $\alpha = 1 + \delta$, exſiſtente $\delta$ infinite paruo: tum igitur erit

$$\text{ſin. } (\alpha - 1)\Phi = \text{ſin. } \delta\Phi = \delta\Phi \text{ et}$$

$$\text{coſ. } (\alpha - 1)\Phi = \text{coſ. } \delta\Phi = 1 - \tfrac{1}{2}\delta\delta\Phi\Phi,$$

quibus valoribus introductis erit

$$x = -\tfrac{1}{4}(\mathfrak{B} \text{ ſin. } 2\Phi + \mathfrak{A} \text{ coſ. } 2\Phi) + \frac{\mathfrak{B}\Phi}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2\delta},$$

vbi terminum $\delta\delta\Phi\Phi$ omiſimus; tum vero etiam terminus conſtans $\frac{\mathfrak{A}}{2\delta}$ reiici poteſt, quoniam pro arbitrio conſtantem ad-

adiicere licet, quo facto erit

$$x = \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\Phi - \tfrac{1}{4}(\mathfrak{B}\,\text{ſin.}\,2\Phi + \mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,2\Phi),$$

eodem modo

$$y = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\Phi + \tfrac{1}{4}(\mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,2\Phi - \mathfrak{B}\,\text{coſ.}\,2\Phi).$$

Hoc igitur caſu etiam ipſe angulus $\Phi$ in noſtras formulas ingreditur.

§. 17. Non ſolum autem ex amplitudine $\Phi$ ambae coordinatae $x$ et $y$ per formulas finitas exprimi poſſunt, ſed etiam ipſe arcus curuae $s$. Cum enim ſit $\partial s = r\,\partial\Phi$, ob

$$r = e^{\zeta\Phi}(\mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,\eta\Phi + \mathfrak{B}\,\text{ſin.}\,\eta\Phi) \text{ erit}$$

$$s = \mathfrak{A}\int e^{\zeta\Phi}\partial\Phi\,\text{coſ.}\,\eta\Phi + \mathfrak{B}\int e^{\zeta\Phi}\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\eta\Phi,$$

vnde ſumtis integralibus per lemma praemiſſum erit

$$s = \frac{e^{\zeta\Phi}}{\zeta\zeta+\eta\eta}[(\mathfrak{A}\eta+\mathfrak{B}\zeta)\,\text{ſin.}\,\eta\Phi+(\mathfrak{A}\zeta-\mathfrak{B}\eta)\,\text{coſ.}\,\eta\Phi)]$$

ſiue ob $\zeta\zeta+\eta\eta=\alpha\alpha$ erit

$$s = \frac{e^{\zeta\Phi}}{\alpha\alpha}[(\mathfrak{A}\eta+\mathfrak{B}\zeta)\,\text{ſin.}\,\eta\Phi+(\mathfrak{A}\zeta-\mathfrak{B}\eta)\,\text{coſ.}\,\eta\Phi)].$$

§. 18. Quemadmodum iſtae formulae pro $r$ et $s$ et coordinatis $x$ et $y$ inuentae ad ipſam curuam quaeſitam pertinent, ita ſi loco litterarum $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ſcribantur $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$, iſtae formulae naturam euolutae primae exhibebunt; ſimilique modo ſi loco $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ſcribantur litterae $\mathfrak{A}''$ et $\mathfrak{B}''$, eaedem formulae referentur ad euolutam ſecundam, et ita porro. Supra autem oſtendimus eſſe

$\mathfrak{A}' = \alpha(\mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,\omega + \mathfrak{B}\,\text{ſin.}\,\omega)$; $\mathfrak{B}' = \alpha(\mathfrak{B}\,\text{coſ.}\,\omega - \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,\omega)$;
$\mathfrak{A}'' = \alpha^2(\mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,2\omega + \mathfrak{B}\,\text{ſin.}\,2\omega)$; $\mathfrak{B}'' = \alpha^2(\mathfrak{B}\,\text{coſ.}\,2\omega - \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,2\omega)$;
$\mathfrak{A}''' = \alpha^3(\mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,3\omega + \mathfrak{B}\,\text{ſin.}\,3\omega)$; $\mathfrak{B}''' = \alpha^3(\mathfrak{B}\,\text{coſ.}\,3\omega - \mathfrak{A}\,\text{ſin.}\,3\omega)$;
etc. etc.

vnde pro euoluta ordinis cuiuscunque $\lambda$ erit

$$\mathfrak{A}^{(\lambda)} = \alpha^{\lambda} (\mathfrak{A} \text{ coſ. } \lambda \omega + \mathfrak{B} \text{ ſin. } \lambda \omega) \text{ et}$$
$$\mathfrak{B}^{(\lambda)} = \alpha^{\lambda} (\mathfrak{B} \text{ coſ. } \lambda \omega - \mathfrak{A} \text{ ſin. } \lambda \omega).$$

Quodſi ergo hi valores loco $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ſcribantur, formulae inventae valebunt pro euoluta ordinis $\lambda$.

§. 19. Quo has formulas adhuc ſuccinctiores reddamus, ſtatuamus $\mathfrak{A} = c \text{ ſin.} \gamma$ et $\mathfrak{B} = c \text{ coſ.} \gamma$, et formulae pro ipſa curua quaeſita inuentae ſequentes formas induent:

I. $r = c\, e^{\zeta \Phi} \text{ ſin. } (\gamma + \eta \Phi)$.

II. $s = \frac{c}{\alpha} e^{\zeta \Phi} \text{ ſin. } (\gamma - \omega + \eta \Phi)$.

III. $x = \frac{-c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha \text{ſin.}\omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\alpha \text{ coſ.} (\gamma - \omega + (\eta + 1)\Phi) + \text{ſin.} (\gamma + (\eta + 1)\Phi)]$
$+ \frac{c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha \text{ſin.}\omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\alpha \text{ coſ.} (\gamma - \omega + (\eta - 1)\Phi) - \text{ſin.} (\gamma + (\eta - 1)\Phi)]$.

IV. $y = \frac{c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha \text{ſin.}\omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\alpha \text{ ſin.} (\gamma - \omega + (\eta + 1)\Phi) - \text{coſ.} (\gamma + (\eta + 1)\Phi)]$
$+ \frac{c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha \text{ſin.}\omega + 1)} e^{\zeta \Phi} [\alpha \text{ ſin.} (\gamma - \omega + (\eta - 1)\Phi) + \text{coſ.} (\gamma + (\eta - 1)\Phi)]$.

§. 20. Poſitis autem loco $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ his valoribus aſſumtis $c \text{ ſin. } \gamma$ et $\text{coſ. } \gamma$, fiet

$$\mathfrak{A}' = \alpha\, c \text{ ſin. } (\gamma + \omega);$$
$$\mathfrak{B}' = \alpha\, c \text{ coſ. } (\gamma + \omega).$$

Cum igitur pro euoluta prima ſit radius oſculi

$$r' = e^{\zeta \Phi} (\mathfrak{A}' \text{ coſ. } \eta \Phi + \mathfrak{B}' \text{ ſin. } \eta \Phi),$$

habebimus

$$r' = \alpha\, c\, e^{\zeta \Phi} \text{ ſin. } (\gamma + \omega + \eta \Phi),$$

qui valor ex principali $r = c\, e^{\zeta \Phi} \text{ ſin. } (\gamma + \eta \Phi)$ oritur, ſi ibi loco $c$ ſcribamus $\alpha\, c$, loco $\gamma$ vero $\gamma + \omega$, vnde ſi in formu-

lis

lis ſupra inuentis vbique loco $c$ et $\gamma$ ſcribamus $\alpha c$ et $\gamma + \omega$, deinde, quia etiam litterae $\zeta$ et $\eta$ angulum $\omega$ involuunt, ſi pro valoribus ſequentibus ipſius $\omega$ etiam loco $\zeta$ et $\eta$ ſcribamus $\zeta'$ et $\eta'$, et ita porro, eaedem formulae praebebunt naturam euolutae primae, cuius ergo elementa erunt

I. $r' = \alpha\, c\, e^{\zeta'\Phi}\, \text{ſin.}\, (\gamma + \omega + \eta'\Phi)$.

II. $s' = c'\, e^{\zeta'\Phi}\, \text{ſin.}\, (\gamma + \eta'\Phi)$.

III. $x' = \frac{-\alpha c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha\, \text{ſin.}\, \omega + 1)} e^{\zeta'\Phi} [\alpha\, \text{coſ.}\, (\gamma + (\eta' + 1)\Phi) + \text{ſin.}\, (\gamma + \omega + (\eta' + 1)\Phi)]$
$\frac{+\alpha c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha\, \text{ſin.}\, \omega + 1)} e^{\zeta'\Phi} [\alpha\, \text{coſ.}\, (\gamma + (\eta' - 1)\Phi) - \text{ſin.}\, (\gamma + \omega + (\eta' - 1)\Phi)]$.

IV. $y' = \frac{\alpha c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha\, \text{ſin.}\, \omega + 1)} e^{\zeta'\Phi} [\alpha\, \text{ſin.}\, (\gamma + (\eta' + 1)\Phi) - \text{coſ.}\, (\gamma + \omega + (\eta' + 1)\Phi)]$
$\frac{+\alpha c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha\, \text{ſin.}\, \omega + 1)} e^{\zeta\Phi} \alpha [\text{ſin.}\, (\gamma + (\eta' + 1)\Phi) + \text{coſ.}\, (\gamma + \omega + (\eta' - 1)\Phi)]$

§. 21. Conſideremus nunc in genere euolutam ordinis $\lambda$, pro qua inuenimus radium oſculi

$$r^{(\lambda)} = e^{\zeta\Phi} (\mathfrak{A}^{(\lambda)}\, \text{coſ.}\, \eta\Phi + \mathfrak{B}^{(\lambda)}\, \text{ſin.}\, \eta\Phi).$$

Nunc autem reperimus

$$\mathfrak{A}^{(\lambda)} = \alpha^{\lambda} (\mathfrak{A}\, \text{coſ.}\, \lambda\omega + \mathfrak{B}\, \text{ſin.}\, \lambda\omega) \text{ et}$$
$$\mathfrak{B}^{(\lambda)} = \alpha^{\lambda} (\mathfrak{B}\, \text{coſ.}\, \lambda\omega - \mathfrak{A}\, \text{ſin.}\, \lambda\omega),$$

ſiue etiam

$$\mathfrak{A}^{(\lambda)} = \alpha^{\lambda}\, c\, \text{ſin.}\, (\gamma + \lambda\omega) \text{ et}$$
$$\mathfrak{B}^{(\lambda)} = \alpha^{\lambda}\, c\, \text{coſ.}\, (\gamma + \lambda\omega),$$

ex quibus valoribus colligitur radius oſculi

$$r^{(\lambda)} = \alpha^{\lambda}\, c\, e^{\zeta\Phi}\, \text{ſin.}\, (\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi),$$

qui ex principali formatur, ſi in ea loco $c$ et $\gamma$ ſcribatur $\alpha^{\lambda} c$ et $\gamma + \lambda\omega$, quamobrem pro euoluta ordinis $\lambda$ nanciſcemur ſequentia elementa:

I. $r^{(\lambda)} = \alpha^{\lambda}\, c\, e^{\zeta\Phi}\, \text{ſin.}\, (\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi)$.

II. $s^{(\lambda)} = \alpha^{\lambda - 1}\, c\, e^{\zeta\Phi}\, \text{ſin.}\, (\gamma + (\lambda - 1)\omega + \eta\Phi)$.

III.

$$\text{III. } x^{(\lambda)} = \frac{-\alpha^{\lambda} c}{2(\alpha\alpha+2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega+1)} e^{\zeta\Phi}[\alpha\,\text{coſ.}\,(\gamma+(\lambda-1)\omega+(\eta+1)\Phi) + \text{ſin.}(\gamma+\lambda\omega+(\eta+\lambda\Phi))].$$

$$+\frac{\alpha^{\lambda} c}{2(\alpha\alpha-2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega+1)} e^{\zeta\Phi}[\alpha\,\text{coſ.}\,(\gamma+(\lambda-1)\omega+(\eta-1)\Phi) - \text{ſin.}(\gamma+\lambda\omega+(\eta-1)\Phi)].$$

$$\text{IV. } y^{(\lambda)} = \frac{\alpha^{\lambda} c}{2(\alpha\alpha+2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega+1)} e^{\zeta\Phi}[\alpha\,\text{ſin.}\,(\gamma+(\lambda-1)\omega+(\eta+1)\Phi) - \text{coſ.}(\gamma+\lambda\omega+(\eta+1)\Phi)]$$

$$+\frac{\alpha^{\lambda} c}{2(\alpha\alpha-2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega+1)} e^{\zeta\Phi}[\alpha\,\text{ſin.}\,(\gamma+(\lambda-1)\omega+(\eta-1)\Phi) + \text{coſ.}(\gamma+\lambda\omega+(\eta-1)\Phi)].$$

§. 22. His igitur conſtitutis, ſi curua quaeratur, quae ſimilis eſſe debeat ſuae euolutae ordinis $n$, quaeſtio bipartita eſt tractanda, prouti fuerit vel $r^{(n)} = +\alpha^n r$, vel $r^{(n)} = -\alpha^n r$; priore caſu euoluta ordinis $n$ directe dicatur ſimilis ipſi curuae, poſteriore vero caſu inuerſe ſimilis. Tum vero pro priore caſu loco $\omega$ ſequentes habebimus angulos: $\frac{0\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{\pi}{n}$, etc. . . . $\frac{i\pi}{n}$, pro poſteriore vero caſu ſequentes valores pro angulo $\omega$ ſunt capiendi: $\frac{\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, $\frac{5\pi}{n}$, $\frac{7\pi}{n}$, etc. . . . $\frac{(2i+1)\pi}{n}$, vnde pro vtroque caſu tot valores pro $\omega$ ſumi conueniet, quamdiu $2i$, vel $2i+1$ non ſuperat denominatorem $n$, ſiquidem ſolutionem quaeſtionis completam deſideremus.

§. 23. Quando autem pro $\omega$ plures adipiſcimur valores, tum pro ſingulis quaternae formulae litterarum $r$, $s$, $x$, $y$ euoluantur; et quia $c$ et $\gamma$ vicem gerunt quantitatum conſtantium per integrationem ingreſſarum, ſi pro primo valore ipſius $\omega$ vtamur litteris $c$ et $\gamma$, pro ſecundo ſcribi conueniet $c'$ et $\gamma'$, pro tertio vero $c''$ et $\gamma''$, etc. quos valores omnes prorſus pro arbitrio aſſumere licet; omnes autem iſti valores in vnam

vnam ſummum collecti dabunt veros et completos valores quaternarum noſtrarum quantitatum $r$, $s$, $x$ et $y$. Sicque problema noſtrum, in latiſſimo ſenſu acceptum, ſemper per formulas finitas ex amplitudine $\Phi$ reſoluetur, ita vt aliae quantitates tranſcendentes non occurrant, praeter quantitatem exponentialem $e^{\zeta\Phi}$ et ſinus coſinusque angulorum.

§. 24. Quo formulas pro coordinatis $x$ et $y$ inuentas ad maiorem vniformitatem perducamus, ex angulis $\gamma - \omega + (\eta \pm 1)\Phi$ litteram $\omega$ eximamus, et loco $\alpha$ coſ. $\omega$ et $\alpha$ ſin. $\omega$ reſtituamus litteras $\zeta$ et $\eta$; hocque modo obtinebimus

$$x = \frac{-c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega + 1)} e^{\zeta\Phi}[\zeta\,\text{coſ.}(\gamma + (\eta+1)\Phi) + (\eta+1)\,\text{ſin.}(\gamma + (\eta+1)\Phi)]$$
$$\frac{+c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega + 1)} e^{\zeta\Phi}[\zeta\,\text{coſ.}(\gamma + (\eta-1)\Phi) + (\eta-1)\,\text{ſin.}(\gamma + (\eta-1)\Phi)].$$
$$y = \frac{c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega + 1)} e^{\zeta\Phi}[\zeta\,\text{ſin.}(\gamma + (\eta+1)\Phi) - (\eta+1)\,\text{coſ.}(\gamma + (\eta+1)\Phi)]$$
$$\frac{+c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega + 1)} e^{\zeta\Phi}[\zeta\,\text{ſin.}(\gamma + (\eta-1)\Phi) - (\eta-1)\,\text{coſ.}(\gamma + (\eta-1)\Phi)].$$

vbi duo tantum adhuc occurrunt diuerſi anguli $\gamma + (\eta + 1)\Phi$ et $\gamma + (\eta - 1)\Phi$, quae diuerſitas tolli poteſt per iſtas combinationes:

1°) $y$ coſ. $\Phi + x$ ſin. $\Phi =$
$$\frac{c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega + 1)} e^{\zeta\Phi}[\zeta\,\text{ſin.}(\gamma + \eta\Phi) - (\eta+1)\,\text{coſ.}(\gamma + \eta\Phi)]$$
$$\frac{+c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega + 1)} e^{\zeta\Phi}[\zeta\,\text{ſin.}(\gamma + \eta\Phi) - (\eta-1)\,\text{coſ.}(\gamma + \eta\Phi)].$$

2°) $y$ ſin. $\Phi - x$ coſ. $\Phi =$
$$\frac{c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega + 1)} e^{\zeta\omega}[\zeta\,\text{coſ.}(\gamma + \eta\Phi) + (\eta+1)\,\text{ſin.}(\gamma + \eta\Phi)]$$
$$\frac{+c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha\,\text{ſin.}\,\omega + 1)} e^{\zeta\Phi}[\zeta\,\text{coſ.}(\gamma + \eta\Phi) + (\eta-1)\,\text{ſin.}(\gamma + \eta\Phi)].$$

§. 25. His igitur poſtremis formulis, vtpote maxime concinnis, in applicatione ad caſus ſpeciales vti conueniet, quandoquidem pro omnibus valoribus anguli $\omega$ amplitudo $\Phi$ ea-

dem manet. Inuentis autem pro quouis caſu valoribus iſtarum formularum $y\ \text{coſ.}\ \Phi + x\ \text{ſin.}\ \Phi$ et $y\ \text{ſin.}\ \Phi - x\ \text{coſ.}\ \Phi$, inde facile ipſas coordinatas $x$ et $y$ definire licet. Iſtae autem formulae in figura lineas ſatis memorabiles deſignant. Si enim
Tab. II. Fig. 3. ex punctis $a$ et $x$ in normalem $s\,r$ ducantur perpendicula $a\,p$ et $x\,z$, ex $x$ vero in $ap$ perpendiculum $xq$, ex triangulo $x\,s\,z$, ob angulum $s\,x\,z = \Phi$, erit $s\,z = y\ \text{ſin.}\ \Phi$ et $x\,z = y\ \text{coſ.}\ \Phi$; deinde vero ex triangulo $a\,x\,q$ fiet $aq = x\ \text{ſin.}\ \Phi$ et $x\,q = x\ \text{coſ.}\ \Phi$, ex quibus colligitur recta $ap = y\ \text{coſ.}\ \Phi + x\ \text{ſin.}\ \Phi$; at vero recta $s\,p = s\,z - x\,q = y\ \text{ſin.}\ \Phi - x\ \text{coſ.}\ \Phi$. Quare ſi ad curuam in $s$ ducamus tangentem $s\,t$, in eamque ex $a$ perpendiculum demittamus $a\,t$, ac vocemus $a\,t = p$ et $s\,t = t$, erit

$$p = y\ \text{ſin.}\ \Phi - x\ \text{coſ.}\ \Phi \text{ et}$$
$$t = y\ \text{coſ.}\ \Phi + x\ \text{ſin.}\ \Phi.$$

Inuentis autem his duabus quantitatibus $p$ et $t$, inde viciſſim erit

$$x = t\ \text{ſin.}\ \Phi - p\ \text{coſ.}\ \Phi \text{ et}$$
$$y = p\ \text{ſin.}\ \Phi + t\ \text{coſ.}\ \Phi.$$

§. 26. Quodſi ergo praeter radium oſculi $r$ et arcum curuae $s$ loco coordinatarum $x$ et $y$ iſtas binas quantitates $t$ et $p$ in calculum introducamus, pro curua quaeſita $a\,s$ ſequentes habebimus formulas ſatis concinnas:

$$\text{I. } r = c\, e^{\zeta\Phi}\ \text{ſin.}\ (\gamma + \eta\Phi).$$

$$\text{II. } s = \frac{c}{\alpha\alpha}\, e^{\zeta\Phi}\, [\zeta\ \text{ſin.}\ (\gamma + \eta\Phi) - \eta\ \text{coſ.}\ (\gamma - \eta\Phi)].$$

$$\text{III. } s = \frac{c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha\ \text{ſin.}\,\omega + 1)}\, e^{\zeta\Phi}[\zeta\ \text{ſin.}(\gamma+\eta\Phi) - (\eta+1)\ \text{coſ.}(\gamma+\eta\Phi)]$$
$$\frac{+c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha\ \text{ſin.}\,\omega + 1)}\, e^{\zeta\Phi}[\zeta\ \text{ſin.}(\gamma+\eta\Phi) - (\eta-1)\ \text{coſ.}(\gamma+\eta\Phi)].$$

$$\text{IV. } p = \frac{c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha\ \text{ſin.}\,\omega + 1)}\, e^{\zeta\Phi}[\zeta\ \text{coſ.}(\gamma+\eta\Phi) + (\eta+1)\ \text{ſin.}(\gamma+\eta\Phi)]$$
$$\frac{+c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha\ \text{ſin.}\,\omega + 1)}\, e^{\zeta\Phi}[\zeta\ \text{coſ.}(\gamma+\eta\Phi) + (\eta-1)\ \text{ſin.}\ (\gamma+\eta\Phi)].$$

Hinc igitur ipſae coordinatae $x$ et $y$ ita definientur, vt ſit

$$x = t\ \text{ſin.}\ \Phi - p\ \text{coſ.}\ \Phi \text{ et}$$
$$y = p\ \text{ſin.}\ \Phi + t\ \text{coſ.}\ \Phi,$$

hoc-

hocque pacto omnia haec elementa per eundem angulum $\gamma + \eta\Phi$ determinantur.

§. 27. Quin etiam ſimili modo tales formulae pro omnibus euolutis ſatis ſuccincte exhiberi poterunt. Quoniam enim pro euoluta ordinis λ, vt ſupra vidimus, tantum opus eſt vt loco $c$ ſcribatur $\alpha^\lambda c$, loco $\gamma$ vero $\gamma + \lambda\omega$, formulae hoc modo ſe habebunt:

I. $r^{(\lambda)} = \alpha^\lambda c e^{\zeta\Phi} \text{ſin.}(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi)$.

II. $s^{(\lambda)} = \alpha^{\lambda-2} c e^{\zeta\Phi}[\zeta \text{ ſin.}(\gamma+\lambda\omega+\eta\Phi) - \eta \text{ coſ.}(\gamma+\lambda\omega+\eta\Phi)]$

III. $$t^{(\lambda)} = \frac{\alpha^\lambda c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha\text{ſin.}\omega + 1)} e^{\zeta\Phi}[\zeta \text{ ſin.}(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi) - (\eta+1)\text{coſ.}(\gamma+\lambda\omega+\eta\Phi)]$$
$$+ \frac{\alpha^\lambda c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha\text{ſin.}\omega + 1)} e^{\zeta\Phi}[\zeta \text{ ſin.}(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi) - (\eta-1)\text{coſ.}(\gamma+\lambda\omega+\eta\Phi)].$$

IV. $$p^{(\lambda)} = \frac{\alpha^\lambda c}{2(\alpha\alpha + 2\alpha\text{ſin.}\omega + 1)} e^{\zeta\Phi}[\zeta \text{ coſ.}(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi) + (\eta+1)\text{ſin.}(\gamma+\lambda\omega+\eta\Phi)]$$
$$+ \frac{\alpha^\lambda c}{2(\alpha\alpha - 2\alpha\text{ſin.}\omega + 1)} e^{\zeta\Phi}[\zeta \text{ coſ.}(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi) + (\eta-1)\text{ſin.}(\gamma+\lambda\omega+\eta\Phi)],$$

tum vero ipſae coordinatae ita definientur, vt ſit

$$x^{(\lambda)} = t^{(\lambda)} \text{ ſin.}\Phi - p^{(\lambda)} \text{ coſ.}\Phi \text{ et}$$
$$y^{(\lambda)} = p^{(\lambda)} \text{ ſin.}\Phi + t^{(\lambda)} \text{ coſ.}\Phi.$$

§. 28. Cum littera $\alpha$ inuoluat rationem ſimilitudinis, quam curua quaeſita ad ſuam euolutam ordinis $n$ tenere debet, quandoquidem ſingula elementa ipſius curuae quaeſitae ſe habere debent ad ſingula elementa euolutae ordinis λ, vt 1 ad $\pm\alpha^n$, provti ſcilicet haec euoluta vel directe vel inuerſe ſimilis poſtulatur: ſi ſumamus $\alpha = 1$, tum euoluta adeo curuae

 quaeſi-

quaeſitae aequalis prodibit, quem ergo caſum ſeorſim euolui conueniet. Quia igitur tum fit $\zeta = \text{coſ.}\,\omega$ et $\eta = \text{ſin.}\,\omega$, ideoque $\zeta\zeta + \eta\eta = 1$, formulae pro euoluta ordinis $\lambda$ modo exhibitae ſequenti modo contrahentur:

$$r^{(\lambda)} = c\, e^{\zeta\Phi}\, \text{ſin.}\,(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi)$$

$$s^{(\lambda)} = c\, e^{\zeta\Phi}\, [\zeta\, \text{ſin.}\,(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi) - \eta\, \text{coſ.}\,(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi)]$$

$$t^{(\lambda)} = \tfrac{c}{2\zeta}\, e^{\zeta\Phi}\,.\, \text{ſin.}\,(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi),$$

$$p^{(\lambda)} = \tfrac{c}{2\zeta}\, e^{\zeta\Phi}\, \text{coſ.}\,(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi),$$

vnde colligitur:

$$x^{(\lambda)} = \tfrac{c}{2\zeta}\, e^{\zeta\Phi}\, [\text{ſin.}\,\Phi\, \text{ſin.}\,(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi) - \text{coſ.}\,\Phi\, \text{coſ.}\,(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi)]$$

$$y^{(\lambda)} = \tfrac{c}{2\zeta}\, e^{\zeta\Phi}\, [\text{ſin.}\,\Phi\, \text{coſ.}\,(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi) + \text{coſ.}\,\Phi\, \text{ſin.}\,(\gamma + \lambda\omega + \eta\Phi)],$$

vbi notandum tam arcum $s$ quam ambas coordinatas ſequenti modo contrahi poſſe:

$$s^{(\lambda)} = c\, e^{\zeta\Phi}\, \text{ſin.}\,(\gamma + (\lambda - 1)\,\omega + \eta\Phi)$$

$$x^{(\lambda)} = -\tfrac{c}{2\zeta}\, e^{\zeta\Phi}\, \text{coſ.}\,(\gamma + \lambda\omega + (\eta + 1)\,\Phi)$$

$$y^{(\lambda)} = \tfrac{c}{2\zeta}\, e^{\zeta\Phi}\, \text{ſin.}\,(\gamma + \lambda\omega + (\eta + 1)\,\Phi).$$

§. 29. Has formulas autem imprimis ad ipſam curvam quaeſitam accommodari conueniet, quae cum ſe habere debeat ad ſuam euolutam ordinis $n$, vt $1 : \pm \alpha^n$, ante omnia quaerantur cuncti valores anguli $\omega$, qui pro ſimilitudine directa ſunt: $\frac{0\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$, etc., pro ſimilitudine autem inuerſa: $\frac{\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, $\frac{5\pi}{n}$, $\frac{7\pi}{n}$, etc. pro quibus ſcribamus breuitatis gratia $\omega$, $\omega'$, $\omega''$, $\omega'''$, etc., ex iisque formemus ſequentes formulas:

$$\zeta = \alpha\, \text{coſ.}\,\omega;\ \zeta' = \alpha\, \text{coſ.}\,\omega';\ \zeta'' = \alpha\, \text{coſ.}\,\omega'';\ \text{etc.}$$

$$\eta = \alpha\, \text{ſin.}\,\omega;\ \eta' = \alpha\, \text{ſin.}\,\omega';\ \eta'' = \alpha\, \text{ſin.}\,\omega'';\ \text{etc.}$$

Simili modo loco conſtantium $c$ et $\gamma$, quae ipſi angulo $\omega$ re-

ſpon-

ſpondent, pro ſequentibus angulis ſcribamus $c', \gamma'$; $c'', \gamma''$; $c''', \gamma'''$; etc. quibus notatis pro ſingulis $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$, etc. colligantur ex formilis ſupra datis: 1) omnes valores ipſius $r$, qui ſint $R, R', R'', R'''$. etc. 2) valores ipſius $s$, qui ſint $S, S', S'', S'''$, etc. 3) valores ipſius $x$, qui ſint $X, X', X''$, $X'''$, etc. 4) valores ipſius $y$, qui ſint $Y, Y', Y'', Y'''$, etc. 5) valores ipſius $t$, qui ſint $T, T', T'', T'''$, etc. 6) valores ipſius $p$, qui ſint $P, P', P'', P'''$, etc. Hincque ſolutio problematis completa continebitur ſequentibus formulis:

1°. $r = R + R' + R'' + R''' +$ etc.

2°. $s = S + S' + S'' + S''' +$ etc. $+ A$,

3°. $x = X + X' + X'' + X''' +$ etc. $+ B$,

4°. $y = Y + Y' + Y'' + Y''' +$ etc. $+ C$,

5°. $t = T + T' + T'' + T''' +$ etc. $+ C \operatorname{cos}. \Phi + B \operatorname{sin}. \Phi$,

6°. $p = P + P' + P'' + P''' +$ etc. $+ C \operatorname{sin}. \Phi - B \operatorname{cos}. \Phi$,

vbi litterae A, B, C, deſignant conſtantes per vltimas integrationes ingreſſas.

## I. De curuis
### quae ſuis euolutis primis ſint ſimiles.

§. 30. Cum hic ſit $n = 1$, formula principalis reſoluenda erit $\lambda \pm \alpha = 0$, vnde vel $\lambda = + \alpha$, vel $\lambda = - \alpha$, ita vt ſufficiat alterutrum tantum horum caſuum euoluere, quoniam alter inde naſcitur ſumto $\alpha$ negatiuo. Cum igitur fuerit $r = c\, e^{\lambda \Phi}$, hoc caſu habebimus $r = c\, e^{\alpha \Phi}$, qua ergo aequatione inter radium oſculi $r$ et amplitudinem $\Phi$ natura curuae quaeſitae iam perfecte exprimitur; neque opus eſt angulum $\omega$, qui hoc caſu foret $= 0$, introducere, quia hoc caſu factor formulae generalis $\lambda^n - \alpha^n$ tantum eſt ſimplex.

 §. 31.

§. 31. Hoc igitur caſu, ob $\partial s = r\partial\Phi$, erit $\partial s = c\partial\Phi e^{\alpha\Phi}$, cuius integrale praebet $s = \frac{c}{\alpha} e^{\alpha\Phi} + A$, vbi ſi conſtans A ita definiatur, vt pro amplitudine $\Phi = 0$ etiam ipſe arcus $s$ euaneſcat, quemadmodum in figura repraeſentatur, vbi angulo $a r s = \Phi$ reſpondet arcus $a s = s$, erit $s = \frac{c}{\alpha}(e^{\alpha\Phi} - 1)$, qua lege ſecundum figuram etiam coordinatas $a x = x$ et $x s = y$ determinari conueniet. Cum igitur ſit $\partial x = \partial s$ ſin. $\Phi$ et $\partial y = \partial s$ coſ. $\Phi$, erit $\partial x = c e^{\alpha\Phi}\partial\Phi$ ſin. $\Phi$ et $\partial y = c e^{\alpha\Phi}\partial\Phi$ coſ. $\Phi$, vnde integratione ſecundum Lemma §. 13. datum peracta fiet

$$x = \frac{-c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} (\text{coſ.}\ \Phi - \alpha\ \text{ſin.}\ \Phi) + \frac{c}{\alpha\alpha+1},$$
$$y = \frac{+c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} (\text{ſin.}\ \Phi + \alpha\ \text{coſ.}\ \Phi) - \frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1},$$

vnde patet, ſi amplitudo $\Phi$ fuerit quam minima, tum fore $x = \frac{1}{2} c\Phi\Phi$ et $y = c\Phi$. Hinc vero denique erit

$$t = \frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} + \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\text{ſin.}\ \Phi - \alpha\ \text{coſ.}\ \Phi),$$
$$p = \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} - \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\text{coſ.}\ \Phi + \alpha\ \text{ſin.}\ \Phi).$$

Tab. II. Fig. 4. §. 32. Cum ſit $s + \frac{c}{\alpha} = \frac{c}{\alpha} e^{\alpha\Phi}$, erit $s + \frac{c}{\alpha} = \frac{r}{\alpha}$, vnde patet, ſi curua $s a$ retro continuetur, vsque ad certum punctum $o$, vt arcus $a o$ fiat $= \frac{c}{\alpha}$, tum fore arcum a puncto $o$ ſumtum, ſcilicet $o a s = \frac{r}{\alpha}$, ita vt iſte arcus $o a s$ ad radium osculi in $s$ datam teneat rationem, ſcilicet vt $1 : \alpha$, ideoque radius oſculi in ipſo puncto $o$ euaneſcat, ex quo iam facile concludere licet, hanc curuam eſſe ſpiralem logarithmicam centrum ſuum in puncto $o$ habentem, ad quod demum peractis infinitis ſpiris pertingit. Quod quo clarius appareat, accuratius quaeramus hoc punctum $o$, pro quo ergo ſumi debet $s = -\frac{c}{\alpha}$, tum autem pro amplitudine habetur iſta aequatio: $\frac{c}{\alpha} e^{\alpha\Phi} = 0$, ſiue $e^{\alpha\Phi} = 0$, vnde ſit $\Phi = \infty$. Quamobrem, ſi

curua

curua $sa$ retro continuetur per amplitudinem infinitam, tum ea in ipſo puncto $o$ terminabitur; ex quo intelligitur, curuam circa punctum $o$ infinitas ſpiras continuo minores abſoluere. Ponatur igitur $\Phi = -\infty$, vt coordinatae $x$ et $y$ nobis hoc punctum $o$ declarent; tum autem ob $e^{\alpha\Phi} = o$ fiet $x = \frac{c}{\alpha\alpha+1}$ et $y = -\frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1}$. Iſtud ergo punctum $o$ infra axem $ar$ erit ſitum, ex quo ſi ad axem ducatur normalis $op$, tum erit $ap = \frac{c}{\alpha\alpha+1}$ et $po = \frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1}$. Quod ſi iam ex puncto $o$ in applicatam $sx$ productam demittatur perpendiculum $oq$, erit

$$oq = ap - x = \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} (\text{coſ.}\,\Phi - \alpha\,\text{ſin.}\,\Phi) \text{ et}$$

$$sq = y + op = \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} (\text{ſin.}\,\Phi + \alpha\,\text{coſ.}\,\Phi).$$

Quodſi iam ducatur recta $os$ ſecans axem $ar$ in puncto $u$, erit $os = \frac{c}{\sqrt{(\alpha\alpha+1)}} e^{\alpha\Phi}$, ſiue $os = \frac{r}{\sqrt{(\alpha\alpha+1)}}$. Hinc ſi vocetur angulus $qos = aus = \psi$, erit

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{qs}{oq} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi + \alpha\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi - \alpha\,\text{ſin.}\,\Phi}.$$

Quoniam igitur angulus $ars = \Phi$, erit angulus $rsu = \psi - \Phi$, conſequenter

$$\text{tang.}\,rsu = \frac{\text{tang.}\,\psi - \text{tang.}\,\Phi}{1 + \text{tang.}\,\psi\,\text{tang.}\,\Phi} = \alpha.$$

Quoniam igitur angulus $asr$ eſt rectus, erit etiam angulus $aso$ conſtans, eiusque cotangens $= \alpha$, ſiue tangens $= \frac{1}{\alpha}$. Quamobrem, cum omnes rectae ex puncto $o$ ad curuam eductae ad ipſam curuam aequaliter inclinentur, manifeſtum eſt, hanc curvam eſſe logarithmicam ſpiralem, circa centrum $o$ deſcriptam, ſub angulo obliquitatis cuius tangens $= \frac{1}{\alpha}$. Quodſi ergo curua quaeſita aequalis eſſe debeat ſuae euolutae, ita vt ſit $\alpha = 1$, curua ſatisfaciens erit logarithmica ſpiralis ſemi-rectangula, vti iam dudum eſt demonſtratum.

§. 33.

§. 33. Alter caſus, quo pro $\alpha$ accipitur valor negatiuus, ab iſto aliter non differt, niſi quod amplitudo $\Phi$ in negatiuam mutatur; vnde etiam curua ſatisfaciens erit eadem, ſcilicet ſpiralis logarithmica, hoc tantum diſcrimine, quod nunc arcus *a o* ad axem *a r* refertur. Quoniam autem ambo hi caſus in ſequentibus quaeſtionibus ſimul occurrere poſſunt, pro vtroque ſingula elementa hic conſpectui exponamus.

Pro caſu $\lambda = \alpha$.

$$r = c\, e^{\alpha\Phi}$$
$$s = \frac{c}{\alpha}(e^{\alpha\Phi} - 1)$$
$$x = \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} (\alpha\, \text{ſin.}\, \Phi - \text{coſ.}\, \Phi) + \frac{c}{\alpha\alpha+1}$$
$$y = \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} (\text{ſin.}\, \Phi + \alpha\, \text{coſ.}\, \Phi) - \frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1}$$
$$t = \frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} + \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\text{ſin.}\, \Phi - \alpha\, \text{coſ.}\, \Phi)$$
$$p = \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{\alpha\Phi} - \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\text{coſ.}\, \Phi + \alpha\, \text{ſin.}\, \Phi)$$

Pro caſu $\lambda = -\alpha$.

$$r = c\, e^{-\alpha\Phi}$$
$$s = \frac{c}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\Phi})$$
$$x = -\frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{-\alpha\Phi} (\text{coſ.}\, \Phi + \alpha\, \text{ſin.}\, \Phi) + \frac{c}{\alpha\alpha+1}$$
$$y = \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{-\alpha\Phi} (\text{ſin.}\, \Phi - \alpha\, \text{coſ.}\, \Phi) + \frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1}$$
$$t = -\frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1} e^{-\alpha\Phi} + \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\text{ſin.}\, \Phi + \alpha\, \text{coſ.}\, \Phi)$$
$$p = \frac{c}{\alpha\alpha+1} e^{-\alpha\Phi} - \frac{c}{\alpha\alpha+1} (\text{coſ.}\, \Phi - \alpha\, \text{ſin.}\, \Phi).$$

§. 34. Quemadmodum hic curua quaeſita ſimilis eſt ſuae euolutae primae in ratione $1 : \alpha$, ita quoque ſimilis erit ſuae euolutae ſecundae, in ratione $1 : \alpha\alpha$, parique modo etiam ſuae euolutae tertiae, in ratione $1 : \alpha^3$, et ita porro, vnde manifeſtum

tum eſt logarithmicam ſpiralem ſemper quaeſtioni ſatisfacere, cuicunque euolutarum quaeſita ſimilis requiratur, quae autem ſolutio tantum eſt particularis, quandoquidem praeter eam etiam infinitae aliae lineae curuae aſſignari poſſunt, quae ſimiles ſint ſuis euolutis cuiusque ordinis, quamobrem pro ſolutione completa quouis caſu omnes plane curuae quaeſito ſatisfacientes inueſtigari debebunt.

## II. De curuis

### quae ſuis euolutis ſecundis *directe* ſint ſimiles, vbi $r'' = \alpha^2 r$.

§. 35. Cum ergo hoc caſu ſit $\lambda\lambda = \alpha\alpha$, pro $\lambda$ duos ſtatim habemus valores reales, qui ſunt $\lambda = +\alpha$ et $\lambda = -\alpha$, tum vero pro radio oſculi curuae quaeſitae hanc habebimus aequationem: $r = \mathfrak{A} e^{\alpha\Phi} \pm \mathfrak{B} e^{-\alpha\Phi}$, hincque pro euoluta ſecunda fit

$$r'' = \alpha\alpha \mathfrak{A} e^{\alpha\Phi} + \alpha\alpha \mathfrak{B} e^{-\alpha\Phi},$$

vbi pro $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ quantitates quascunque conſtantes accipere licet, ex quo manifeſtum, ſi alterutra earum euaneſcat, pro curva ſatisfaciente, prorſus vt caſu ſuperiore, prodituram eſſe logarithmicam ſpiralem. Pro varia igitur relatione inter has conſtantes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ innumerae videntur curuae diuerſae quaeſtioni ſatisfacientes reſultare; interim tamen eas omnes ad duas tantum ſpecies reuocare licet. Quoniam enim axis $a\,r$, a quo amplitudinem $\Phi$ computamus, prorſus arbitrio noſtro relinquitur, dum curua eadem plane manet, hoc axe vtcunque mutato amplitudo $\Phi$ quopiam angulo arbitrario augebitur vel minuetur, qui angulus ſi ſit $= \theta$, formula inuenta ad eandem curuam pertinebit, etiamſi loco $\Phi$ ſcribamus $\Phi + \theta$, quo facto erit

$$r = \mathfrak{A} e^{\alpha\theta} . e^{\alpha\Phi} \pm \mathfrak{B} e^{-\alpha\theta} . e^{-\alpha\Phi},$$

vbi manifeſto angulum $\theta$ ſemper ita aſſumere licebit, vt fiat $\mathfrak{A} e^{\alpha\theta} = \mathfrak{B} e^{-\alpha\theta}$, ſumendo ſcilicet $\theta = \frac{1}{2\alpha} l \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$. Quod ſi ergo axem hoc modo conſtituamus, ac breuitatis gratia ſumamus $\mathfrak{A} e^{\alpha\theta} = \mathfrak{B} e^{-\alpha\theta} = c$, noſtra aequatio erit $r = c\,(e^{\alpha\Phi} \pm e^{-\alpha\Phi})$, in qua vnica quantitas conſtans $c$ ineſt, vnde ob ſignum ambiguum $\pm$ duae tantum curuae diuerſae exoriri ſunt cenſendae, quas ſeorſim euolui conueniet.

## 1°. Euolutio caſus $r = c\,(e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi})$.

§. 36. Hic ergo ambo caſus ante tractati iunctim occurrunt, ita vt tantum opus ſit pro ſingulis elementis binos valores ſupra exhibitos coniungere, vnde ſequentes formulas nanciſcemur:

$$r = c\,e^{\alpha\Phi} + c\,e^{-\alpha\Phi}$$
$$s = \frac{c}{\alpha} e^{\alpha\Phi} - \frac{c}{\alpha} e^{-\alpha\Phi}$$
$$x = \frac{c}{\alpha\alpha+1}[\alpha \operatorname{ſin.}\Phi(e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi}) - \operatorname{coſ.}\Phi(e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi})] + \frac{2c}{\alpha\alpha+1}$$
$$y = \frac{c}{\alpha\alpha+1}[\alpha \operatorname{coſ.}\Phi\,(e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi}) + \operatorname{ſin.}\Phi\,(e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi})]$$
$$t = \frac{\alpha c}{\alpha\alpha+1}(e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi}) + \frac{2c}{\alpha\alpha+1} \operatorname{ſin.}\Phi$$
$$p = \frac{c}{\alpha\alpha+1}(e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi}) - \frac{2c}{\alpha\alpha+1} \operatorname{coſ.}\Phi.$$

§. 37. Hic primum obſeruo, poſita amplitudine $\Phi = 0$ radium oſculi curuae in ipſo puncto $a$ fore $= 2c$, vbi ſimul coordinatae $x$ et $y$ euaneſcunt. Sumta autem amplitudine $\Phi$ infinite parua, fiet $s = 2c\Phi$, cui applicata $y$ debet eſſe aequalis; abſciſſa autem $x$ ex formula notiſſima, qua in ipſo vertice $a$ ſubnormalis $\frac{y\partial y}{\partial x}$ ſemper aequatur radio, qui hic eſt $2c$, definietur: erit enim $\frac{4cc\Phi\partial\Phi}{\partial x} = 2c$, hincque $\partial x = 2c\Phi\partial\Phi$, ergo integrando $x = c\Phi\Phi$, quare cum ſit $\Phi = \frac{y}{2c}$, erit pro

porti-

portiuncula noſtrae curuae circa punctum $a$, $x = \frac{yy}{4c}$, ſiue $yy = 4cx$, quae ergo curua congruet cum parabola, cuius parameter $= 4c$, ita vt ſaltem pro ipſo initio axis $ra$ ſimul ſit diameter noſtrae curuae.

§. 38. Vtrum autem iſte axis $ar$ quoque ſit diameter totius curuae quam quaerimus, videamus, examinaturi num ſumto angulo $\Phi$ negatiuo abſciſſa $x$ retineat eundem valorem, applicata vero in ſui negatiuam abeat? Scribamus ergo $-\Phi$ loco $\Phi$, ac reperiemus

$$x = \frac{c}{\alpha\alpha+1}[\alpha\,\text{ſin.}\Phi(e^{\alpha\Phi}-e^{-\alpha\Phi})-\text{coſ.}\Phi(e^{\alpha\Phi}+e^{-\alpha\Phi})]+\frac{2c}{\alpha\alpha+1},$$

qui valor a praecedente prorſus non diſcrepat: at vero applicata euadet

$$y = -\frac{c}{\alpha\alpha+1}[\alpha\,\text{coſ.}\Phi(e^{\alpha\Phi}-e^{-\alpha\Phi})+\text{ſin.}\Phi(e^{\alpha\Phi}+e^{-\alpha\Phi})],$$

quae expreſſio vtique prioris eſt negatiua; vnde patet, noſtrum axem $ar$ curuam quaeſitam in duas partes ſimiles et aequales diuidere, ita vt ſufficiat alterutrum tantum ramum exploraſſe. Quia igitur ſumto $\Phi = 90°$ tangens curuae axi euadit parallela, ſumto autem $\Phi = 180°$ ea ad axem iterum fit normalis, quae viciſſitudo perpetuo continget, dum amplitudo $\Phi$ angulo recto increſcit: euidens eſt, ramum curuae $as$ in infinitum continuatum per infinitas ſpiras reuolui, atque adeo abſolutis aliquot ſpiris in ipſam logarithmicam ſpiralem degenerare. Quando enim amplitudo $\Phi$ iam totam circuli circumferentiam aliquoties ſumtam ſuperabit, formula $e^{-\alpha\Phi}$ tantum non in nihilum abit, ſicque fiet $r = ce^{\alpha\Phi}$, quae ipſam logarithmicam ſpiralem inuoluit.

§. 39. Ad naturam huius curuae penitius perſcrutandam capiamus in axe interuallum $ao = \frac{2c}{\alpha\alpha+1}$, quod ergo mi- Tab. II. Fig. 5.

 nus

nus erit quam radius oſculi $aa' = 2c$, interuallo $oa' = \frac{2\alpha\alpha c}{\alpha\alpha+1}$; cum igitur ſit $ax = x$ et $xs = y$, erit interuallum

$$ox = \frac{c}{\alpha\alpha+1}[\text{coſ.}\,\Phi\,(e^{\alpha\Phi}+e^{-\alpha\Phi}) - \alpha\,\text{ſin.}\,\Phi\,(e^{\alpha\Phi}-e^{-\alpha\Phi})],$$

quare cum ſit angulus $ars = \Phi$, ſi ponamus angulum $aos = \psi$, erit

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{xs}{ox} = \frac{\alpha\,\text{coſ.}\,\Phi\,(e^{\alpha\Phi}-e^{-\alpha\Phi}) + \text{ſin.}\,\Phi\,(e^{\alpha\Phi}+e^{-\alpha\Phi})}{\text{coſ.}\,\Phi\,(e^{\alpha\Phi}+e^{-\alpha\Phi}) - \alpha\,\text{ſin.}\,\Phi\,(e^{\alpha\Phi}-e^{-\alpha\Phi})}.$$

Quodſi ergo breuitatis gratia ſtatuamus

$$e^{\alpha\Phi}+e^{-\alpha\Phi} = \text{P} \text{ et } e^{\alpha\Phi}-e^{-\alpha\Phi} = \text{Q},$$

habebimus

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{\alpha\,\text{Q}\,\text{coſ.}\,\Phi + \text{P}\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{P}\,\text{coſ.}\,\Phi - \alpha\,\text{Q}\,\text{ſin.}\,\Phi} = \frac{\text{P}\,\text{tang.}\,\Phi + \alpha\,\text{Q}}{\text{P} - \alpha\,\text{Q}\,\text{tang.}\,\Phi},$$

tum autem erit

$$ox = \frac{c}{\alpha\alpha+1}(\text{P}\,\text{coſ.}\,\Phi - \alpha\,\text{Q}\,\text{ſin.}\,\Phi) \text{ et}$$

$$xs = \frac{c}{\alpha\alpha+1}(\text{P}\,\text{ſin.}\,\Phi + \alpha\,\text{Q}\,\text{coſ.}\,\Phi),$$

vnde colligitur

$$os^2 = \frac{cc}{(\alpha\alpha+1)^2}(\text{PP} + \alpha\alpha\,\text{QQ}).$$

Eſt vero

$$\text{PP} + \alpha\alpha\,\text{QQ} = (1+\alpha\alpha)(e^{2\alpha\Phi}+e^{-2\alpha\Phi}) + 2(1-\alpha\alpha),$$

ideoque

$$os^2 = \frac{cc}{(\alpha\alpha+1)}(e^{2\alpha\Phi}+e^{-2\alpha\Phi}) + \frac{2cc(1-\alpha\alpha)}{(\alpha\alpha+1)^2}.$$

Praeterea vero per eosdem valores P et Q erit $r = c\text{P}$ et $s = \frac{c\text{Q}}{\alpha}$.

§. 40. Quodſi iam quaeramus angulum $\theta$ ita, vt ſit $\text{tang.}\,\theta = \frac{\alpha\text{Q}}{\text{P}}$, erit

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{\text{tang.}\,\Phi + \text{tang.}\,\theta}{1 - \text{tang.}\,\theta\,\text{tang.}\,\Phi} = \text{tang.}\,(\theta + \Phi),$$

vnde

vnde ſequitur fore $\psi = \theta + \Phi$, hincque porro angulum $osr = \theta$. Ponamus porro $\surd(PP + \alpha\alpha QQ) = R$, vt fiat recta $os = \frac{c}{\alpha\alpha + 1} R$. Si igitur ex $o$ in rectam $sr$ ducatur perpendiculum $oq$, ob ſin. $\theta = \frac{\alpha Q}{R}$ et coſ. $\theta = \frac{P}{R}$ erit $oq = \frac{\alpha c Q}{\alpha\alpha + 1}$ et $sq = \frac{cP}{\alpha\alpha + 1}$. Cum igitur ſit $r = cP$, hinc iſta inſignis noſtrae ſe prodit curuae proprietas, vt ſi ex puncto $o$ in rectam $sr$, quae eſt normalis ad curuam, demittatur perpendiculum $oq$, ſemper ſit interuallum $sq = \frac{r}{\alpha\alpha + 1}$, quod ergo ſe habebit ad ipſum radium oſculi $r$, vt $1 : \alpha\alpha + 1$, ex qua conditione per methodum tangentium inuerſam iſta curua inueſtigari poterit, id quod iam paſſim eſt factum, ita vt haec curua Geometris non prorſus ſit ignota.

§. 41. Conſideremus nunc etiam huius curuae euolutam primam, pro qua, vt ſupra vidimus, erit radius oſculi $r' = \frac{\partial r}{\partial \Phi} = \alpha c (e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi})$; vnde patet, hanc euolutam primam ipſam illam eſſe curuam, quam caſu altero mox ſumus euoluturi, id quod ipſa rei natura poſtulat. Cum enim curua quaeſita ſimilis eſſe debeat euolutae ſuae ſecundae, neceſſe eſt vt eius euoluta prima ſimilis ſit euolutae tertiae. Referat igitur figura euolutam primam $a's'$, exſiſtente $aa' = 2c$, quae ergo in $a'$ habebit cuſpidem, ita vt arcus illi ſimilis ſit $a'\sigma'$, tum vero huius curuae $a's'$ euoluta ſit $a's''$, quae cum ſit euoluta ſecunda ipſius curuae $as$, etiam illi ſimilis erit, at ſitu duplici modo inuerſo repraeſentata, ita vt hanc euolutum potius *bis inuerſam* appellari conueniret quam directam. Tab. II. Fig. 6.

## 2°. Euolutio caſus $r = c(e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi})$.

§. 42. Pro hoc igitur caſu formulas ſupra pro $r = ce^{-\alpha\Phi}$ inuentas, ab iis ſubtrahi debent, quae pertinebant ad

 caſum

caſum $c\,e^{\alpha\Phi}$, quo facto nanciſcemur ſequentes formulas:

$$r = c\,(e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi}),$$

$$s = \frac{c}{\alpha}\,(e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi}) - \frac{2c}{\alpha},$$

$$x = \frac{c}{\alpha\alpha+1}\,[\alpha \text{ ſin. } \Phi\,(e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi}) - \text{coſ. } \Phi\,(e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi})],$$

$$y = \frac{c}{\alpha\alpha+1}\,[\alpha \text{ coſ. } \Phi\,(e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi}) + \text{ſin. } \Phi\,(e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi})] - \frac{2\alpha c}{\alpha\alpha+1}.$$

Hic ergo ſi iterum ſtatuamus

$$P = e^{\alpha\Phi} + e^{-\alpha\Phi} \text{ et } Q = e^{\alpha\Phi} - e^{-\alpha\Phi},$$

erit ſuccinctius

$$r = c\,Q,$$

$$s = \frac{c}{\alpha}\,(P - 2),$$

$$x = \frac{c}{\alpha\alpha+1}\,(\alpha P \text{ ſin. } \Phi - Q \text{ coſ. } \Phi),$$

$$y = \frac{c}{\alpha\alpha+1}\,(\alpha P \text{ coſ. } \Phi + Q \text{ ſin. } \Phi) - \frac{2\alpha c}{\alpha\alpha+1}.$$

§. 43. In ipſo ergo curuae initio $a$ radius oſculi erit $r = 0$, vnde iam concludere licet, curuam in puncto $a$ habere cuspidem. Sumta enim amplitudine $\Phi$ infinite parua, fiet $s = \alpha c \Phi\Phi$, hincque $\partial s = 2\alpha c \Phi \partial \Phi$, vnde cum ſit

$$\partial x = \partial s \text{ ſin. } \Phi = \Phi\,\partial s \text{ et}$$

$$\partial y = \partial s \text{ coſ. } \Phi = \partial s,$$

integrando colligimus: $x = \frac{2}{3}\alpha c \Phi^3$ et $y = \alpha c \Phi\Phi$, vnde fit $y^3 = \frac{9}{4}\alpha c x x$, quae eſt aequatio pro parabola cubicali ſecunda, vnde iam concludere licet, curuam hanc talem habere figuram (fig. 7.), ita vt cuspide perpendiculariter ſuper axe $a\,r$ inſiſtat et portio continuata $a\,\sigma$ ad amplitudines negatiuas ſit referenda. Sumto autem $\Phi$ negatiuo fiet

Tab. II. Fig. 7.

$$x = -\frac{c}{\alpha\alpha+1}\,(\alpha P \text{ ſin. } \Phi - Q \text{ coſ. } \Phi),$$

qui valor eſt praecedentis negatiuus, ita vt pro ſimilibus punctis

ctis $s$ et $\sigma$ abſciſſae in contrariam partem vergant, applicata vero in $\sigma$ erit

$$\sigma\xi = y = \frac{c}{\alpha\alpha+1}(\alpha\,P\,\text{coſ.}\,\Phi + Q\,\text{ſin.}\,\Phi) - \frac{2\gamma c}{\alpha\alpha+1},$$

(quia ſumto $\Phi$ negatiuo quantitates P et coſ. $\Phi$ eundem valorem retinent, quantitates vero Q et ſin. $\Phi$ fiunt negatiuae) qui valor conuenit cum praecedente. Sicque recta $ac$, ad axem in $a$ normalis, ſimul erit diameter noſtrae curuae.

§. 44. Sumatur nunc in diametro $ac$ retro producto punctum $o$, vt ſit $ao = \frac{2\gamma c}{\alpha\alpha+1}$, ex $s$ porro ad diametrum ducatur normalis $sy$, et ob $ay = xs = y$ erit

$$oy = \frac{c}{\alpha\alpha+1}(\alpha\,P\,\text{coſ.}\,\Phi + Q\,\text{ſin.}\,\Phi) \text{ et}$$

$$sy = x = \frac{c}{\alpha\alpha+1}(\alpha\,P\,\text{ſin.}\,\Phi - Q\,\text{coſ.}\,\Phi).$$

Hinc ergo ſi ducatur recta $so$, ſecans axem in puncto $u$, erit

$$os = \frac{c}{\alpha\alpha+1}\sqrt{(\alpha\alpha PP + QQ)} = \frac{cS}{\alpha\alpha+1},$$

poſito $S = \sqrt{(\alpha\alpha PP + QQ)}$. Vocetur nunc etiam angulus $soy = osx = \psi$, eritque

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{sy}{oy} = \frac{\alpha P\,\text{ſin.}\,\Phi - Q\,\text{coſ.}\,\Phi}{\alpha P\,\text{coſ.}\,\Phi + Q\,\text{ſin.}\,\Phi} = \frac{\alpha P\,\text{tang.}\,\Phi - Q}{\alpha P + Q\,\text{tang.}\,\Phi}.$$

Introducamus nunc angulum $\theta$, vt ſit tang. $\theta = \frac{Q}{\alpha P}$, eritque

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{\text{tang.}\,\Phi - \text{tang.}\,\theta}{1 + \text{tang.}\,\Phi\,\text{tang.}\,\theta} = \text{tang.}\,(\Phi - \theta),$$

ideoque $\psi = \Phi - \theta$. Cum nunc ſit angulus $sru = \Phi$, hincque angulus $rsx = 90° - \Phi$, erit angulus $osr = 90° - \Phi + \psi$, quamobrem fiet iſte angulus $osr = 90° - \theta$, vnde concluditur angulus $aso = \theta$, qui ergo eſt angulus, quem recta $os$ cum ipſa curua $as$ conſtituit, cuius ergo tangens eſt $= \frac{Q}{\alpha P}$, hincque ſin. $\theta = \frac{Q}{S}$ et coſ. $\theta = \frac{\alpha P}{S}$.

§. 45.

§. 45. Quodſi iam ex puncto $o$ in radium osculi $s s'$ ducamus perpendiculum $o p$, ob $o s = \frac{c S}{\alpha\alpha + 1}$ erit

$o p = o s \text{ coſ. } \theta = \frac{\alpha c P}{\alpha\alpha + 1}$ et

$s p = o s \text{ ſin. } \theta = \frac{c Q}{\alpha\alpha + 1}$,

quare cum ſit radius osculi $s s' = r = c Q$, erit interuallum $s p = \frac{r}{\alpha\alpha + 1}$, ſicque erit $s p : s s' = 1 : \alpha\alpha + 1$. Vnde patet, hanc curuam reſpectu puncti $o$ eadem gaudere proprietate, quam ſupra pro curua priori inuenimus. Ita, ſi quaeratur curva $a s$ talis, vt ſi ex puncto fixo in radium osculi demittatur perpendiculum $o p$, oporteat eſſe $s r : s s' = 1 : \alpha\alpha + 1$, tam curua praecedens, quam ea quam nunc inuenimus, quaeſtioni ſatisfacient, ex quo iam inſignis affinitas inter has duas curuas elucet, dum altera ſimilis eſt euolutae alterius. Ceterum notaſſe iuuabit inter arcum $a s = s$ et perpendiculum $o p$ iſtam relationem intercedere: $s + \frac{2c}{\alpha} = \frac{\alpha\alpha + 1}{\alpha\alpha} \cdot o p$.

§. 46. Ducamus nunc etiam rectam $o s'$ ad euolutam curuae $a s$, et cum ſit $s s' = r = c Q$, erit interuallum $p s' = \frac{\alpha\alpha c Q}{\alpha\alpha + 1}$, vnde ob $o p = \frac{\alpha c P}{\alpha\alpha + 1}$, fiet

$$o s' = \frac{\alpha c}{\alpha\alpha + 1} \sqrt{(P P + \alpha\alpha Q Q)} = \frac{\alpha c}{\alpha\alpha + 1} \cdot R,$$

prouti ſcilicet ſupra poſuimus $R = \sqrt{(P P + \alpha\alpha Q Q)}$, ex quo patet fore $o s : o s' = S : \alpha R$. Quodſi iam porro vocemus angulum $s' o p = \xi$, erit tang. $\xi = \frac{p s'}{o p} = \frac{\alpha Q}{P}$; quare cum ſit angulus $s o p = \theta$, fiet angulus $s o s' = \theta + \xi$, ideoque eius tangens

$$= \frac{\text{tang.}\,\theta + \text{tang.}\,\xi}{1 - \text{tang.}\,\theta\,\text{tang.}\,\xi} = \frac{1 + \alpha\alpha}{\alpha} \cdot \frac{P Q}{P P - Q Q} = \frac{\alpha\alpha + 1}{4\alpha} (e^{2\alpha\Phi} - e^{-2\alpha\Phi}).$$

Quodſi ergo ſtatuatur $\alpha = 1$, vt curua quaeſita aequalis fiat ſuae euolutae ſecundae, fiet

$$S = R = \sqrt{(P P + Q Q)} = \sqrt{2 (e^{2\Phi} + e^{-2\Phi})},$$

hoc

hoc ergo caſu erit

$$os = os' = \tfrac{1}{2}c\mathrm{R} = \tfrac{1}{2}c\sqrt{2(e^{2\Phi} + e^{-2\Phi})},$$

anguli autem $sos'$ tangens $= \tfrac{1}{2}(e^{2\Phi} - e^{-2\Phi})$. Praeterea vero pro hoc caſu $\alpha = 1$ habebimus

$$r = c(e^{\Phi} - e^{-\Phi}),$$
$$s = c(e^{\Phi} + e^{-\Phi} - 2),$$

ipſae vero coordinatae erunt

$$ax = sy = x = \tfrac{1}{2}c\,[\text{ſin.}\,\Phi(e^{\Phi} + e^{-\Phi}) - \text{coſ.}\,\Phi(e^{\Phi} - e^{-\Phi})] \text{ et}$$
$$xs = ay = y = \tfrac{1}{2}c\,[\text{coſ.}\,\Phi(e^{\Phi} + e^{-\Phi}) + \text{ſin.}\,\Phi(e^{\Phi} - e^{-\Phi})] - c.$$

Sicque hoc caſu interuallum $ao$ erit $= c$.

§. 47. Si ſimili modo pro curua caſus praecedentis ſtatuamus $\alpha = 1$, pro ea habebimus

$$r = c(e^{\Phi} + e^{-\Phi}),$$
$$s = c(e^{\Phi} - e^{-\Phi}),$$
$$ax = x = \tfrac{1}{2}c\,[\text{ſin.}\,\Phi(e^{\Phi} - e^{-\Phi}) - \text{coſ.}\,\Phi(e^{\Phi} + e^{-\Phi})] + c,$$
$$xs = y = \tfrac{1}{2}c\,[\text{coſ.}\,\Phi(e^{\Phi} - e^{-\Phi}) + \text{ſin.}\,\Phi(e^{\Phi} + e^{-\Phi})].$$ Tab. II. Fig. 5.

Sicque etiam hoc caſu erit interuallum $ao = c$, at radius oſculi in puncto $a = 2c$. Hae autem duae curuae hac inſigni proprietate erunt praeditae, vt altera alterius ſit euoluta.

§. 48. Quo autem relatio inter has duas curuas maxime memorabiles, quarum altera alterius eſt euoluta, clarius Tab. III. perſpiciatur, ambas coniunctim in eadem figura repraeſentemus, Fig. 8. quae cum ad communem diametrum referantur, ſit recta $caa'$ iſte diameter, et $as$ curua poſteriore loco inuenta, quae ergo in $a$ habebit cuſpidem, cuius curuae ſi radius oſculi in $s$ ſit recta

 $s\sigma$,

$s\,\sigma$, erit $\sigma$ punctum in eius euoluta $a\,\sigma$. Huius vero curuae quia radius oſculi in $a$ eſt $a\,a' = 2\,c$, referat curua $a'\,s'$ euolutam curuae $a\,\sigma$, quae ergo ſimilis et aequalis primae curuae $a\,s$, quamque radius oſculi $\sigma\,s'$ in puncto $s'$ tanget. Denique ducto iſtius curuae radio oſculi $\sigma'\,s'$, is eius euolutam $a'\,\sigma'$ in puncto $\sigma'$ tanget, eritque pariter curua $a'\,\sigma'$ ſimilis et aequalis curuae $a\,\sigma$. Manifeſtum igitur eſt omnes arcus hic exhibitos $a\,s$, $a\,\sigma$, $a'\,s'$, $a'\,\sigma'$, eſſe aeque amplos, ideoque eorum amplitudinem communem $= \Phi$. Quare ſi ex punctis $s$, $\sigma$, $s'$ et $\sigma'$ ad communem diametrum ducantur normales $s\,y$, $\sigma\,\xi$, $s'\,y'$, $\sigma'\,\xi'$, elementa harum duarum curuarum ſequenti modo ſe habebunt:

## I. Pro curuis $a\,s$ et $a'\,s'$.

1.) Arcus $a\,s = a'\,s' = c\,(e^{\Phi} + e^{-\Phi}) - 2\,c$,

2.) Radius oſculi in $s$ et $s' = c\,(e^{\Phi} - e^{-\Phi})$,

cui aequales ſunt $s\,\sigma$ et $s'\,\sigma'$,

3.) 4.) Coord. $\begin{cases} a\,y = a'\,y' = \frac{1}{2}c\,[\text{coſ.}\,\Phi\,(e^{\Phi} + e^{-\Phi}) + \text{ſin.}\,\Phi\,(e^{\Phi} - e^{-\Phi})] - c, \\ s\,y = s'\,y' = \frac{1}{2}c\,[\text{ſin.}\,\Phi\,(e^{\Phi} + e^{-\Phi}) - \text{coſ.}\,\Phi\,(e^{\Phi} - e^{-\Phi})]. \end{cases}$

## II. Pro curuis $a\,\sigma$ et $a'\,\sigma'$.

1.) Arcus $a\,\sigma = a'\,\sigma' = c\,(e^{\Phi} - e^{-\Phi})$,

2.) Radius oſculi in $\sigma$ et $\sigma' = c\,(e^{\Phi} + e^{-\Phi})$,

3.) 4.) Coordin. $\begin{cases} a\,\xi = a'\,\xi' = \frac{1}{2}c\,[\text{ſin.}\,\Phi\,(e^{\Phi} - e^{-\Phi}) - \text{coſ.}\,\Phi\,(e^{\Phi} + e^{-\Phi})] + c, \\ \xi\,\sigma = \xi'\,\sigma' = \frac{1}{2}c\,[\text{coſ.}\,\Phi\,(e^{\Phi} - e^{-\Phi}) + \text{ſin.}\,\Phi\,(e^{\Phi} + e^{-\Phi})]. \end{cases}$

Cete-

Ceterum ambae iſtae curuae $a s$ et $a \sigma$ per infinitos gyros continuo creſcentes in infinitum excurrent.

## III. De curuis
### quae ſuis euolutis ſecundis *inuerſe* ſunt ſimiles, vbi $r'' = -\alpha^2 r$.

§. 49. Cum igitur hic ſit $\lambda\lambda + \alpha\alpha = 0$, ob $n = 2$ erit $\omega = \frac{\pi}{2}$, hinc $\zeta = 0$ et $\eta = \alpha$, et formulae pro hoc caſu erunt ſequentes:

$$r = c\,\text{ſin.}\,(\gamma + \alpha\Phi),$$

$$s = -\tfrac{c}{\alpha}\,\text{coſ.}\,(\gamma + \alpha\Phi) + \tfrac{c}{\alpha}\,\text{coſ.}\,\gamma,$$

$$x = -\tfrac{c}{2(\alpha+1)}\,\text{ſin.}\,(\gamma + (\alpha+1)\Phi) + \tfrac{c}{2(\alpha-1)}\,\text{ſin.}\,(\gamma + (\alpha-1)\Phi) - \tfrac{c}{\alpha\alpha-1}\,\text{ſin.}\,\gamma,$$

$$y = -\tfrac{c}{2(\alpha+1)}\,\text{coſ.}\,(\gamma + (\alpha+1)\Phi) - \tfrac{c}{2(\alpha-1)}\,\text{coſ.}\,(\gamma + (\alpha-1)\Phi) + \tfrac{\alpha c}{\alpha\alpha-1}\,\text{coſ.}\,\gamma.$$

§. 50. Ex harum formularum prima $r = c\,\text{ſin.}(\gamma + \alpha\Phi)$, in qua reliquae omnes continentur, ſtatim patet, perinde eſſe ſiue $\alpha$ poſitiue ſiue negatiue accipiatur, quoniam poſterior caſus eodem redit, ac ſi $\alpha$ maneret poſitiuum, amplitudo vero $\Phi$ negatiue caperetur, vnde ſufficiet quantitatem $\alpha$ perpetuo vt poſitiuam conſideraſſe. Deinde quia amplitudinem $\Phi$ pro lubitu augere ſiue diminuere licet, dum curua prorſus eadem manet, manifeſtum eſt curuam eandem eſſe prodituram, quicunque valor ipſi $\gamma$ tribuatur; quamobrem ſumamus $\gamma = 0$, et formulae pro curua quaeſita ſequenti modo contrahentur:

 $r =$

$$r = c\,\text{ſin.}\,\alpha\,\Phi,$$
$$s = -\frac{c}{\alpha}\,\text{coſ.}\,\alpha\,\Phi + \frac{c}{\alpha},$$
$$x = -\frac{c}{2(\alpha+1)}\,\text{ſin.}\,(\alpha+1)\,\Phi + \frac{c}{2(\alpha-1)}\,\text{ſin.}\,(\alpha-1)\,\Phi,$$
$$y = -\frac{c}{2(\alpha+1)}\,\text{coſ.}\,(\alpha+1)\Phi - \frac{c}{2(\alpha-1)}\,\text{coſ.}\,(\alpha-1)\Phi + \frac{\alpha c}{\alpha\alpha-1}.$$

§. 51. Hic ergo vnica conſtans arbitraria ineſt $c$, quae, ſiue maior ſiue minor accipiatur, nihil mutat in natura ipſius curuae. Omnis igitur varietas orietur ex quantitate $\alpha$, qua ratio ſimilitudinis continetur, cum pro euoluta ſecunda eſſe debeat $r'' = -\alpha\alpha r$; vnde patet, ſi fuerit $\alpha > 1$, tum euolutam ſecundam maiorem fore ipſa curua quaeſita, contra autem minorem, ſi accipiatur $\alpha < 1$; ſumto autem $\alpha = 1$, euoluta ſecunda adeo ipſi curuae prodire debet aequalis. Quamobrem hic tres caſus euolui conueniet, quos ergo ſingulos ſeorſim tractemus.

## 1°. Euolutio caſus $\alpha = 1$.

§. 52. Hoc caſu ſingulare phaenomenon ſtatim ſe offert in formulis pro $x$ et $y$ inuentis, quia ibi denominator $\alpha - 1$ euaneſcit. Quia autem hoc caſu angulus $(\alpha - 1)\Phi$ fit infinite paruus, eius ſinus erit $(\alpha - 1)\Phi$, at vero coſinus $= 1$, quo obſeruato ſequentes nanciſcemur formulas:

$$r = c\,\text{ſin.}\,\Phi;$$
$$s = c\,(1 - \text{coſ.}\,\Phi);$$
$$x = -\frac{c}{4}\,\text{ſin.}\,2\,\Phi + \frac{c\Phi}{2};$$
$$y = -\frac{c}{4}\,\text{coſ.}\,2\,\Phi + \frac{c}{4};$$

quos poſteriores valores facilius immediate reperire licet. Cum enim ſit $\partial s = r\,\partial\Phi = c\,\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$, erit

$$\partial x = \partial s\,\text{ſin.}\,\Phi = c\,\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2 = \tfrac{1}{2}c\,\partial\Phi\,(1 - \text{coſ.}\,2\,\Phi) \text{ et}$$
$$\partial y = \partial s\,\text{coſ.}\,\Phi = c\,\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \tfrac{1}{2}c\,\partial\Phi\,\text{ſin.}\,2\,\Phi,$$

vnde

vnde integrando colligitur

$$x = \frac{1}{2} c \Phi - \frac{1}{4} c \text{ ſin. } 2 \Phi \text{ et}$$

$$y = \frac{1}{4} c - \frac{1}{4} c \text{ coſ. } 2 \Phi.$$

§. 53. Hinc primo patet in ipſo puncto $a$, vbi $\Phi = 0$, etiam radium oſculi curuae $r$ fore $= 0$, et curuam in hoc puncto cuſpidem eſſe habituram, a qua porro per arcum $a\sigma$ retro eſt continuanda, pro quo amplitudo $\Phi$ negatiue ſumi debet, vnde in puncto $a$ erit radius oſculi $= - c$ ſin. $\Phi$ et arcus $a\sigma = c(1 - \text{coſ.}\, \Phi)$, quippe qui per legem continuitatis iterum fit poſitiuus, propterea quod ſurſum vergit, id quod ex valore ipſius $y$ patet, cuius ſignum non mutatur; at vero abſciſſa $x$ in negatiuam abit, ideoque in partem contrariam $a\xi = ax$; ex quo patet, curuam in $a$ habere diametrum $ac$ axi normalem. Deinde idem euenit quoties $\Phi$ fuerit $\Phi$ vel $\pi$, vel $2\pi$, vel $3\pi$, vel $4\pi$ etc., quippe quibus caſibus omnibus fit tam $r = 0$ quam $y = 0$; at vero ſumto $\Phi = \pi$ fit $x = \frac{c\pi}{2}$; tum vero ex $\Phi = 2\pi$ fit $x = c\pi$; ſimilique modo ſumto $\Phi = 3\pi$ erit $x = \frac{3}{2} c\pi$, et ita porro: vnde patet, in omnibus his punctis radium oſculi euaneſcere, haecque puncta ſuper axe ſecundum aequalia interualla eſſe diſpoſita $\frac{1}{2} c\pi$, prorſus vti in cycloide ſuper axe deſcripta euenit. In punctis autem intermediis, vbi eſt vel $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, vel $\Phi = \frac{3}{2}\pi$, vel $\Phi = \frac{5}{2}\pi$ etc. vbique applicata $y$ euadet maxima $= \frac{c}{2}$, quae ergo exhibebit diametrum circuli, qui ſuper axe voluendo cycloidem deſcribit: haec enim altitudo $\frac{1}{2} c$ ſe habet ad interuallum cuſpidum $\frac{1}{2} c\pi$, vt $1 : \pi$ hoc eſt vt diameter ad peripheriam. Tab. III. Fig. 9.

§. 54. Quo autem clarius appareat, hanc curuam reuera eſſe cycloidem, conſideremus radium oſculi in puncto $s$,

qui ſit $s s' = c$ ſin. $\Phi$, cuius interſectio cum axe aſſumto ſit $r$, et angulus $a r s = \Phi$. Iam quia inuenimus applicatam

$$x s = y = \tfrac{1}{4} c (1 - \text{coſ.}\ 2\Phi) = \tfrac{1}{2} c\ \text{ſin.}\ \Phi^2,$$

erit primo recta

$$s r = \frac{y}{\text{ſin.}\ \Phi} = \tfrac{1}{2} c\ \text{ſin.}\ \Phi = \tfrac{1}{2} r,$$

ſicque patet, radium oſculi $s s'$ in puncto $r$ biſecari, quae eſt notiſſima proprietas cycloïdis. Porro vero ob $\frac{x s}{r x} =$ tang. $\Phi$ erit $r x = \frac{1}{2} c$ ſin. $\Phi$ coſ. $\Phi = \frac{1}{4} c$ ſin. $2\Phi$; quare cum ſit $a x = x = \frac{1}{2} c \Phi - \frac{1}{4} c$ ſin. $2\Phi$, erit interuallum $a r = \frac{1}{2} c \Phi$, ſicque erit recta $a r$ ad normalem $r s$ vt $\Phi$ : ſin. $\Phi$.

Tab. III. Fig. 10. §. 55. Erigatur nunc ex $r$ perpendiculum $r o = \frac{1}{4} c$, et ex $o$ in $s r$ ducatur normalis $o p$, atque ob angulum $s r o = 90° - \Phi$, ideoque $r o p = \Phi$, erit $r p = \frac{1}{4} c$ ſin. $\Phi = \frac{1}{2} r s$, ita vt punctum $p$ in medium rectae $r s$ incidat, vnde etiam recta $o s$ aequalis erit ipſi $r o = \frac{1}{4} c$. Quod ſi iam centro $o$ radio $o r$ deſcribatur circulus per puncta $r$ et $s$ tranſiens, longitudo arcus $r s$ erit $\frac{1}{2} c \Phi$, ob angulum $r o s = 2\Phi$, vnde patet, iſtum arcum $r s$ aequalem eſſe diſtantiae $a r$. Sicque manifeſtum eſt noſtram curuam eſſe cycloidem prouolutione circuli, cuius radius $o r = \frac{1}{4} c$ ideoque diameter $= \frac{1}{2} c$, ſuper axe $a r$ deſcriptam, quae ergo ſuae euolutae ſecundae eſt aequalis. Quod autem etiam euoluta prima ſit ſimilis cyclois, ex eius radio oſculi facile intelligitur, qui cum in genere ſit $r' = \frac{\partial r}{\partial \Phi}$, erit $r' = c$ coſ. $\Phi = c$ ſin. $(90° - \Phi)$, ita vt in euoluta tantum amplitudo ab alio termino computetur. Haec autem omnia inuulgus maxime ſunt nota.

## 2°. Euolutio caſus quo $\alpha < 1$.

§. 56. Hoc ergo caſu, quo euoluta ſecunda minor eſt quam ipſa curua, in ratione $\alpha\alpha : 1$, formulae noſtrae ita ſe habe-

habebunt:

$$r = c\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi,$$

$$s = \frac{2c}{\alpha}\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha\Phi^2,$$

$$x = -\frac{c}{2(1+\alpha)}\,\text{ſin.}\,(1+\alpha)\Phi + \frac{c}{2(1-\alpha)}\,\text{ſin.}\,(1-\alpha)\Phi,$$

$$y = -\frac{c}{2(1+\alpha)}\,\text{coſ.}\,(1+\alpha)\Phi + \frac{c}{2(1-\alpha)}\,\text{coſ.}\,(1-\alpha)\Phi - \frac{\alpha c}{1-\alpha\alpha},$$

vnde patet radium oſculi $r$ toties euaneſcere, ideoque curuam cuſpidem eſſe habituram, quoties fuerit vel $\Phi = 0$, vel $\Phi = \frac{\pi}{\alpha}$, vel $\Phi = \frac{2\pi}{\alpha}$, vel $\Phi = \frac{3\pi}{\alpha}$, vel in genere $\Phi = \frac{i\pi}{\alpha}$; maximum autem valorem eſſe adepturum, ſcilicet $r = \pm c$, vbi fuerit vel $\Phi = \frac{\pi}{2\alpha}$, vel $\Phi = \frac{3\pi}{2\alpha}$, vel $\Phi = \frac{5\pi}{2\alpha}$, etc.

§. 57. Ex his intelligitur, vti in caſu praecedente, curuam habituram eſſe diametrum $ac$, in puncto $a$ ad axem normalem, ad quem ex $s$ normaliter ducatur $sy = ax = x$, vt ſit $ay = xs = y$. Iam in hac recta $ca$, retro producta, capiatur interuallum $ao = \frac{\alpha c}{1-\alpha\alpha}$, vt fiat Tab. III. Fig. 11.

$$oy = -\frac{c}{2(1+\alpha)}\,\text{coſ.}\,(1+\alpha)\Phi + \frac{c}{2(1-\alpha)}\,\text{coſ.}\,(1-\alpha)\Phi$$

exſiſtente

$$sy = -\frac{c}{2(1+\alpha)}\,\text{ſin.}\,(1+\alpha)\Phi + \frac{c}{2(1-\alpha)}\,\text{ſin.}\,(1-\alpha)\Phi,$$

vnde ducta recta $os$ erit

$$os^2 = \frac{cc}{4(1+\alpha)^2} - \frac{cc}{2(1-\alpha\alpha)}\,\text{coſ.}\,2\alpha\Phi + \frac{cc}{4(1-\alpha)^2}, \text{ ſiue}$$

$$os^2 = \frac{cc(1+\alpha\alpha)}{2(1-\alpha\alpha)^2} - \frac{cc}{2(1-\alpha\alpha)}\,\text{coſ.}\,2\alpha\Phi,$$

ita vt ſit

$$os = \frac{c}{1-\alpha\alpha}\,\surd[\tfrac{1}{2}(1+\alpha\alpha) - (1-\alpha\alpha)\,\text{coſ.}\,2\alpha\Phi)].$$

Hinc igitur pro omnibus cuſpidibus, vbi eſt $\alpha\Phi = i\pi$, ideoque $\text{coſ.}\,2\alpha\Phi = +1$, erit $os = \frac{\alpha c}{1-\alpha\alpha} = oa$, ſicque omnes cuſpi-

ſpides reperientur in peripheria circuli centro $o$ radio $o\,a$ deſcripti. Deinde vero omnia puncta, vbi radius oſculi fit maximus, quod euenit ſi fuerit $2\,\alpha\Phi = (2\,i + 1)\,\pi$, ideoque coſ. $2\,\alpha\Phi = -1$, a puncto $o$ remota erunt interuallo $o\,s = \frac{c}{1-\alpha\alpha}$, quod praecedens interuallum $a\,o$ ſuperat quantitate $\frac{c}{1+\alpha}$, quare omnia iſta puncta reperientur in peripheria circuli centro $o$ deſcripti, cuius radius eſt $\frac{c}{1-\alpha\alpha} = \frac{\alpha c}{1-\alpha\alpha} + \frac{c}{1+\alpha}$.

§. 58. Vocemus nunc angulum $a\,o\,s = \psi = o\,s\,x$ eritque

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{y\,s}{y\,o} = \frac{(1-\alpha)\,\text{ſin.}\,(1+\alpha)\Phi - (1+\alpha)\,\text{ſin.}\,(1-\alpha)\Phi}{(1-\alpha)\,\text{coſ.}\,(1+\alpha)\Phi - (1+\alpha)\,\text{coſ.}\,(1-\alpha)\Phi},$$

quae expreſſio, euoluendo angulos $(1+\alpha)\Phi$ et $(1-\alpha)\Phi$, transformatur in hanc:

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{\alpha\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi - \text{coſ.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{\alpha\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi + \text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi} = \frac{\alpha\,\text{tang.}\,\Phi - \text{tang.}\,\alpha\Phi}{\alpha + \text{tang.}\,\Phi\,\text{tang.}\,\alpha\Phi},$$

vnde loca ſingularum cuſpidum haud difficulter detegentur.

§. 59. Ad hanc formulam magis euoluendam introducamus angulum $\theta$, vt ſit tang. $\theta = \frac{1}{\alpha}$ tang. $\alpha\Phi$, eritque

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{\text{tang.}\,\Phi - \text{tang.}\,\theta}{1 + \text{tang.}\,\Phi\,\text{tang.}\,\theta} = \text{tang.}\,(\Phi - \theta),$$

ita vt ſit angulus $o\,s\,x = \Phi - \theta$. Quoniam igitur angulus $x\,s\,r$ eſt $90° - \Phi$, hinc fiet angulus $o\,s\,r = 90° - \theta$, conſequenter angulus $a\,s\,o = \theta$, qui ergo angulus euaneſcit, ſi fuerit vel $\Phi = 0$, vel $\Phi = \frac{i\pi}{\alpha}$, contra vero recta $o\,s$ ad curuam erit normalis, ſiue $\theta = 90°$, quoties fuerit $\alpha\Phi = \frac{\pi}{2}$, vel $\frac{3\pi}{2}$, vel $\frac{5\pi}{2}$.

§. 60. Demittamus nunc ex $o$ in radium oſculi perpendiculum $o\,p$, et poſito breuitatis gratia $o\,s = z$, ob angulum $o\,s\,p = 90° - \theta$ fiet $o\,p = z\,\text{coſ.}\,\theta$ et $s\,p = z\,\text{ſin.}\,\theta$. Iam centro

tro $o$ radio $oa$ deſcribatur circulus, radium oſculi ſecans in $u$, vt ſit $ou = \frac{\alpha c}{1-\alpha\alpha}$, eritque

$$up^2 = ou^2 - op^2 = \frac{\alpha\alpha cc}{(1-\alpha\alpha)^2} - zz\,\text{coſ.}\,\theta^2.$$

Quodſi iam in valore ipſius $zz$ loco coſ. $2\alpha\Phi$ ſcribamus valorem coſ. $\alpha\Phi^2$ — ſin. $\alpha\Phi^2$, fiet

$$zz = \frac{cc}{(1-\alpha\alpha)^2}(\text{ſin.}\,\alpha\Phi^2 + \alpha\alpha\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi^2);$$

quia autem tang. $\theta = \frac{1}{\alpha}$ tang. $\alpha\Phi$, erit

$$\text{coſ.}\,\theta^2 = \frac{\alpha\alpha\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi^2}{\text{ſin.}\,\alpha\Phi^2 + \alpha\alpha\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi^2}$$

quibus valoribus ſubſtitutis fiet

$$zz\,\text{coſ.}\,\theta^2 = \frac{\alpha\alpha cc\,\text{coſ.}\,\alpha\Phi^2}{(1-\alpha\alpha)^2},$$

ſimilique modo

$$zz\,\text{ſin.}\,\theta^2 = \frac{cc\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi^2}{(1-\alpha\alpha)^2}, \text{ vnde fit}$$

$$up^2 = \frac{\alpha\alpha cc\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{(1-\alpha\alpha)^2} \text{ ideoque } up = \frac{\alpha c\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{1-\alpha\alpha},$$

vnde patet fore angulum $uop = \alpha\Phi$. Quare cum ſit

$$sp = z\,\text{ſin.}\,\theta = \frac{c\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{1-\alpha\alpha},$$

erit tota diſtantia, ſeu recta

$$su = sp - up = \frac{c\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{1+\alpha}.$$

§. 61. Cum igitur ſit radius oſculi $ss' = c\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi$, euidens eſt rectas $su$ et $sp$ ad eum vbique conſtantem tenere rationem: erit enim $su = \frac{r}{1+\alpha}$ et $sp = \frac{r}{1-\alpha\alpha}$, ita vt ſit $su : ss' = 1 : 1+\alpha$ et $sp : ss' = 1 : 1-\alpha\alpha$ et $su : sp = 1-\alpha : 1$. Porro vero erit $s'u = \frac{\alpha r}{1+\alpha}$ et $s'p = \frac{\alpha\alpha r}{1-\alpha\alpha}$. Haec autem ſola conditio, quod radius oſculi $ss'$ a circulo in $u$ ita ſecatur, vt inter-

interuallum $su$ ad ipſum radium oſculi $ss'$ datam teneat rationem, ſufficit, ad euincendum, curuam noſtram eſſe epicycloidem, ſuper circulo immobili, cuius radius $oa$, a circulo mobili, cuius diameter $= \frac{c}{1+\alpha}$ deſcriptam, cuius curuae Phaenomena paſſim abunde ſunt expoſita.

§. 62. Ceterum quoniam inuenimus angulum $uop = \alpha\Phi$, erit angulus $oup = 90° - \alpha\Phi$; praeterea vero ob angulum $osp = 90° - \theta$, erit angulus $sop = \theta$, hincque colligitur angulus $sou = \theta - \alpha\Phi$, cui ſi addatur angulus $aos = \psi = \Phi - \theta$, prodibit angulus $acu = (1-\alpha)\Phi$, qui ductus in radium $oa = \frac{\alpha c}{1-\alpha\alpha}$ praebet ipſum arcum $au = \frac{\alpha c\Phi}{1+\alpha}$. Erat vero recta $su = \frac{c\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi}{1+\alpha}$, ita vt ſe habeat arcus $au$ ad rectam $su$ vt angulus $\alpha\Phi$ ad ſuum ſinum. Quodſi iam radius $ou$ producatur vsque in $q$, vt ſit $uq = \frac{c}{1+\alpha}$, ob angulum $suq = 90° - \alpha\Phi$ erit $su = uq\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi = uq\,\text{coſ.}\,suq$; vnde patet, rectam $qs$ fore ad $us$ normalem, ideoque curuam tangere. Quare ſi circa diametrum $uq = \frac{c}{1+\alpha}$ deſcribatur circulus, is primo circulum $au$ tanget in $u$, tum vero per ipſum punctum $s$ tranſibit, vnde ob angulum $uqs = \alpha\Phi$, erit arcus $us = \frac{c}{1+\alpha}\,\text{ſin.}\,\alpha\Phi$ ideoque aequalis $\frac{\alpha c\Phi}{1+\alpha}$. Ex quo manifeſtum eſt, noſtram curuam eſſe epicycloidem, prouolutione circuli mobilis $usq$, cuius diameter $= \frac{c}{1+\alpha}$, ſuper circulo immobili $au$, cuius radius $= \frac{\alpha c}{1-\alpha\alpha}$ generatam. Hinc porro, quia peripheria circuli mobilis eſt $\frac{\pi}{1+\alpha}$, capiamus in circulo immobili arcum $ab$ illi aequalem, eritque $b$ punctum, quo circulus mobilis poſt integram reuolutionem peruenit et hic nouam cuſpidem formabit. Pro hoc igitur puncto $b$ erit angulus $aob = \frac{\pi(1-\alpha)}{\alpha}$.

Tab. III. Fig. 12.

## 3°. Euolutio caſus quo $\alpha > 1$.

§. 63. Omnes euolutiones hic eaedem manent vt in articulo praecedente, hoc tantum diſcrimine, vt loco $1-\alpha$ ſcribi debeat $-(\alpha-1)$. Hinc igitur ſtatim patet, punctum $o$ hoc caſu ſupra axem noſtrum $a\,r$ cadere, ita vt ſit $a\,o = \frac{\alpha c}{\alpha\alpha-1}$. Ex hoc igitur centro $o$ radio $a\,o$ deſcribatur circulus $a\,u$ radium oſculi $s\,s'$ ſecans in $u$, qui nobis referet circulum immobilem, ſuper cuius peripheria concaua alter circulus, cuius radius erit vt ante $\frac{c}{1+\alpha}$, mobilis prouoluitur, circulus autem iſte mobilis pro puncto $s$ ita erit ſitus, vt immobilem in puncto $u$ tangat ſimulque per punctum $s$ tranſeat. Hoc igitur caſu, ſi radius oſculi $s\,s'$ retro continuetur, in eumque ex $o$ perpendiculum demittatur $o\,p$, erit vt ante $s\,p = \frac{r}{\alpha\alpha-1}$ et $s\,u = \frac{r}{1+\alpha}$, porro $s'\,u = \frac{\alpha r}{1+\alpha}$ et $s'\,p = \frac{\alpha\alpha r}{\alpha\alpha-1}$. Quamdiu ergo diameter circuli mobilis $\frac{c}{1+\alpha}$ minor eſt quam diameter circuli immobilis $\frac{2\alpha c}{1+\alpha}$, ille intra circulum mobilem ſuas prouolutiones peraget et eas curuas deſcribet, quae ſub nomine hypocycloidum ſunt notae. Sin autem circulus mobilis maior ſit quam immobilis, tota curua extra circulum immobilem cadet, dum antea tota intra eum erat ſita. Caſus autem quo ambo circuli fiunt aequales, hoc eſt $\frac{1}{1+\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha\alpha-1}$, quia tum foret $\alpha = -1$, locum habere nequit, quoniam ſupra iam valores negatiuos ipſius $\alpha$ excluſimus. Atque ob eandem rationem etiam caſus, quibus circulus mobilis maior fieret quam immobilis, excluduntur, quia fieret $\alpha-1 > 2\alpha$. Sic igitur patet, alias curuas non ſatisfacere, praeter epicycloides et hypocycloides.

Tab. III. Fig. 13.

§. 64. His igitur circa euolutas tam primas quam ſecundas expeditis finem huic tractationi imponimus, quoniam, ſi omnes curuae deſiderentur, quae ſuis ſint euolutis, vel tertiis, vel quartis, vel altioris ordinis ſimiles, ſupra praecepta iam dilucide ſunt expoſita, quorum beneficio pro quouis caſu formulae omnes plane ſolutiones in ſe continentes aſſignari poterunt. Ipſae autem hae curuae plerumque tantopere fiunt complicatae, vt vix quicquam notatu dignum occurrat, quod operae pretium foret commemorare.

# PHYSICO-
# MATHEMATICA.

# DE MOTV GLOBI HETEROGENEI SVPER PLANO HORIZONTALI, VNA CVM DILVCIDATIONIBVS NECESSARIIS SVPER MOTV VACILLATORIO.

Auctore

*L. EVLERO.*

*Conuent. exhib. d.* 20 *Aprilis* 1775.

§. 1.

Hic mihi propoſitum eſt in motus globi heterogenei, cuius centrum grauitatis a centro figurae diſtat, inquirere; quod cum generaliſſime ob ſummas calculi difficultates expediri nequeat, motum huiusmodi globorum tantum ad planum horizontale reſtringam. Praeterea vero etiam motum tantum rectilineum ſum contemplaturus; vnde omnes motus gyratorios hinc excludi oportebit, praeter eos, qui fiant circa axem horizontalem ad motus progreſſiui directionem normalem; quandoquidem analyſis nondum eo vsque eſt promota, vt alios motus circa axes obliquos euoluere liceret.

§. 2.

Tab. VII. Fig. 1. §. 2. Sit ergo in plano horizontali I O recta, ſuper qua globus progrediatur, quam initio in puncto I tetigerit, elapſo autem tempore $t$ tangat in puncto S, ponaturque ſpatium percurſum I S $= s$; tum vero globi centrum ſit in C, eiusque radius C S $=$ C A $= a$, et circulus S A B referat ſectionem globi verticalem ad motus directionem I O factam, in qua reperiatur centrum globi grauitatis G, diſtans ab ipſo centro C interuallo C G $= c$; ita vt ſi globus habeat motum gyratorium, is ſemper fiat circa axem horizontalem per centrum grauitatis G tranſeuntem et ad ſectionem S A B normalem; huiusque axis reſpectu ponatur momentum globi inertiae $=$ P $k k$, denotante P pondus ſeu maſſam globi. Iam demiſſo ex G in rectam I O perpendiculo G P, vocentur coordinatae locum centri grauitatis praeſentem determinantes IP $= x$ et P G $= y$, ita vt formula $\frac{\partial x}{\partial t}$ exprimat celeritatem horizontalem centri grauitatis G, et $\frac{\partial y}{\partial t}$ eius celeritatem verticalem, qua ſcilicet hoc tempore ſurſum mouetur. Praeterea vero vocetur angulus A G P $=$ A C S $= \Phi$, quem angulum in ſenſum S A B augeri aſſumamus, ita vt $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ exprimat celeritatem angularem globi in eundem ſenſum; vbi meminiſſe oportet, mihi tempus perpetuo in minutis ſecundis exhiberi, celeritates vero per ſpatia quae vno minuto percurrerentur; quem in finem littera $g$ in calculum introducetur, denotans altitudinem lapſus vno minuto ſecundo peracti.

§. 3. His poſitis binae coordinatae $x$ et $y$ per ambas variabiles I S $= s$ et angulum A C S $= \Phi$ facile exprimi poterunt; ducta enim horizontali G Q, ob G Q $= c$ ſin. $\Phi$ et C Q $= c$ coſ. $\Phi$, erit $x = s - c$ ſin. $\Phi$ et $y = a - c$ coſ. $\Phi$, vnde fiet

$$\partial x = \partial s - c \partial \Phi \text{ coſ. } \Phi \text{ et } \partial y = c \partial \Phi \text{ ſin. } \Phi,$$

et

et porro

$$\partial\partial x = \partial\partial s - c\,\partial\partial\Phi \text{ coſ. } \Phi + c\,\partial\Phi^2 \text{ ſin. } \Phi \text{ et}$$

$$\partial\partial y = + c\,\partial\partial\Phi \text{ ſin. } \Phi + c\,\partial\Phi^2 \text{ coſ. } \Phi,$$

quibus formulis vti oportet ad motum determinandum. Quod ſi autem in hoc negotio etiam frictionis rationem habere velimus, ante omnia videndum eſt, quomodo punctum globi S ſuper recta I O promoueatur; ac primo quidem euidens eſt, ſi nullus adeſſet motus gyratorius, celeritatem huius puncti verſus S O fore $= \frac{\partial s}{\partial t}$; at vero ob motum gyratorium, quo angulus A C S $= \Phi$ ſuo differentiali $\partial\Phi$ augetur, idem punctum S retropelletur celeritate $= \frac{a\,\partial\Phi}{\partial t}$; vnde intelligitur, ſi fuerit $\partial s = a\,\partial\Phi$, tum prouolutionem globi fore perfectam, ſin autem fuerit $\partial s > a\,\partial\Phi$, globus radet planum horizontale verſus S O, hocque caſu frictio vim ſuam exeret in directionem contrariam S I; contra vero ſi fuerit $a\,\partial\Phi > \partial s$, attritus fiet ſecundum S I, et vis frictionis ſeſe exeret ſecundum directionem S O.

§. 4. Nunc conſideremus ipſas vires, quibus iſte globus ſollicitatur; ac primo quidem occurrit ipſum globi pondus, vnde naſcitur vis centrum grauitatis G deorſum ſecundum G P vrgens $= P$; deinde quia globus plano incumbit in S, hic certam preſſionem exercebit, ideoque per reactionem a plano pari vi in directione S C repelletur, quae vis cum etiamnunc ſit incognita, charactere $\Pi$ deſignetur. Denique ſi admittatur frictio, ea ſemper huic ipſi preſſioni $\Pi$ erit proportionalis, quam ergo repraeſentemus per $\lambda\,\Pi$, quae, prout fuerit vel $\partial s > a\,\partial\Phi$ vel $\partial s < a\,\partial\Phi$, effectum exeret vel ſecundum directionem S I vel ſecundum directionem S O, vti iam notauimus. Supponamus autem his caſibus quibus attritus verus datur eſſe $\lambda = \frac{1}{3}$, prouti vulgo aſſumi ſolet, cuius autem loco

facile quamlibet aliam fractionem ſubſtituere licebit. Pro caſu autem quo $\partial s = a \partial \Phi$, vbi nullus datur attritus, imprimis notandum eſt, vel fore $\lambda = 0$, vel certum quendam valorem $< \frac{1}{3}$ eſſe habiturum, quantum ſcilicet opus fuerit ad attritum impediendum.

§. 5. Quo igitur hinc ipſum globi motum determinemus, ex principiis mechanicis meminiſſe oportet, primo motum progreſſiuum centri grauitatis per vires ſollicitantes ita affici, quaſi tota maſſa in hoc puncto eſſet collecta, ſimulque omnes vires eidem puncto eſſent applicatae; deinde vero pro motu gyratorio centrum grauitatis G tanquam immotum ſpectari poſſe, vnde virium ſollicitantium momenta reſpectu axis gyrationis per ipſum punctum G tranſeuntis computari debent, vt ex iis acceleratio motus gyratorii definiatur.

§. 6. Concipiamus igitur omnes vires ſollicitantes ipſi centro grauitatis G applicatas, quod ergo ſuſtinebit primo vim P in directione G P, tum vero vim in directione contraria $= \Pi$. Praeterea vero ſecundum directionem horizontalem ſollicitabitur vi frictionis $= \lambda \Pi$, vel verſus P I vel P O, vti ante explicauimus; vbi quidem ad omnem ambiguitatem euitandam aſſumamus hanc vim $\lambda \Pi$ retro ſecundum P I vrgere, ſiquidem pro aliis caſibus ſignum facile mutatur. Quod ſi iam ipſum motum centri grauitatis ſecundum easdem directiones I P et P G reſoluamus, principia mechanica ſequentes ſuppeditant aequationes:

$$\text{I. } \frac{P \partial \partial x}{2 g \partial t^2} = -\lambda \Pi; \quad \text{II. } \frac{P \partial \partial y}{2 g \partial t^2} = \Pi - P;$$

in quibus elementum temporis $\partial t$ ſumtum eſt conſtans.

§. 7. Pro motu autem gyratorio vis grauitatis P nullum praebet momentum reſpectu axis G, quia per ipſum tranſit. Verum ex vi Π in directione S C agente reſpectu puncti G naſcetur momentum $= \Pi . GQ = \Pi c$ ſin. Φ, quo momento motus gyratorius retardatur. Tertio vero etiam vis frictionis λΠ ſecundum directionem PI agens producet momentum $\lambda\Pi . PG = \lambda\Pi . (a - c \text{ coſ.} \Phi)$, hocque momento motus gyratorius acceleratur; pro quo determinando principia motus hanc ſuppeditant aequationem:

$$\text{III. } \frac{P k k \partial\partial\Phi}{2 g \partial t^2} = \lambda\Pi(a - c \text{ coſ.} \Phi) - \Pi c \text{ ſin.} \Phi.$$

Sicque omnino tres nacti ſumus aequationes, ex quibus totum globi motum determinari oportet; tot vero aequationibus vtique eſt opus, quandoquidem tres habemus incognitas ad quodvis tempus definiendas, ſcilicet ſpatium $s$ cum angulo Φ, atque inſuper ipſam preſſionem Π.

§. 8. Primo igitur ex noſtris aequationibus preſſionem Π elidamus, cuius valor, cum ex ſecunda aequatione ſit $= P + \frac{P\partial\partial y}{2g\partial t^2}$, in binis reliquis ſubſtitutus praebebit ſequentes duas aequationes:

$$\text{I. } \frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = -\lambda - \frac{\lambda\partial\partial y}{2g\partial t^2} \text{ et}$$

$$\text{II. } \frac{kk\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = (a\lambda - \lambda c \text{ coſ.}\Phi - c \text{ ſin.}\Phi)\left(1 + \frac{\partial\partial y}{2g\partial t^2}\right),$$

in quibus ſi loco $x$ et $y$ valores ſupra dati ſubſtituantur, eae ad ſequentes formas reducentur:

$$\text{I. } \frac{\partial\partial s - c\partial\partial\Phi \text{ coſ.}\Phi + c\partial\Phi^2 \text{ ſin.}\Phi + \lambda c\partial\partial\Phi \text{ ſin.}\Phi + \lambda c\partial\Phi^2 \text{ coſ.}\Phi}{2g\partial t^2} = -\lambda \text{ et}$$

$$\text{II. } \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\partial\Phi(kk - \lambda a c \text{ ſin.}\Phi + \lambda c c \text{ ſin.}\Phi \text{ coſ.}\Phi + c c \text{ ſin.}\Phi^2)}{2g\partial t^2} \\ + \partial\Phi^2 \frac{(\lambda c c \text{ coſ.}\Phi^2 + c c \text{ ſin.}\Phi \text{ coſ.}\Phi - \lambda a c \text{ coſ.}\Phi)}{2g\partial t^2} \end{array}\right\}$$

$$= \lambda a - \lambda c \text{ coſ.}\Phi - c \text{ ſin.}\Phi,$$

vbi igitur tantum duae variabiles $s$ et Φ praeter tempus $t$ inſunt,

ſunt. Verum hinc praeterea nihil plane concludere licet, niſi ex ipſis motus circumſtantiis iam ante conſtet, quonam valore pro littera λ vti oporteat.

§. 9. Interim tamen ſi ex his duabus aequationibus littera λ penitus eliminaretur, vtique reſultaret vna aequatio, quae ad omnes plane caſus aequaliter eſſet adcommodata; at vero iſta eliminatio multo commodius in ipſis tribus aequationibus principalibus ſequenti modo inſtitui poteſt. Multiplicetur prima aequatio per $y = a - c \text{ coſ.} \Phi$, ſecunda per $c \text{ ſin.} \Phi$, et ambo producta ad tertiam addantur: tum enim ambae litterae λ et Π ſimul ex calculo excludentur. Hoc autem pacto prodibit ſequens aequatio:

$$\frac{y \partial \partial x + c \partial \partial y \text{ ſin.} \Phi + k k \partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = - c \text{ ſin.} \Phi.$$

Quod ſi ergo hic loco $x$ et $y$ valores ſupra datos ſcribamus, iſta prodit aequatio:

$$\partial \partial s (a - c \text{ coſ.} \Phi) + \partial \partial \Phi (c c - a c \text{ coſ.} \Phi + k k) + a c \partial \Phi^2 \text{ ſin.} \Phi = - 2 g c \partial t^2 \text{ ſin.} \Phi.$$

Quoniam hic autem tres adhuc inſunt variabiles, nihil prorſus pro noſtro ſcopo concludi poteſt; quamobrem pleniorem ſolutionem pro caſibus particularibus tentemus.

## I. De motu noſtri globi remota omni frictione.

§. 10. Cum igitur hic vbique ſit $\lambda = 0$, prima aequatio initio inuenta ſtatim dat $\frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2} = 0$, vnde integrando fit $\frac{\partial x}{\partial t} = C$, quae formula declarat, centrum grauitatis globi G vniformiter ſecundum directionem horizontalem promoueri, cuius ergo celeritas ſi initio fuerit $= f$, habebitur $\frac{\partial x}{\partial t} = f$, ideoque $x = f t$, ſiquidem aſſumimus initio fuiſſe $x = 0$, id quod euenit

euenit ſi etiam angulus $\Phi$ initio euanuerit, ita vt recta CGA fuerit verticalis; hinc ergo habebimus $s = ft + c \text{ſin.}\Phi$. Deinde cum ex ſecunda aequatione fiat $\Pi = P + \frac{P \partial\partial y}{2g \partial t^2}$, ex tertia vero aequatione ſit $\frac{\Pi kk \partial\partial\Phi}{2g \partial t^2} = -\Pi c \text{ ſin. } \Phi$, reſultabit iſta aequatio:

$$\frac{kk \partial\partial\Phi}{2g \partial t^2} = -c \text{ ſin. } \Phi \left(1 + \frac{\partial\partial y}{2g \partial t^2}\right) \text{ ſiue}$$

$$kk \partial\partial\Phi + c \partial\partial y \text{ ſin. } \Phi = -2gc \partial t^2 \text{ ſin. } \Phi,$$

quae, loco $\partial\partial y$ reſtituto valore, abit in hanc:

$$kk\partial\partial\Phi + cc\partial\partial\Phi \text{ſin.}\Phi^2 + cc\partial\Phi^2 \text{ſin.}\Phi \text{coſ.}\Phi = -2gc\partial t^2 \text{ſin.}\Phi,$$

quae aequatio duas tantum continet variabiles, ſcilicet angulum $\Phi$ cum tempore $t$.

§. 11. In hac aequatione autem commode vſu venit, vt per $2\partial\Phi$ multiplicata integrabilis reddatur; reperietur autem eius integrale

$$kk \partial\Phi^2 + cc \partial\Phi^2 \text{ ſin. } \Phi^2 = 4g \partial t^2 (c \text{ coſ. } \Phi + \Gamma),$$

vnde colligimus $\frac{\partial\Phi^2}{\partial t^2} = \frac{4g(c \text{ coſ. } \Phi + \Gamma)}{kk + cc \text{ ſin. } \Phi^2}$; quae ergo formula exprimit quadratum celeritatis angularis. Quod ſi ergo celeritas angularis globo initio in ſenſum SAB impreſſa ponatur $= \zeta$, quoniam ſumimus initio fuiſſe $\Phi = 0$, pro conſtante $\Gamma$ definienda habebimus $\zeta\zeta = \frac{4g(c + \Gamma)}{kk}$, vnde fit $4g\Gamma = \zeta\zeta kk - 4gc$, quo valore ſubſtituto noſtra aequatio erit

$$\frac{\partial\Phi^2}{\partial t^2} = \frac{4gc \text{ coſ. } \Phi + \zeta\zeta kk - 4gc}{kk + cc \text{ ſin. } \Phi^2}.$$

§. 12. Conſideremus nunc vim viuam quam noſter globus in S habebit, cuius pars ex motu gyratorio oriunda eſt

$$\frac{Pkk \partial\Phi^2}{\partial t^2} = \frac{Pkk(4gc \text{ coſ.}\Phi + \zeta\zeta kk - 4gc)}{kk + cc \text{ ſin. } \Phi^2};$$

pars vero ex motu progreſſiuo centri grauitatis oriunda eſt

$P\left(\frac{\partial x^2}{\partial t^2}+\frac{\partial y^2}{\partial t^2}\right)$. Vidimus autem eſſe $\frac{\partial x}{\partial t}=f$, et ob $\partial y=c\,\partial\Phi$ ſin. $\Phi$ erit

$$\frac{\partial y^2}{\partial t^2}=\frac{\partial\Phi^2}{\partial t^2}\,c\,c\,\text{ſin.}\,\Phi^2=\frac{(4g\,c\,\text{coſ.}\,\Phi+\zeta\zeta\,k\,k-4g\,c)\,c\,c\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{k\,k+c\,c\,\text{ſin.}\,\Phi^2}.$$

Hinc igitur tota vis viua erit

$$P\left(ff+\frac{\partial\Phi^2}{\partial t^2}\,k\,k+c\,c\,\text{ſin.}\,\Phi^2\right)$$

$$=P\,(ff+4g\,c\,\text{coſ.}\,\Phi+\zeta\zeta\,k\,k-4g\,c);$$

quae ergo ita exprimi poteſt

$$P\,(ff+\zeta\zeta\,k\,k-4g\,c\,(1-\text{coſ.}\,\Phi)),$$

vbi $P\,(ff+\zeta\zeta\,k\,k)$ exprimit vim viuam globo initio impreſſam, quae ergo deinceps diminuitur, prouti centrum grauitatis G aſcendit. Eſt enim $c\,(1-\text{coſ.}\,\Phi)$ ſpatium, per quod centrum grauitatis hactenus aſcendit, quandoquidem initio centrum grauitatis infimum locum tenuiſſe aſſumimus.

§. 13. Ad totum autem huius globi motum cognoſcendum requiritur, vt aequatio differentialis eruta denuo integretur. Cum igitur fuiſſet

$$\frac{\partial\Phi^2}{\partial t^2}\,(kk+cc\,\text{ſin.}\,\Phi^2)=\zeta\zeta kk-4gc\,(1-\text{coſ.}\,\Phi),$$

radice quadrata hinc extracta colligitur

$$\partial t=\frac{\partial\Phi\,\sqrt{(k\,k+c\,c\,\text{ſin.}\,\Phi^2)}}{\sqrt{(\zeta\zeta\,k\,k-4g\,c\,(1-\text{coſ.}\,\Phi))}},$$

haec autem formula ita eſt comparata, vt in genere neutiquam integrationem admittat, neque aliter niſi per approximationes inueniri queat, cuius tamen reſolutio facillima eſſet, ſi foret $c=0$, quippe quo caſu centrum grauitatis in ipſum globi centrum incideret; tum enim foret $\partial t=\frac{\partial\Phi}{\zeta}$, ſiue $\partial\Phi=\zeta\,\partial t$ et $\Phi=\zeta\,t$, vnde manifeſtum eſt, globi motum fore aequabilem tam ratione motus progreſſiui quam gyratorii.

Caſus

## Caſus I.

§. 14. Pro noſtro autem caſu vnica datur conditio, qua poſtremam formulam more ſolito tractare licet, ſcilicet, quando motus impreſſus ita eſt comparatus, vt angulus $\Phi$ perpetuo quam minimus maneat, ad quod neceſſe eſt, vt etiam celeritas angularis initialis ſit infinite quaſi parua. Quoniam igitur tum erit $\sin.\Phi = \Phi$ et $\cos.\Phi = 1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$, poſtrema noſtra aequatio induet hanc formam: $\partial t = \frac{\partial\Phi\sqrt{(kk + cc\Phi\Phi)}}{\sqrt{(\zeta\zeta kk - 2gc\Phi\Phi)}}$, vbi in numeratore particula $cc\Phi\Phi$ prae $kk$ negligi tuto poteſt, ita vt ſit $\partial t = \frac{k\partial\Phi}{\sqrt{(\zeta\zeta kk - 2gc\Phi\Phi)}}$, quae, poſito $2gc = nnkk$, praebet $\partial t = \frac{\partial\Phi}{\sqrt{(\zeta\zeta - nn\Phi\Phi)}}$, cuius integrale eſt $t = \frac{1}{n}\,\mathrm{A}\,\sin.\frac{n\Phi}{\zeta}$, vnde conuertendo fit $\frac{n\Phi}{\zeta} = \sin.\, nt$, ſiue $\frac{\Phi\sqrt{2gc}}{\zeta k} = \sin.\, t\frac{\sqrt{2gc}}{k}$, ideoque $\Phi = \frac{\zeta k}{\sqrt{2gc}}\sin.\, t\frac{\sqrt{2gc}}{k}$.

§. 15. Hoc ſcilicet integrale ita eſt ſumtum, vt initio quo erat $t = 0$, etiam angulus $\Phi$ euaneſcat; hoc igitur caſu patet, quoniam ſinus angulorum non vltra $\pm 1$ increſcere poſſunt, angulum noſtrum $\Phi$ ad ſummum euadere poſſe $\pm\frac{\zeta k}{\sqrt{2gc}}$, vnde cum $\zeta$ per hypotheſin ſit quaſi infinite parua, globus vltro citroque circa ſitum initialem excurſiones quam minimas abſoluet, quem motum olim vacillatorium vocaui eumque determinaui. Ex praeſenti autem formula cum initio fuiſſet $\Phi = 0$, ad eundem valorem reuertetur quoties fuerit $\sin.\frac{t\sqrt{2gc}}{k} = 0$. Quod ſi ergo ſtatuamus $\frac{t\sqrt{2gc}}{k} = 180° = \pi$, fiet $t = \frac{k\pi}{\sqrt{2gc}}$, hocque tempore ſingulae oſcillationes ſeu vacillationes abſoluentur; neque vero hic motus progreſſiuus, quo centrum grauitatis G moueri aſſumſimus, aliquid turbat in iſto motu vacillatorio.

Caſus

## Caſus II.

§. 16. Praeterea vero datur adhuc alius caſus, quo calculum euoluere licet, qui locum habet, ſi interuallum C fuerit quam minimum, ſiue centrum grauitatis G valde parum a centro globi C diſtet; tum enim loco formulae $\surd(kk + cc\,\text{ſin.}\,\Phi^2)$ ſcribere licebit $k + \frac{cc}{2k}\,\text{ſin.}\,\Phi^2$, ita vt habeamus

$$\partial t = \frac{\partial \Phi}{\surd(\zeta\zeta kk - 4gc(1 - \text{coſ.}\,\Phi))}\left(k + \frac{cc}{2k}\,\text{ſin.}\,\Phi^2\right).$$

Iam vt etiam denominator tractabilis reddatur, ſumatur $\zeta$ ita, vt ſit $\zeta\zeta kk = 8gc$, ideoque $\zeta = \frac{\surd 8gc}{k}$, quae eſt celeritas angularis globo initio impreſſa, tum igitur fiet

$$\surd(\zeta\zeta kk - 4gc(1 - \text{coſ.}\Phi)) = \surd(4gc(1 + \text{coſ.}\Phi)) = \text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi\surd 8gc.$$

Hoc igitur modo habebimus hanc aequationem:

$$\partial t\surd 8gc = \frac{\partial \Phi}{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi}\left(k + \frac{cc}{2k}\,\text{ſin.}\,\Phi^2\right),$$

quae iam ab omni irrationalitate eſt liberata.

§. 17. Ad hanc aequationem commodius tractandam ſtatuatur $\frac{1}{2}\Phi = 90° - \omega$, vt ſit $\Phi = 180° - 2\omega$ et

$$\text{ſin.}\,\Phi = \text{ſin.}\,2\omega = 2\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega,$$

hincque nanciſcemur hanc formulam integrandam:

$$\partial t\surd 8gc = -\frac{2\partial\omega}{\text{ſin.}\,\omega}\left(k + \frac{2cc}{k}\,\text{ſin.}\,\omega^2\,\text{coſ.}\,\omega^2\right), \text{ ſiue}$$

$$\partial t\surd 2gc = -\frac{k\partial\omega}{\text{ſin.}\,\omega} - \frac{2cc}{k}\partial\omega\,\text{ſin.}\,\omega^2\,\text{coſ.}\,\omega^2,$$

cuius integrale colligitur:

$$t\surd 2gc = C - k\,l\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega + \frac{2cc}{3k}\,\text{coſ.}\,\omega^3;$$

vbi ad conſtantem determinandam meminiſſe neceſſe eſt, initio quo $t = 0$, fuiſſe etiam $\Phi = 0$, ideoque $\omega = 90°$, vnde $C = 0$, ita vt noſtra aequatio finalis ſit

$t\surd 2gc$

$$t\sqrt{2gc} = \frac{2cc}{3kk}\,\text{coſ.}\,\omega^3 - k\,l\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega,$$

vnde pro quouis angulo $\omega = 90° - \frac{1}{2}\Phi$ tempus $t$ facile aſſignare poterimus, quo elapſo globus ſeſe per hunc angulum $\Phi$ conuertit.

§. 18. Hinc autem patet, angulum $\omega$ nunquam tantum fieri poſſe, vt tangens eius ſemiſſis euadat negatiua, quia alioquin tota expreſſio prodiret imaginaria; quare cum initio fuerit $\Phi = 0$ et $\omega = 90°$, deinde vero angulus $\Phi$ creſcere ſupponatur, angulus $\omega$ continuo decreſcet. Ponamus igitur fieri $\omega = 0$, ſiue $\Phi = 180°$, tempus ad hoc requiſitum euadit infinitum, ex quo diſcimus, angulum $\Phi$ nunquam vsque ad 180° augeri poſſe, ſiue globus nunquam eo vsque ſe conuertet, vt centrum grauitatis G ſupra centrum globi C verticaliter immineat: continuo autem propius ad hunc terminum eleuabitur. Quaeramus v. g. tempus, quo centrum grauitatis G per angulum rectum aſcendit, vt ſit $\Phi = 90°$, ideoque $\omega = 45°$ et $\frac{1}{2}\omega = 22°.30'$ cuius tangens $= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2} - 1$, hinc igitur fiet

$$t\sqrt{2gc} = \frac{cc}{3kk\sqrt{2}} - k\,l\,(1 + \sqrt{2}),$$

ex qua formula tempus $t$ in minutis ſecundis expreſſum innoteſcet.

§. 19. Hic igitur caſus prorſus ſingularis ſub his conditionibus locum habere poteſt. 1°) Si interuallum $CG = c$ fuerit tam exiguum, vt $cc$ prae $kk$ quaſi euaneſcat. 2°) Si celeritas angularis globo initio impreſſa, vbi recta CGA erat verticalis, fuerit $\frac{\sqrt{8gc}}{k} = \frac{2\sqrt{2gc}}{k}$; tum enim ſi elapſo tempore $= t$, angulus motu gyratorio confectus $ACS = \Phi$, ob $\omega = 90° - \frac{1}{2}\Phi$, habebitur iſta aequatio:

$$t\sqrt{2gc} = \frac{2cc}{3kk}\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^3 - k\,l\,\text{tang.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{4}\Phi)\ \text{ſiue}$$

$$t\sqrt{2gc} = k\,l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{4}\Phi) + \frac{2cc}{3kk}\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^3);$$

quo ergo motu angulus $\Phi$ quidem continuo augetur, ſed demum poſt tempus infinitum vsque ad 180° excreſcere poteſt. Interea autem dum globus hoc motu gyratorio cietur, ſimul motu quocunque progreſſiuo ferri poteſt, quo ſcilicet centrum C vniformiter ſecundum directionem horizontalem progrediatur, quandoquidem inuenimus $\frac{\partial x}{\partial t} = f$. Neque vero idcirco ipſum centrum grauitatis G in linea recta mouebitur, ſed ob motum gyratorium continuo magis aſcendit; nunquam autem ad altitudinem $a + c$ pertinget.

§. 20. In hoc caſu aſſumſimus, celeritatem angularem initio fuiſſe $\zeta = \frac{2\sqrt{2gc}}{k}$, ideoque ſatis paruam ob $c$ quam minimum prae $k$. At ſi iſta celeritas multo maior accipiatur, vt quantitas $4gc$ prae $\zeta\zeta kk$ quaſi euaneſcat, tum etiam reſolutio analytica ſuccedet.

## Caſus III.

§. 21. Sit igitur $\zeta\zeta kk = nn \cdot 4gc$ ita vt $n$ ſit numerus praegrandis; ac denominator noſtrae formulae principalis euadet $\sqrt{\zeta\zeta kk - 4gc(1 - \text{coſ.}\,\Phi)}$

$$= 2\sqrt{gc(nn - (1 - \text{coſ.}\,\Phi))} = 2\sqrt{gc(nn - 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2)},$$

vbi notetur eſſe $\zeta = \frac{2n}{k}\sqrt{gc}$. Hinc igitur noſtra aequatio erit

$$2\partial t\sqrt{gc} = \frac{\partial\Phi}{\sqrt{(nn - 2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2)}}\left(k + \frac{cc}{2k}\,\text{ſin.}\,\Phi^2\right):$$

adhuc enim ſupponimus eſſe $cc$ prae $kk$ infinite paruum, vbi, quia $n$ eſt numerus praegrandis, erit ſatis exacte

$\frac{1}{\sqrt{(nn - 2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2)}} = \frac{1}{n} + \frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}{n^3}$, quo valore adhibito erit

$$2n\,\partial t\sqrt{gc} = \partial\Phi\,(k + \frac{cc}{2k}\,\text{ſin.}\,\Phi^2)\left(1 + \frac{\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}{nn}\right)$$
$$= \partial\Phi\,(k + \frac{cc}{2k}\,\text{ſin.}\,\Phi^2 + \frac{k}{nn}\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2),$$

neglecto ſcilicet termino $\frac{cc}{2nnk}\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi^2$ ob duplicem paruitatem.

§. 22. Poſtquam igitur formulam noſtram ita euoluimus, integratio nulla amplius laborat difficultate; quoniam nouimus eſſe

$$\int\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2 = \int\frac{\partial\Phi}{2}(1 - \text{coſ.}\,2\Phi) = \tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,2\Phi,$$

ſimilique modo

$$\int\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2 = \int\frac{\partial\Phi}{2}(1 - \text{coſ.}\,\Phi) = \tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

obtinebimus integrando

$$2nt\sqrt{gc} = k\Phi + \frac{cc}{2k}(\tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{4}\,\text{ſin.}\,2\Phi) + \frac{k}{nn}(\tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$= \Phi\,(k + \frac{cc}{4k} + \frac{k}{2nn}) - \frac{cc}{8k}\,\text{ſin.}\,2\Phi - \frac{k}{2nn}\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

ex qua aequatione pro quouis angulo $\Phi$ tempus reſpondens $t$ facile definitur. At ſi ad quoduis tempus $t$ angulus $\Phi$ deſideretur, ea reductione eſt vtendum, qua in theoria planetarum anomalia vera ex media definiri ſolet. Hic igitur patet globum quotcunque reuolutiones integras abſoluere poſſe, quoniam nihil impedit quominus angulus $\Phi$ in infinitum augeatur, ſimul vero ſemper cum hoc motu iunctus eſſe poterit motus horizontalis quicunque vniformis. Ita ſi tempus deſideremus, quo vna reuolutio integra abſoluitur, ſtatuatur $\Phi = 360° = 2\pi$, atque reperietur $t = \frac{\pi}{n\sqrt{gc}}(k + \frac{cc}{4k} + \frac{k}{2nn})$, at-

 que

que adeo ſemiſſe huius temporis dimidias reuolutiones abſolvet, quia poſito $\Phi = \pi$, etiam ambo poſteriores termini euaneſcent.

§. 23. Quanquam centrum globi C eandem ſemper a plano horizontali ſeruat diſtantiam, et in linea recta progreditur, eius tamen motus non erit vniformis, quoniam celeritas horizontalis centri grauitatis perpetuo manet eadem; interea autem centrum grauitatis G circa C ſimili fere modo reuoluetur, quo planetae circa ſolem in orbitis ſuis circumferuntur; in quo motu profundiſſimus ſitus puncti G perihelio, altiſſimus vero aphelio reſpondet. Primum enim membrum formulae noſtrae pro tempore $t$ inuentae angulum $\Phi$ continens motum medium repraeſentabit, ambo vero membra ſequentia inaequalitates continent, et quaſi excentricitatem inuoluunt. Hinc etiam caſus praecedens, quo tempus vnius reuolutionis erat infinitum, motui cometae in Parabola ſimilis erit cenſendus.

## II. De prouolutione perfecta noſtri globi accedente frictione.

§. 24. Supra iam vidimus ad prouolutionem perfectam requiri, vt perpetuo ſit $\partial s = a \partial \Phi$; quam ob cauſſam in noſtris aequationibus ſtatim ſtatuamus $\partial s = a \partial \Phi$, atque eliminata preſſione Π videndum eſt, quantum valorem littera λ ſit adeptura; quamdiu enim iſte valor non ſuperabit $\frac{1}{3}$, tamdiu prouolutio perfecta locum habere poterit. Commodiſſime autem iſte valor λ colligetur, ſi aequatio tertia per primam diuidatur, tum enim prodibit

$$\frac{k k \partial \partial \Phi}{\partial \partial x} = -a + c \operatorname{coſ.} \Phi + \frac{c}{\lambda} \operatorname{ſin.} \Phi,$$

vbi ſi loco $\partial \partial x$ eius valor ſupra aſſignatus ſubſtituatur, propter $\partial \partial s = a \partial \partial \Phi$, habebimus:

*k k*

$$\frac{kk\partial\partial\Phi}{a\partial\partial\Phi-c\partial\partial\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi+c\partial\Phi^2\,\mathrm{fin.}\,\Phi}=-a+c\,\mathrm{cof.}\,\Phi+\frac{c}{\lambda}\,\mathrm{fin.}\,\Phi,$$

ex qua aequatione faciliime iudicium circa litteram λ petetur.

§. 25. Pro motu autem ipſo determinando vtamur ea aequatione, quam ſupra, vbi ambas quantitates Π et λ ſimul exterminauimus, ſumus adepti, quae ponendo $\partial\partial s=a\partial\partial\Phi$ erat

$$a\partial\partial\Phi(a-c\,\mathrm{cof.}\,\Phi)+\partial\partial\Phi(cc-ac\,\mathrm{cof.}\,\Phi+kk)$$
$$+ac\partial\Phi^2\,\mathrm{fin.}\,\Phi=-2cg\partial t^2\,\mathrm{fin.}\,\Phi,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(aa+cc+kk)\partial\partial\Phi-2ac\partial\partial\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi+ac\partial\Phi^2\,\mathrm{fin.}\,\Phi$$
$$=-2cg\partial t^2\,\mathrm{fin.}\,\Phi,$$

quae per $2\partial\Phi$ multiplicata ſponte fit integrabilis, integrale enim erit

$$(aa+cc+kk)\partial\Phi^2-2ac\partial\Phi^2\,\mathrm{cof.}\,\Phi=4g\partial t^2(C+c\,\mathrm{cof.}\,\Phi),$$

vbi conſtantem C ex circumſtantiis quas conſideratio frictionis ſuppeditabit, determinari conueniet.

§. 26. Nunc igitur iudicium circa litteram λ inſtituamus, vbi ante omnia loco $\partial\partial\Phi$ eius valorem per differentialia primi gradus ſubſtituamus, qui ex praecedenti aequatione prodit

$$\partial\partial\Phi=\frac{-(2gc\partial t^2+ac\partial\Phi^2)\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{aa+cc+kk-2ac\,\mathrm{cof.}\,\Phi},$$

vbi ſi loco $2g\partial t^2$ ſcribatur valor ex aequatione integrata, reperiemus:

$$\partial\partial\Phi=\frac{-c\partial\Phi^2\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{2(C+c\,\mathrm{cof.}\,\Phi)}-\frac{ac\partial\Phi^2\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{aa+cc+kk-2ac\,\mathrm{cof.}\,\Phi},\ \text{vnde fit}$$

$$a\partial\partial\Phi-c\partial\partial\Phi\,\mathrm{cof.}\,\Phi+c\partial\Phi^2\,\mathrm{fin.}\,\Phi$$
$$=\frac{c\partial\Phi^2\,\mathrm{fin.}\,\Phi(2C+3c\,\mathrm{cof.}\,\Phi-a)}{2C+2c\,\mathrm{cof.}\,\Phi}-\frac{ac(a-c\,\mathrm{cof.}\,\Phi)\partial\Phi^2\,\mathrm{fin.}\,\Phi}{ac+cc-kk-2ac\,\mathrm{cof.}\,\Phi};$$

 hinc

hinc pro aequatione §. 24. allata membrum ad ſiniſtram partem ſequentem induet formam

$$\frac{-\frac{c\,k\,k\,\text{ſin.}\,\Phi}{a\,(C+c\,\text{coſ.}\,\Phi)}-\frac{a\,c\,k\,k\,\text{ſin.}\,\Phi}{a\,a+c\,c+k\,k-2\,a\,c\,\text{coſ.}\,\Phi}}{\frac{c\,\text{ſin.}\,\Phi\,(a\,C+3\,c\,\text{coſ.}\,\Phi-a)}{2\,C+2\,c\,\text{coſ.}\,\Phi}-\frac{a\,c\,(a-c\,\text{coſ.}\,\Phi)\,\text{ſin.}\,\Phi}{a\,a+c\,c+k\,k-2\,a\,c\,\text{coſ.}\,\Phi}} \text{ ſiue}$$

$$-\frac{c\,k\,k\,\text{ſin.}\,\Phi\,(a\,a+c\,c+k\,k-2\,a\,c\,\text{coſ.}\,\Phi)-2\,(C+c\,\text{coſ.}\,\Phi)\,a\,c\,k\,k\,\text{ſin.}\,\Phi}{c\,\text{ſin.}\,\Phi\,(2\,C+3\,c\,\text{coſ.}\,\Phi-a)\,(a\,a+c\,c+k\,k-2\,a\,c\,\text{coſ.}\,\Phi)-(2\,C+2\,c\,\text{coſ.}\,\Phi)\,a\,c\,(a-c\,\text{coſ.}\,\Phi)\,\text{ſin.}\,\Phi}$$

cui ergo fractioni aequari debet membrum ad dextram poſitum $-a+c\,\text{coſ.}\,\Phi+\frac{c}{\lambda}\,\text{ſin.}\,\Phi$; fractio autem illa reducitur ad hanc commodiorem:

$$-\frac{k\,k\,(a\,a+c\,c+k\,k+2\,a\,C)}{k\,k\,(3\,c\,\text{coſ.}\,\Phi+2\,C-a)+2\,C\,c\,(c-a\,\text{coſ.}\,\Phi)-a^3+3\,a\,a\,c\,\text{coſ.}\,\Phi-a\,c\,c\,(1+4\,\text{coſ.}\,\Phi^2)+2\,c^3\,\text{coſ.}\,\Phi}.$$

§. 27. Ponamus breuitatis gratia hanc fractionem $=S$, et aequatio pro diiudicando valore $\lambda$ erit $S+a-c\,\text{coſ.}\,\Phi=\frac{c}{\lambda}\,\text{ſin.}\,\Phi$, vnde fit $\lambda=\frac{c\,\text{ſin.}\,\Phi}{S+a-c\,\text{coſ.}\,\Phi}$; ex quo patet, ſi fiat vel $\Phi=0$ vel $\Phi=180°$, fore $\lambda=0$, quibus ergo caſibus nullum eſt periculum, quin frictio ſufficiat attritui impediendo. Examinari igitur conuenit caſus, quibus fit vel $\Phi=90°$ vel $\Phi=270°$; ſit igitur $\Phi=90°$ vt ſit $\text{coſ.}\,\Phi=0$, erit

$$S=-\frac{k\,k\,(a\,a+c\,c+k\,k+2\,a\,C)}{k\,k\,(2\,C-a)+2\,C\,c\,c-a^3-a\,c\,c} \text{ hincque } \lambda=\frac{c}{S+a};$$

altero vero caſu quo $\Phi=270°$ et $\text{ſin.}\,\Phi=-1$, fiet

$$S=-\frac{k\,k\,(a\,a+c\,c+k\,k+2\,a\,C)}{k\,k\,(2\,C-a)+2\,C\,c\,c-a^3-a\,c\,c} \text{ et } \lambda=-\frac{c}{S+a}.$$

Dummodo ergo conſtans C fuerit ita comparata, vt iſta formula $S+a$ maior euadat quam $3\,c$, prouolutio perfecta ſubſiſtere poterit. Quoniam vero vix alios caſus euoluere licet, niſi in quibus interuallum $c$ prae $a$ et $k$ fuerit quam minimum, neglectis altioribus ipſius $c$ poteſtatibus, habebimus pro poſtremis caſibus

$$S=-\frac{k\,k\,(a\,a+k\,k+2\,a\,C)}{k\,k\,(2\,C-a)-a^3},$$

hinc-

hincque $S + a = \frac{(aa + kk)^2}{a^3 - kk(2c - a)}$; quae formula ſi ponatur $= mc$, vt ſit $m > 3$, habebimus

$$C = \frac{mca^3 + mackk - (aa + kk)^2}{2mckk}$$

vel etiam commode vti licebit hac formula $\lambda = \frac{c(a^3 + akk - 2ckk)}{(aa + kk)^2}$, ex qua intelligitur niſi conſtans C praemagnam habeat quantitatem, hunc valorem nunquam terminum $\frac{1}{3}$ eſſe ſuperaturum, propterea quod $c$ ſupponitur quam minimum.

§. 28. Quod ſi ergo frictio ſufficit ad prouolutionem perfectam producendam, relatio inter angulum $\Phi$ et tempus $t$ hac exprimetur aequatione

$$\partial\Phi^2 (aa + cc + kk) - 2ac\partial\Phi^2 \operatorname{coſ.}\Phi = 4g\partial t^2 (c \operatorname{coſ.}\Phi + C),$$

vnde fit

$$2\partial t \sqrt{g} = \frac{\partial\Phi \sqrt{(aa + cc + kk - 2ac \operatorname{coſ.}\Phi)}}{\sqrt{(C + c \operatorname{coſ.}\Phi)}},$$

quae penitus diuerſa eſt ab ea, quam pro caſu vbi nulla adeſt frictio inuenimus, vnde patet a frictione, etſi quam minima, naturam motus penitus immutari. Neque tamen hanc aequationem reſoluere licet praeter eos caſus quos in ſectione praecedente tractauimus.

§. 29. Quo igitur hos duos caſus facilius inter ſe comparare queamus, ponamus hic vt ſupra fecimus, primo motus initio, vbi erat $t = 0$, fuiſſe etiam $\Phi = 0$; tum vero celeritatem angularem $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \zeta$, vnde, cum prouolutio perfecta poſtulet vt ſit $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{a\partial\Phi}{\partial t}$, neceſſe eſt vt initio fuerit $\frac{\partial s}{\partial t} = \zeta a$. Hinc igitur ad conſtantem C definiendam faciamus $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \zeta$ et $\Phi = 0$, vnde noſtra aequatio dabit:

$$\zeta\zeta(aa + cc + kk - 2ac) = \zeta\zeta((a - c)^2 + kk) = 4g(c + C)$$

vn-

vnde fit

$$4 g C = \zeta\zeta((a-c)^2 + kk) - 4 g c;$$

quo valore ſubſtituto erit in genere

$$\frac{\partial\Phi^2}{\partial t^2}(aa + cc + kk - 2ac\,\text{coſ.}\Phi)$$
$$= \zeta\zeta((a-c)^2 + kk) - 4gc(1 - \text{coſ.}\Phi)$$

vnde elicimus

$$\partial t = \frac{\partial\Phi\sqrt{(aa + cc + kk - 2ac\,\text{coſ.}\Phi)}}{\sqrt{[\zeta\zeta((a-c)^2 + kk) - 4gc(1 - \text{coſ.}\Phi)]}},$$

vbi notetur eſſe $a - c =$ diſtantiae centri grauitatis a ſuperficie globi.

## De motu vacillatorio.

§. 30. Ex hac aequatione primo deducamus motum vacillationis ſeu librationis, quo globus ſuper plano horizontali rotabit, poſtquam ipſi minima inclinatio fuerit impreſſa, ita vt initio celeritas angularis $\zeta$ fuerit quam minima et angulus $\Phi$ etiam quam minimus, hincque coſ. $\Phi = 1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$. Quo autem noſtram formulam magis contrahamus, ponamus breuitatis gratia $(a-c)^2 + kk = bb$, eritque $aa + cc + kk = bb + 2ac$, quo facto noſtra aequatio induet hanc formam:

$$\partial t = \frac{\partial\Phi\sqrt{(bb + ac\Phi\Phi)}}{\sqrt{(\zeta\zeta bb - 2gc\Phi\Phi)}}.$$

Reiiciamus igitur in numeratore terminum $ac\Phi\Phi$, et in denominatore ſtatuamus $2gc = nnbb$, vt obtineamus $\partial t = \frac{\partial\Phi}{\sqrt{(\zeta\zeta - nn\Phi\Phi)}}$, cuius integrale eſt

$$t = \frac{1}{n}\,\text{A ſin.}\,\frac{n\Phi}{\zeta} = \frac{b}{\sqrt{2gc}}\,\text{A ſin.}\,\frac{\Phi\sqrt{2gc}}{\zeta b},$$

ideoque $\Phi = \frac{\zeta b}{\sqrt{2gc}}\,\text{ſin.}\,\frac{t\sqrt{2gc}}{b}$; hinc igitur intelligimus globum ſuper plano horizontali omnino ſimili modo librationes peragere, quo pendula oſcillari ſolent; vbi tempus vnius librationis reperietur ponendo angulum $\frac{t\sqrt{2gc}}{b} = \pi$, vnde fit tempus

cuius-

cuiusque librationis $= \frac{\pi b}{\sqrt{2gc}}$. Cum igitur tempus vnius oſcillationis penduli ſimplicis, cuius longitudo $= l$, ſit $= \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$, longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum noſtris oſcillationibus erit $\frac{bb}{c}$, ideoque $l = \frac{(a-c)^2 + kk}{c}$. Supra autem, remota frictione, prodiiſſet longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{kk}{c}$.

§. 31. Ex hac ergo comparatione manifeſtum eſt, ob frictionem motum libratorium non mediocriter minui, idque in ratione $k : \sqrt{((a-c)^2 + kk)}$. Niſi ergo fuerit $a - c = 0$, quo caſu centrum grauitatis in ſuperficiem incideret, ob frictionem motus libratorius ſemper retardatur. Praeterea vero vtroque caſu oſcillationes eo erunt lentiores, quo propius centrum grauitatis G ad centrum globi C acceſſerit; ſi enim fiat interuallum $CG = c = 0$, vtroque caſu longitudo penduli ſimplicis fit infinita.

§. 32. Iſtae autem determinationes non ſolum ad globos adſtringuntur, ſed etiam ad omnis generis corpora, quae ſuper plano horizontali motum vacillatorium recipere valent, extendi poſſunt. Sit enim P R Q corpus quodcunque, quod ſuper plano horizontali I O inſtar cunarum motum reciprocum recipere valeat, ob baſin ſuam in puncto contactus R incuruatam; ſitque centrum huius curuaturae in C, ac ponatur altitudo $CR = a$; tum vero ſit G centrum grauitatis totius corporis, dum in ſtatu quietis verſatur, ac ponatur interuallum $CG = c$, vt ſit $GR = a - c$. Praeterea vero poſito huius corporis pondere $= P$, ſit eius momentum inertiae reſpectu axis per G tranſeuntis $= Pkk$, quippe circa quem axem corpus inter nutandum gyrari eſt cenſendum. Quibus poſitis, ſi nulla plane adeſſet frictio, tempus cuiusque vacillationis foret $= \frac{\pi k}{\sqrt{2gc}}$ ſec.; accedente autem frictione vel minima, hoc Tab. VII. Fig. 2.

tempus ſubito fiet $= \frac{\pi \surd ((a-c)^2 + kk)}{\surd 2 g c}$, atque hinc ea quae olim de talibus motibus ſum commentatus, neceſſariam illuſtrationem adipiſcuntur; vbi imprimis obſeruari oportet, ipſam frictionis quantitatem hic non in computum ingredi, atque eundem effectum eſſe proditurum, dummodo frictio non plane euaneſcat.

§. 33. Quod porro ad eos binos caſus attinet, quos ſupra remota omni frictione euoluimus, vbi interuallum $c$ quam minimum fuit aſſumtum, omnia motus phaenomena etiam accedente frictione ſimili quoque modo definientur; formulae enim huc pertinentes a ſuperioribus in hoc potiſſimum diſcrepabunt, quod hic loco quantitatis $k$ ſcribi oporteat $h = \surd((a-c)^2 + kk)$; quamobrem etiam iſti motus lentiores erunt quam caſu ſupra tractato. Haec igitur fere ſunt omnia quae circa huiusmodi motus globi heterogenei per calculum definire licet.

§. 34. Coronidis loco adiungam Theorema memoratu dignum circa triplicem motum oſcillatorium, quo corpora, qualia in §. 32. ſunt deſcripta, agitari poſſunt.

## Theorema.

Si habeatur corpus quodcunque P R Q, baſi circulari ſeu ſphaerica in R praeditum, cuius centrum ſit in C, et centrum grauitatis in G, eius vero maſſa ſeu pondus fuerit = P; in eo triplex motus oſcillatorius conſiderari poteſt: I°. Si hoc corpus circa axem horizontalem per C tranſeuntem more penduli libere oſcilletur; tum pendulum ſimplex iſochronum reperietur, ſi momentum inertiae huius corporis reſpectu axis C ſumtum diuidatur per productum P. C G. II°. Si idem corpus plano politiſſimo horizontali I O in R incumbens, vacillationes mi-

minimas peragat, ita vt nullam plane ſentiat frictionem; tum pendulum ſimplex iſochronum reperietur, ſi momentum inertiae reſpectu axis horizontalis per ipſum centrum grauitatis G tranſeuntis diuidatur per idem productum P. C G. III°. Si idem corpus plano horizontali I O vtcunque aſpero in R incumbens vacillationes abſoluat; tum longitudo penduli ſimplicis iſochroni reperietur, ſi momentum inertiae reſpectu puncti contactus R ſumtum per productum P in C G diuidatur.

Veritas huius Theorematis pro parte prima ex motu pendulorum eſt manifeſta: ſi enim ponatur interuallum C G $= c$, et momentum inertiae reſpectu centri grauitatis $= Pkk$, tum vero radius curuaturae C R $= a$, notum eſt fore longitudinem penduli ſimplicis iſochroni $l = \frac{cc+kk}{c}$; at pro caſu ſecundo ex ſupra traditis elucet fore $l = \frac{kk}{c}$; et pro caſu tertio $l = \frac{(a-c)^2+kk}{c}$.

# DISQVISITIO DE THEOREMATE QVODAM SINGVLARI CELEB. LAMBERTI, PRO AESTIMANDIS TEMPORIBVS, QVIBVS ARCVS SECTIONVM CONICARVM DESCRIBVNTVR A CORPORIBVS, QVAE AD ALTERVTRVM FOCVM ATTRAHVNTVR VIRIBVS RECIPROCE PROPORTIONALIBVS QVADRATIS DISTANTIARVM.

Auctore
*A. L. LEXELL.*

*Conuent. exhib. d.* 13. *Maii* 1784.

§. 1.

Cel. *Lamberti* liber qui inſcribitur *inſigniores orbitae Cometarum proprietates*, cum plurima admodum ſubtiliter et profunde cogitata circa motus corporum in Sectionibus Conicis contineat, tum praecipue pulcherrimo iſto Theoremate eminet, quo inſignis hic Geometra demonſtrauit: quod ſi in binis Ellipſibus, quae eundem habent axem maiorem, bini reſecentur arcus eum in modum, vt non modo cordae quae hos arcus ſubtendunt inter ſe aequales ſint, verum etiam vt ſummae rectarum a focis Ellipſium ad puncta extrema arcuum ductarum inter ſe aequentur; tum omnino fieri debere vt bini ſectores Elliptici circa focum deſcripti inter ſe teneant rationem ſub-

ſubduplam parametrorum principalium pro his Ellipſibus, vel quod eodem redit, vt hi ſectores ſint inter ſe, vti axes minores binarum Ellipſium: Dignitate autem huius Theorematis allectus, Illuſtris *de la Grange* operae pretium iudicauit, vt in IX. *Volumine Nou. Actor. Academiae Scientiarum Berolinenſis* oſtenderet, quomodo ex principiis calculi integralis iſtius Theorematis demonſtratio adornari poſſit. Hanc autem demonſtrationem expendenti mihi, quum iſta mox ſe obtulerit meditatio, eandem demonſtrationem paucis immutatis ad ſectores quoque hyperbolicos circa focos hyperbolarum deſcriptos adplicari poſſe, iſtud argumentum ex inſtituto tractare in animum induxi; vbi quidem primum ante omnia transformationem iſtam valde ingenioſam Cel. *Lamberti* methodo veteribus Geometris vſitata tractare conſtitui, quippe quum demonſtrationes a Cel. *Lambert* adornatae plerumque per calculum procedant, tum vero oſtendam quoque quomodo per Analyſin iſtud Theorema non modo pro Ellipſibus, verum etiam Hyperbolis demonſtratione firmari queat.

§. 2. Lemma I. *Si in Ellipſi* A H B, *axibus principalibus* A C, H C *et focis* F, f *deſcripta*, *ducatur corda quaecunque* N M, *qua per diametrum* C Q *in* G *biſecta*, *ſi ex foco* F *ducatur recta* F Q, *cordae* N M *in* E *occurrens*, *et producta intelligatur haec recta* F Q, *vsque dum diametro* C O *coniugatae ipſius* C Q, *in puncto* D *occurrat*: *erit* 1°. D Q = A C *ſemiaxi principali Ellipſeos*; 2°. F D = $\frac{1}{2}$ (f Q — F Q) *ſeu ſemidifferentiae rectarum ex focis* F, f *ad punctum* Q *ductarum*; 3°. $AC^2 - FD^2 = CO^2$. Per punctum Q ducta intelligatur F Q $\alpha$ tangens Ellipſin, quae igitur parallela erit ipſi cordae N M, tumque ex foco $f$ in iſtam tangentem demiſſa perpendiculari $f\alpha$, producantur rectae $f\alpha$, F Q vsque dum ſibi inuicem occurrant in I, eritque, vt ex proprietatibus Ellipſium conſtat, ang. I Q $\alpha$ = $\alpha$ Q $f$, Tab. IV. Fig. 1.

 hincque

hincque $\Delta\,\Delta\, I Q \alpha$, $Q \alpha f$ ſimilia et aequalia, quare $IQ = fQ$ et $FI = FQ + fQ = AB$. Iam ſi iungatur centrum Ellipſeos C cum puncto $\alpha$, linea recta $C\alpha$, ob $I\alpha = \alpha f$ et $FC = fC$, erit omnino parallela ipſi $FI$, et $C\alpha : FI = Cf : Ff = 1 : 2$, hinc $C\alpha = CA$. In parallelogrammo $Q\alpha CD$ erit igitur $QD = C\alpha = CA$. Tum vero ob $FQ = QD - FD$ et $FQ + Qf = 2QD$, fiet $fQ = QD + FD$ hincque $2FD = fQ - FQ$. Denique ob $FQ.fQ = QD^2 - FD^2$, quia eſt $FQ.fQ = CO^2$ (vide *Simſon Element: Section. Conicar. Lib. V. Prop. XXX.*), erit omnino

$$QD^2 - FD^2 = CO^2.$$

§. 3. Lemma II. *Eadem adhibita conſtructione ac ſupra, dico fore:*

$$\text{ſin. ang. } TQF : 1 = AC : OC.$$

Ducantur ex centro C et foco F normales ad tangentem $CU$, $F\beta$, tumque per punctum Q normalis $QV$ quae axi maiori in V, diametro vero coniugatae in X occurrit, tumque ex Q in axin maiorem demittatur perpendicularis $QR$. Iam quia in Elementis Section. Conicar. paſſim demonſtratur eſſe $CR : VR = CA^2 : CH^2$; hincque $CR : CV = CA^2 : CA^2 - CH^2 = CA^2 : CF^2$; tum vero quia eſt $CA : CR = CT : CA$, fit $CA^2 = CR.CT$, hincque $CR : CV = CR.CT : CF^2$, ex quo omnino colligitur $CV.CT = CF^2$, ſiue $CF : CV = CT : CF$. Hinc autem deducitur $CF : CF + CV = CT : CT + CF$, ſiue $CF : fV = CT : fT$, et alternando $CF : CT = fV : fT$, tumque $CT - CF : CT = fT - fV : fT$, id eſt $FT : CI$ $VT : fT$. Iam ob rectas $F\beta$, $VQ$, $CU$ et $f\alpha$ inter ſe parallelas, habebitur $F\beta : VQ = CU : f\alpha$, vnde $F\beta . f\alpha = VQ.CU$; at eſt $VQ.CU = CH^2$, (Conf. *Simſon Element. Section. Conic. Lib. V. Prop. XIII. Corol.*), erit proinde

inde $F\beta . f\alpha = CH^2$. Atqui eſt

$$\text{ſin. } TQF : 1 = F\beta : FQ = f\alpha : fQ, \text{ hincque}$$

$$\text{ſin. } TQF^2 : 1 = F\beta . f\alpha : FQ . fQ = CH^2 : CO^2.$$

Eadem autem affectio hunc quoque in modum demonſtratur: quia eſt $DC$ parallela ipſi $TQ$, fit ang. $TQF = QDC$, atqui eſt ſin. $QDC : 1 = QX : QD$. At per *Prop. XX. Lib. II. Element. Simſoni* eſt parallelogrammum contentum diametris coniugatis $QC$, $CO$ aequale rectangulo $AC . HC$. Atqui iſtud parallelogrammum aequatur rectangulo $QX . CO$, hincque omnino colligitur $QX . CO = CA . CH$, ideoque $QX : CA = CH : CO$, vnde fiet

$$\text{ſin. } TQD : 1 = CH : CO.$$

§. 4. Lemma. III. *In Ellipſi* $AHB$ *axibus* $CA$, $CH$ *deſcripta*, *ducantur a focis ad punctum eius quodcunque* $K$ *lineae rectae* $FK$, $fK$, *tumque ſi ex* $K$ *ad axem principalem ducatur perpendicularis* $KP$, *et* $K\varrho$ *normalis ad Ellipſin quae axi in* $\varrho$ *occurrit*, *ex* $\varrho$ *vero in* $FQ$ *perpendicularis ducatur* $\varrho\lambda$, erit Tab. IV. Fig. 2.

$$FK : F\varrho = FP : F\lambda = CA : CF.$$

Quia angulus $FKf$ in binas partes aequales ſecatur linea $K\varrho$ normali ad Ellipſin in $K$, erit $FK : fK = F\varrho : f\varrho$, hincque $FK : FK + fK = F\varrho : F\varrho + f\varrho$, et alternando $FK : F\varrho = FK + fK : F\varrho + f\varrho = CA : CF$. Et ob $\Delta KFP \sim \varrho F\lambda$, fit $FP : F\lambda = FK : F\varrho = CA : CF$. Iam quia vt in *Elementis Section. Conic. Simſoni Lib. V. Prop. XXXI.* demonſtratur, eſt $K\lambda . CA = CH^2$, hoc eſt $K\lambda$ aequalis parametro principali Ellipſeos, deducitur hinc per modum Corollarii

$$FK . CA = (K\lambda + F\lambda) CA = CH^2 + FP . FC;$$

tum autem ob $CH^2 = CA^2 - CF^2$, erit

$$FK . CA = CA^2 - CF^2 + FP . CF = CA^2 - CF . CP.$$

Iſta

Iſta autem proprietas ſequenti quoque ratione demonſtratur: quia eſt $fK^2 - FK^2 = fP^2 - FP^2$, erit quoque $(fK + FK)(fK - FK) = (fP + FP)(fP - FP)$, vnde colligitur $CA : CF = 2CP : fK - FK$, et quum ſit $CA(fK + FK) = 2CA^2$, erit omnino $CA(fK + FK) - CA(fK - FK) = 2CA^2 - 2CP.CF$; ideoque $CA.FK = CA^2 - CP.CF$ et $CA.fK = CA^2 + CP.CF$.

§. 5. Lemma IV. *Si in Ellipſi ducatur corda quaecunque* N M *cuius puncta extrema* N, M *cum foco* F *iungantur lineis rectis* F N, F M, *atque haec corda in* G *fuerit biſecta et per* G *ducatur* G P *normalis ad axin maiorem, iſtaque Ellipſi occurrat in puncto* K *et iungatur* F K; *erit* $2FK = FM + FN$. Ex punctis N, M in axem C A ducantur perpendiculares $NN'$, $MM'$, et iungatur FK, tum ob $NN'$, GP et $MM'$ parallelas inter ſe $N'P' = PM'$, quia eſt $NG = GM$, hincque colligitur $2FP = FM' - FN'$; at per Corollarium Lemmatis praecedentis eſt $FN.CA = CA^2 - CN'.CF$; $FK.CA = CA^2 - CP.CF$ et $FM.CA = CA^2 + CM'.CF$; hinc fiet $(FM + FN)CA = 2CA^2 + (CM' - CN')CF$. At eſt $CN' = CP + N'P$ et $CM' = PM' - CP$, vnde ob $N'P = M'P$, erit $CN' - CM' = 2CP$, hincque $(CN' - CM')CF = 2CP.CF$; erit itaque $(FM + FN)CA = 2CA^2 - (CN' - CM')CF = 2CA^2 - 2CP.CF = 2FK.CA$, et proinde $2FK = FM + FN$. Tum vero ſi ex punctis N, K et M ad Ellipſin ducantur normales $N\nu$, $K\varrho$, $M\mu$, quae axi maiori in $\nu$, $\varrho$, $\mu$ occurrent, eadem propoſitio hunc quoque in modum demonſtratur: ob $CN' - CM' = 2CP$ et $C\nu : CN' = C\varrho : CP = C\mu : CM'$, fiet quoque $C\nu - C\mu = 2C\varrho$, nec non $\nu\varrho = \varrho\mu$. Ex quo deinceps colligitur $F\mu + F\nu = 2F\varrho$, hinc vero ob $F\nu : FN = F\varrho : FK = F\mu : FM$, omnino concluditur $2FK = FM + FN$.

§. 6. His itaque praemiſſis Lemmatibus, nunc demonſtrationem Theorematis a Cel. *Lambert* propoſiti adgredi licebit. Si igitur in Ellipſi A Q B, ſemiaxibus principalibus C A, C H conſtructa, ſumatur punctum quoduis Q, atque ducatur ſemidiameter C Q, tangens Q T axi maiori in T occurrens, hincque tangenti parallela corda N M, tumque focus F iungatur cum puncto Q linea recta F Q, quae cordae N M in E occurrit, iſtaque recta F Q producta intelligatur vsque dum diametro coniugatae C O ipſis N M, T Q parallelae in D occurrat; iam ſi foco F, centro D et ſemiaxe maiori Q D deſcribatur ellipſis, eiusque ordinata ad axin maiorem per G ducatur $mn$, et iungantur F $m$, F $n$; dico fore 1°. E $m$ = E $n$ = G M; 2°. F $m$ = F $n$ = $\frac{1}{2}$(F M + F N); 3°. ſegmenta elliptica N Q M N et $n$ Q $m$ $n$ fore in ratione ſubdupla parametrorum principalium pro Ellipſibus A H B et Q $n$ $q$; et denique 4°. eandem quoque eſſe rationem triangulorum N F M, $n$F$m$. Per centrum D Ellipſeos Q $\gamma$ $q$ ductus intelligatur ſemiaxis minor D $\gamma$. Quum igitur ſit per Lemma I. Q D = C A et $FD^2 = CA^2 - OC^2$, at pro Ellipſi Q $\gamma$ $q$ habeatur $FD^2 = QD^2 - D\gamma^2$, fiet omnino $D\gamma = CO$. Porro ob N M parallelam ipſi C O, fit Q C : G C = Q D : E D, hincque $QC^2 - GC^2 : QC^2 = QD^2 - ED^2 : QD^2$; at in Ellipſi A H B eſt $GM^2 : CO^2 = QC^2 - GC^2 : QC^2$, et in Ellipſi Q $\gamma$ $q$ habetur $Em^2 : D\gamma^2 = QD^2 - ED^2 : QD^2$; quamobrem erit $GM^2 : CO^2 = Em^2 : D\gamma^2$, vnde ob $CO = D\gamma$, fit quoque E$m$ = G$m$. Nunc ſi ex Q in axin A B demittatur perpendicularis Q R et per punctum G perpendicularis G P, quae Ellipſi in puncto K occurrat et iungatur F K, erit per Lemma IV. F K = $\frac{1}{2}$(F M + F N). At per Lemmatis III. Corol. habemus F K . C A = $CA^2$ − C P . C F, ſimilique ratione F$m$. Q D = $QD^2$ − D E . D F. Iam quia eſt $fQ^2 - FQ^2 = fR^2 - FR^2$, fit $(fQ + FQ)(fQ - FQ) = 4QD . DF =$

 (ƒR

Tab. IV. Fig. 3.

($f$R + FR) ($f$R — FR) = 4FC . CR, hincque CF : DF = QD : CR; at ob QR parallelam ipſi GP eſt CR : CP = CQ : CG = DQ : DE ob NM parallelam ipſi CO, hinc alternando fit CR : DQ = CP : DE, proinde CF : DF = DE : CP, ideoque CP : CF = DE : DF et DQ . F$m$ = DQ² — DE . DF = CA² — CP . CF = FK . CA, proinde FK = F$m$, ideoque 2F$m$ = FM + FN. Tum quia pro ſegmentis Ellipticis NQMN, $n$Q$mn$ ordinatarum ratio eſt ea aequalitatis, erunt haec ſegmenta in ratione compoſita abſciſſarum QG, QE et ſinuum angulorum quos ordinatae NM, $nm$ cum diametris QC, QD conſtituunt, hoc eſt ſegment. $n$Q$mn$: ſegment. NQMN = QE : QG ſin. QGN = QE : QE ſin. QEG = 1 : ſin. QEG, quia in triangulo QEG eſt QE : QG = ſin. QGN : ſin. QEG; erit igitur ob 1 : ſin. QEG = 1 : ſin. QDC = CO : CH,

Tab. IV. Fig. 4. ſegment. $n$Q$mn$ : ſegment. NQMN = CO : CH.

Similique modo eſt triangulum $n$F$m$: triang. NFM = $nm$ . EF = NM . EF . ſin. NEF; nam ſi ex F in NM demiſſa intelligatur normalis FL erit

$$\triangle NFM = \tfrac{1}{2} NM . FL = \tfrac{1}{2} NM . EF . \text{ſin.} NEF,$$

ob FL : EF = ſin. NEF : 1; hinc colligitur quoque

$$\triangle nFm : \triangle NFM = 1 : \text{ſin.} NEF = CO : CH;$$

erit itaque ſector Ellipticus $n$Q$m$F ad ſectorem Ellipticum NQMF = CO : CH, ſeu vti ſemiaxes minores Ellipſium, quorum ratio eſt ſubdupla parametrorum principalium.

§. 7. Hac data occaſione haud praeter rem erit, vt animum aduertamus ad nonnullas egregias Sectionum Conicarum proprietates, quae cum ſupra inuentis affinitatis quodam vinculo iunguntur. Huiusmodi praecipue illa eſt proprietas, qua pro corda quacunque in Ellipſi ducta NM, ſi ex foco F ad

F ad puncta eius extrema ducantur lineae F M, F N, ratio ipſius N M ad F M — F N ſtatuitur data, modo nimirum angulus quem N M cum axe A B conſtituit ſupponitur datus. Hoc vero vt demonſtretur ſupponamus productam eſſe cordam M N vsque dum ordinatae C F per focum F ductae in K occurrat, tumque ex K in lineam F O, quae angulum N F M biſariam ſecat, ducatur normalis K r, quae rectas F M et F N in $m$, $n$ interſecat, et denique ex punctis M, N in C F ducantur perpendiculares M P, N Q. Iam vti demonſtraui *Actorum Academiae pro Anno* 1780, *pag.* 362, erit $Fm = Fn = FE$, tumque ex ibidem demonſtratis liquet eſſe $QN : Nn = PM : Mm$ in ratione data, ſeu vt $CA : CF$, hinc alternando erit $QN : PM = Nn : Mm$, ideoque etiam $KN : KM = Nn : Mm$, hincque $KN : NM = Nn : FM - FN$, ob $Mm - Nn = FM - FN$, tumque denuo alternando $NM : FM - FN = KN : Nn$; atqui $KN : QN = 1 : \sin. QKN$ et $QN : Nn = CA : CF$, quare per compoſitionem rationum erit $NM : FM - FN = CA : CF . \sin. QKN$. Introductis vero denominationibus pro fig. 3. adhibitis, fit Tab. IV. Fig. 5.

$$FM - FN : NM = FC \cos. QTC : CA = CF . \cos. FCO : CA.$$

At in triangulo F C D eſt $FD : CF = \sin. FCO : \sin. FDC$, at ſupra Lemm. II. vidimus eſſe $\sin. FDC : 1 = CH : CO$, fiet igitur $\sin. FCO : 1 = FD . CH : CF . CO$. Hinc autem colligitur

$$\cos. FCO^2 : 1 = CF^2 . CO^2 - DF^2 . CH^2 : CF^2 . CO^2;$$

ideoque

$$CF^2 \cos. FCO^2 : CA^2 = CF^2 . CO^2 - DF^2 . CH^2 : CA^2 . CO^2$$
$$= CO^2 - CH^2 : CO^2; \text{ quia}$$

$$(AC^2 - FC^2)\, CO^2 = (AC^2 - FD^2)\, CH^2 - HC^2 . CO^2,$$

ideoque $AC^2 (CO^2 - CH^2) = CF^2 . CO^2 - DF^2 . CH^2$.

Hinc ergo colligitur $FM - FN : NM = \sqrt{(CO^2 - CH^2)} : CO = \sqrt{(CF^2 - DF^2)} : CO$, ob $CO^2 + DF^2 = CF^2 + CH^2 = CA^2$.

§. 8. Quia vt ex Elementis Geometriae conſtat, eſt $MN^2 = FM^2 + FN^2 - 2FM.FN \cos. MFN$ et $MN^2 : MF^2 + FN^2 - 2FM.FN = CO^2 : CO^2 - CH^2$; fit $MN^2 : MN^2 - (FM - FN)^2 = MN^2 : FM.FN(1 - \cos. MFN) = CO^2 : HC^2$, hincque ob $1 - \cos. MFN = 2 \sin. \tfrac{1}{2} MFN^2$, erit

$$MN^2 : 4FM.FN.\sin. \tfrac{1}{2} MFN^2 = CO^2 : HC^2; \text{ vel}$$

$$MG^2 : FM.FN.\sin. \tfrac{1}{2} MFN^2 = CO^2 : HC^2.$$

Atqui ſupra demonſtrauimus eſſe duplam aream trianguli

$$NFM = 2GM.EF \sin. NEF,$$

et quum dupla haec area quoque ſit

$$FM.FN \sin. NFM = 2FM.FN \sin. \tfrac{1}{2} NFM \cos. \tfrac{1}{2} NFM,$$

colligitur omnino

$$FM.FN.\sin. \tfrac{1}{2} NFM.\cos. \tfrac{1}{2} NFM : GM.EF = \sin. NEF : 1 = CH : CO.$$

Hinc ſi iſta analogia

$$FM.FN.\sin. \tfrac{1}{2} NFM^2 : GM^2 = CH^2 : CO^2,$$

per hanc modo allatam diuidatur, prodit

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} NFM = \frac{GM.CH}{EF.CO};$$

hinc autem porro colligitur

$$FM.FN \cos. \tfrac{1}{2} MFN^2 = EF^2 \text{ et}$$

$$FM.FN = GM^2.\frac{HC^2}{CO^2} + EF^2,$$

quapropter erit $(FM + FN)^2 = (FM - FN)^2 + 4FM.FN = 4GM^2.\frac{(CO^2 - CH^2)}{CO^2} + 4GM^2.\frac{HC^2}{CO^2} + 4EF^2 = 4GM^2 + 4EF^2 = 4Fm^2$, ideoque $FM + FN = 2Fm$, quod ſupra iam alia quoque ratione euictum dedimus. Tum denique habetur

FM

$$FM^2 + FN^2 = 4MG^2 + 2EF^2 - 2GM^2 \cdot \frac{cH^2}{cO^2}.$$

Iam ſi puncta F et G iungantur linea recta F G, liquet eſſe $FM^2 + FN^2 = 2GM^2 + 2FG^2$, hincque colligitur $FG^2 = EF^2 + GM^2 \frac{(cO^2 - cH^2)}{cO^2}$, vnde ſtatim deducitur

$$4(FG^2 - FE^2) = (MF - NF)^2,$$

quae proprietas omnino attentione digna videtur.

§. 9. Quoniam demonſtratio Theorematis a Cel. *Lambert* propoſiti in ſuperioribus adornata ad eum caſum reſtricta eſt, quo pro altero ſectore Elliptico $n\,Q\,m\,F$, corda $n\,m$ per ipſum axem maiorem D Q biſecatur ipſique eſt ordinatim applicata, nunc quidem operae pretium videtur vt hoc Theorema aliquanto generalius tractemus. Sint igitur binae Ellipſes A N Q B, $a\,n\,q\,b$, quarum axes maiores A B, $a\,b$ inter ſe aequales, tum in his Ellipſibus ducantur binae cordae N M et $n\,m$ eum in modum vt non ſolum inter ſe ſint aequales, ſed etiam vt ſummae linearum rectarum ex focis F, $f$ ductarum ad puncta extrema harum cordarum inter ſe aequentur, hoc eſt vt ſit $FM + FN = fm + fn$; erit ſector Ellipticus N Q M F ad ſectorem Ellipticum $n\,q\,m\,f$ vt ſemiaxis minor prioris Ellipſis ad illum poſterioris, ſeu vt $CH : ch$: Ponamus igitur cordas N M, $n\,m$ in G et $g$ eſſe biſectas et ductis Diametris C Q, $c\,q$, quae his cordis in G, $g$ occurrunt, iungantur F Q, $f\,q$, quae cordis iſtis N M, $n\,m$ in E et $e$ occurrant, diametris autem coniugatis ipſarum C Q, $c\,q$, id eſt ipſis C O, $c\,o$ in punctis D, $\partial$; tum vero per puncta Q, $q$, G, $g$ ducantur perpendiculares ad axes maiores Q R, $q\,r$, K P, $k\,p$ et iungantur F K, $f\,k$. Quia igitur per Lemma IV. eſt $2FK = FM + FN$ et $2fk = fm + fn$, ob $FM + FN = fm + fn$, fit quoque $FK = fk$, atqui per Corol. Lemmatis III. eſt $CA \cdot FK = CA^2 - CP \cdot CF$ et $ca \cdot fk =$ Fig. 8. Tab. IV. Fig. 6. N. 1. 2.

$ca^2 - cp \cdot cf$, vnde ob $ca = CA$, omnino concluditur fore $CP \cdot CF = cp \cdot cf$. At ob $QR$ parallelam ipſi $GP$ et $qr$ parallelam ipſi $gp$ fit

$$CR : CP = CG : CQ = DQ : DE \text{ et}$$

$$DF : CR = CF : DQ,$$

quorum poſterius demonſtratur vti §. 6. factum eſt, erit igitur ex aequo perturbate $DF : CP = CF : DE$, vnde colligitur $DF \cdot DE = CP \cdot CF$, et quum ſimili ratione fiat $cp \cdot cf = \partial f \cdot \partial e$, erit omnino $DF \cdot DE = \partial f \cdot \partial e$. Tum vero quum ſit

$$GM^2 : CO^2 = QC^2 - GC^2 : QC^2 = QD^2 - DE^2 : QD^2,$$

et ſimili modo

$$gm^2 : co^2 = qc^2 - gc^2 : qc^2 = q\partial^2 - \partial e^2 : q\partial^2,$$

ob $GM = gm$ et $QD = q\partial$ erit $CO^2 (QD^2 - DE^2) = co^2 (q\partial^2 - \partial e^2)$; hinc quum per Lemma I. ſit $CO^2 = QD^2 - DF^2$ et $co^2 = q\partial^2 - \partial f^2$, ob $DF \cdot DE = \partial f \cdot \partial e$, fit quoque $DE^2 + DF^2 = \partial e^2 + \partial f^2$, vnde demum concluditur eſſe $DF = \partial f$; $DE = \partial e$; et $CO = co$. Pro ſegmentis autem Ellipticis $NQMN$, $nqmn$ quum ordinatarum ratio ſit ea aequalitatis, erunt iſta ſegmenta in ratione compoſita abſciſſarum $QG$, $qg$, et ſinuum ang. $QGE$, $qge$, ideoque etiam vt producta $QE$ ſin. $QEG$, $qe$ ſin. $qge$, vel ſimpliciter vt ſin. $QEG$ : ſin. $qeg$, quia $QE = qe$. Sunt vero quoque triangula $NFM$, $nfm$ in eadem ratione, proinde integer ſector Ellipticus $NFMQ$ ad ſectorem $nfmq$, vt ſin. $QEG$ : ſin. $qeg$ = ſin. $QDC$ : ſin. $q\partial c = \frac{HC}{CO} : \frac{ch}{co} = CH : ch$, ob $CO = co$.

§. 10. Quicunque ad tenorem quo demonſtrationes propoſitae procedunt, animum aduertere voluerit, facile perſpiciet easdem loci adhibita mutatione ad Hyperbolas aeque ac

ac Ellipſes adplicari poſſe. Nam pro Lemmate quidem I. ſi conſtructio ſimilis illi quam §. 2. adhibuimus, in vſum vocetur, habebimus Q D aequalem ſemiaxi transuerſo hyperbolae, F D vero erit aequalis ſemiſummae rectarum ex focis Hyperbolae ad punctum Q ductarum et denique fiet $FD^2 - CA^2 = CO^2$. Lemmata vero reliqua II., III. et IV. pro hyperbolis aeque ac Ellipſibus valent. Iſtis igitur Lemmatibus praeſtructis iam omnino patet, quod ſi binae proponantur hyperbolae, quarum axes transuerſi inter ſe ſunt aequales, et in illis hyperbolis binae ducantur cordae inter ſe aequales, iſta ratione, vt ſumma rectarum a foco alterutro vnius hyperbolae ad puncta extrema iſtius cordae ductarum aequalis ſit ſummae rectarum conſimili ratione ad focum cognominem alterius hyperbolae ductarum; erunt ſectores hyperbolici circa focos deſcripti et cordis memoratis reſpondentes in ratione axium coniugatorum pro hyperbolis. Vt autem ſpecimen huius demonſtrationis ob oculos ponatur, ſit N A M hyperbola cuius axis transuerſus C A, coniugatus C H, foci autem F, $f$, tumque ducta corda M N ſi biſecetur in G, per G ducatur diameter C Q, huiusque ſemidiameter coniugata C O, quae ipſi N M erit parallela. Per Q autem ducatur Q S tangens hyperbolam, quae adeoque etiam ipſi N M erit parallela, et iungantur F Q, $f$ Q, quarum illa producta occurrat ipſis N M, C O in E et D, atque ducatur C S parallela ipſi F D. Denique per puncta Q, G ducantur ad axin transuerſum normales Q R, G P, quarum haec hyperbolae occurrat in K, et iungantur F M, F N, F K. Primum igitur demonſtratur perinde ac pro Ellipſi eſſe $CS = CA$, ideoque in parallelogrammo D C S Q erit $DQ = CS = CA$; tum vero erit $DF = QF + DQ = Qf - DQ$, hincque $2DF = Qf + QF$, et denique $FD^2 - DQ^2 = FQ \cdot fQ = CO^2$. Confer locum citatum in Elementis Simſoni. Nunc ſi ex Q in C O normalis

Tab. V. Fig. 7.

malis ducatur $CX$, erit eadem quoque normalis hyperbolae in puncto $Q$, tum vero habebitur

$$\text{ſin.}\, QEG : 1 = \text{ſin.}\, QDC : 1 = QX : QD.$$

At per *Prop. XLV. Lib. III. Section. Conicar. Simſoni* eſt rectangulum $AC.CH$ aequale parallelogrammo contento ipſis diametris coniugatis $CQ.CO$, ideſt aequale rectangulo $CO.QX$, hinc erit $CA.CH = CO.QX$ et $QX : CA = CH : CO$, id eſt ſin. $QEG : 1 = CH : CO$. Vlterius quia habetur $fK^2 - FK^2 = fP^2 - FP^2$, erit

$$(fK - FK)(fK + FK) = (fP - FP)(fP + FP),$$

vnde $CA : CF = 2CP : fK + FK$, vel

$$CA(fK + FK) = 2CP.CF \text{ et}$$
$$CA(fK - FK) = 2CA^2; \text{ erit igitur}$$
$$CA.fK = CP.CF + CA^2, \text{ et}$$
$$CA.FK = CP.CF - CA^2.$$

Denique ob $fQ^2 - FQ^2 = fR^2 - FR^2$ erit $CA.FD = CF.CR$, hincque colligitur $FD : CF = CR : CA$; at ob $KP$, $QR$ parallelas, eſt $CP : CR = CG : CQ = DE : DQ$, et alternando $CP : DE = CR : DQ$, quare demum fit $DF : CF = CP : DE$, ideoque $DF.DE = CF.CP$. His autem principiis ſtabilitis reliqua demonſtratio omnino adornari poteſt ac pro Ellipſibus praecedenti factum eſt.

§. 11. Quum igitur *Lib. I. Section. III. Propoſitione XIV. Principior. Philoſophiae Naturalis* ſummi *Newtoni* demonſtratum ſit, ſi plura corpora reuoluantur circa idem centrum virium poſita vi attractiua reciproce in duplicata ratione diſtantiarum ab iſto centro virium, tum areas eodem tempore deſcriptas circa iſtud centrum eſſe in ſubdupla ratione parametrorum principalium pro iſtis orbibus; quare etiam concluditur,

tur, quod ſi in binis Ellipſibus eodem axe maiore praeditis, vel binis hyperbolis, quarum axes transuerſi aequales, ductae fuerint binae cordae inter ſe aequales eum in modum, vt lineae rectae a focis Ellipſium vel Hyperbolarum ductae ad puncta in quibus hae cordae Ellipſes vel Hyperbolas interſecant, eandem efficiant ſummam pro vtraque Ellipſi vel Hyperbola, tum omnino arcus ellipſium vel hyperbolarum qui ab iſtis cordis ſubtenduntur, eodem plane tempore percurri.

§. 12. His quae ad Geometricam demonſtrationem Theorematis a Cel. *Lambert* propoſiti ſpectant, praelibatis; nunc quoque examinabimus quomodo eius demonſtratio per Analyſin adornari queat. Si igitur pro ellipſi quacunque ſemiaxis maior ponatur $= p$, excentricitas more Aſtronomis vſitato $= e$, angulus circa focum deſcriptus et a vertice axis foco proximiori computatus $= \Phi$, radius autem vector a foco ductus huic angulo correſpondens $= r$, tum erit elementum ſectoris circa focum deſcripti $\frac{1}{2} r^2 \partial \Phi = \frac{1}{2} \frac{p^2 \partial \Phi}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$ ob $r = \frac{p}{1 + e \cos. \Phi}$. Nunc ſi igitur differentiale $\frac{\partial \Phi}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$, in binas has partes ſupponatur reſolutum $\frac{\alpha \partial \Phi}{1 + e \cos. \Phi} + \frac{\beta \partial \Phi (e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$, per reductionem harum fractionum ad communem denominatorem $(1 + e \cos. \Phi)^2$, fiet $\alpha = \frac{1}{1 - e^2}$ et $\beta = - \frac{e}{1 - e^2}$, ſiue

$$\frac{\partial \Phi}{(1 + e \cos. \Phi)^2} = \frac{1}{1 - e^2} \left( \frac{\partial \Phi}{1 + e \cos. \Phi} - \frac{e \partial \Phi (e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Phi)^2} \right).$$

Atqui integrale ipſius $\frac{\partial \Phi}{1 + e \cos. \Phi}$, poſito $e < 1$, eſt

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - e^2)}} \text{ Arc. coſ. } \left( \frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} \right).$$

Poſito enim $\frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = u$, fit

$$\partial u = - (1 - e^2) \frac{\partial \Phi \sin. \Phi}{(1 + e \cos. \Phi)^2};$$

hinc ob

$$\sqrt{(1 - u^2)} = \frac{\sin. \Phi \sqrt{(1 - e^2)}}{1 + e \cos. \Phi}$$

fiet omnino

$$-\frac{\partial u}{\sqrt{(1-e^2)(1-u^2)}} = \frac{\partial \Phi}{1+e\,coſ.\,\Phi};$$

atqui $\int -\frac{\partial u}{\sqrt{(1-u^2)}} = \text{Arc. coſ. } u$, hinc quoque

$$\int \frac{\partial \Phi}{1+e\,coſ.\,\Phi} = \frac{1}{\sqrt{(1-e^2)}}.\ \text{Arc. coſ.}\left(\frac{e+coſ.\,\Phi}{1+e\,coſ.\,\Phi}\right);$$

tum vero erit integrale

$$\int \frac{\partial \Phi(e+coſ.\,\Phi)}{(1+e\,coſ.\,\Phi)^2} = \frac{ſin.\,\Phi}{1+e\,coſ.\,\Phi}.$$

Hinc ergo collectiim ſumendo fiet:

$$\int \frac{\partial \Phi}{(1+e\,coſ.\,\Phi)^2} = \frac{1}{(1-e^2)^{3:2}}\left(\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e+coſ.\,\Phi}{1+e\,coſ.\,\Phi}\right) - \frac{e\,ſin.\,\Phi\sqrt{(1-e^2)}}{1+e\,coſ.\,\Phi}\right).$$

Iam autem ſi alius intelligatur ſector Ellipticus, pro quo angulus ab axi computatus ſit $\Phi'$, erit dupla differentia horum ſectorum:

$$\frac{p^2}{(1-e^2)^{3:2}}\left[\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e+coſ.\,\Phi}{1+e\,coſ.\,\Phi}\right) - \text{Arc. coſ.}\left(\frac{e+coſ.\,\Phi'}{1+e\,coſ.\,\Phi'}\right)\right.$$
$$\left.- e\sqrt{(1-e^2)}\left(\frac{ſin.\,\Phi}{1+e\,coſ.\,\Phi} - \frac{ſin.\,\Phi'}{1+e\,coſ.\,\Phi'}\right)\right].$$

Tum vero pro alia quacunque Ellipſi cuius idem axis maior, parameter vero $= p'$ et excentricitas $= e'$; ſi anguli circa focum deſcripti dicantur $\psi$, $\psi'$, differentia ſectorum Ellipticorum circa focum deſcriptorum haec erit:

$$\frac{p'^2}{(1-e'^2)^{3:2}}\left[\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e'+coſ.\,\psi}{1+e'\,coſ.\,\psi}\right) - \text{Arc. coſ.}\left(\frac{e'+coſ.\,\psi'}{1+e'\,coſ.\,\psi'}\right)\right.$$
$$\left.- e'\sqrt{(1-e'^2)}\left(\frac{ſin.\,\psi}{1+e\,coſ.\,\psi} - \frac{ſin.\,\psi'}{1+e'\,coſ.\,\psi'}\right)\right].$$

Nunc ſi hac differentiae ſupponantur eſſe in ratione ſubdupla parametrorum id eſt vt $\sqrt{p}:\sqrt{p'}$, quia $a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{p'}{1-e'^2}$, hinc iſta colligitur aequatio:

$$\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e+coſ.\,\Phi}{1+e\,coſ.\,\Phi}\right) - \text{Arc. coſ.}\left(\frac{e+coſ.\,\Phi'}{1+e\,coſ.\,\Phi'}\right)$$
$$- e\sqrt{(1-e^2)}\left(\frac{ſin.\,\Phi}{1+e\,coſ.\,\Phi} - \frac{ſin.\,\Phi'}{1+e\,coſ.\,\Phi'}\right) =$$
$$\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e'+coſ.\,\psi}{1+e\,coſ.\,\psi}\right) - \text{Arc. coſ.}\left(\frac{e'+coſ.\,\psi'}{1+e'\,coſ.\,\psi'}\right)$$
$$- e'\sqrt{(1-e'^2)}\left(\frac{ſin.\,\psi}{1+e'\,coſ.\,\psi} - \frac{ſin.\,\psi'}{1+e'\,coſ.\,\psi'}\right);$$

vbi

vbi quidem illae partes quae arcus circulares inuoluunt ſeorſim inter ſe aequales ponendae ſunt, tum vero ſeorſim iſtae quae algebraice exprimuntur.

§. 13. Statuamus nunc maioris facilitatis cauſſa

$$\text{coſ.}\, u = \frac{e + \text{coſ.}\, \Phi}{1 + e\, \text{coſ.}\, \Phi}; \quad \text{coſ.}\, u' = \frac{e + \text{coſ.}\, \Phi'}{1 + e\, \text{coſ.}\, \Phi'};$$

$$\text{coſ.}\, v = \frac{e' + \text{coſ.}\, \psi}{1 + e'\, \text{coſ.}\, \psi} \text{ et } \text{coſ.}\, v' = \frac{e' + \text{coſ.}\, \psi'}{1 + e'\, \text{coſ.}\, \psi'};$$

eritque hinc

$$\text{ſin.}\, u = \frac{\text{ſin.}\, \Phi \sqrt{(1 - e^2)}}{1 + e\, \text{coſ.}\, \Phi}; \quad \text{ſin.}\, u' = \frac{\text{ſin.}\, \Phi' \sqrt{(1 - e^2)}}{1 + e\, \text{coſ.}\, \Phi'};$$

$$\text{ſin.}\, v' = \frac{\text{ſin.}\, \psi \sqrt{(1 - e'^2)}}{1 + e'\, \text{coſ.}\, \psi}; \quad \text{ſin.}\, v' = \frac{\text{ſin.}\, \psi' \sqrt{(1 - e'^2)}}{1 + e'\, \text{coſ.}\, \psi'};$$

his igitur expreſſionibus introductis noſtrae aequationes erunt:

$$u - u' = v - v'; \quad e\, (\text{ſin.}\, u - \text{ſin.}\, u') = e'\, (\text{ſin.}\, v - \text{ſin.}\, v').$$

Deinde ex aequalitatibus ſuppoſitis colligimus quoque:

$$\text{coſ.}\, \Phi = \frac{\text{coſ.}\, u - e}{1 - e\, \text{coſ.}\, u}; \quad \text{ſin.}\, \Phi = \frac{\text{ſin.}\, u \sqrt{(1 - e^2)}}{1 - e\, \text{coſ.}\, u}; \quad \frac{1 - e^2}{1 + e\, \text{coſ.}\, \Phi} = 1 - e\, \text{coſ.}\, u;$$

quibus conſimiles expreſſiones pro coſ. $\Phi'$, ſin. $\Phi'$, coſ. $\psi$, ſin. $\psi$, coſ. $\psi'$, ſin. $\psi'$ etc. inueniri poſſunt; hinc quum ſit radius vector pro angulo $\Phi$,

$$r = \frac{p}{1 + e\, \text{coſ.}\, \Phi} = \frac{a\, (1 - e^2)}{1 + e\, \text{coſ.}\, \Phi}, \text{ erit}$$

$$r = a\, (1 - e\, \text{coſ.}\, u) \text{ et } r' = a\, (1 - e\, \text{coſ.}\, u'),$$

ideoque

$$r + r' = 2\, a - e\, a\, (\text{coſ.}\, u + \text{coſ.}\, u'),$$

tum vero eadem ratione pro altera Ellipſi ſumma radiorum vectorum inuenietur

$$\varrho + \varrho' = 2\, a - e'\, a\, (\text{coſ.}\, v + \text{coſ.}\, v').$$

Quia autem ſupra habuimus

$$e\, (\text{ſin.}\, u - \text{ſin.}\, u') = e'\, (\text{ſin.}\, v - \text{ſin.}\, v'), \text{ fiet}$$

$$e\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\, (u - u')\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\, (u + u') =$$

$$e'\, \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2}\, (v - v')\, \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\, (v + v'),$$

 at

at ob $u - u' = v - v'$, ſit omnino

$$\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}(u-u') = \text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}(v-v') \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}(u-u') = \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}(v-v'),$$

vnde concluditur non ſolum

$$e\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}(u+u) = e'\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}(v+v');$$

verum etiam

$$e\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}(u-u')\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}(u+u') =$$
$$e'\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}(v-v')\ \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}(v+v'), \text{ ideoque}$$
$$e(\text{coſ.}\ u + \text{coſ.}\ u') = e'(\text{coſ.}\ v + \text{coſ.}\ v'),$$

vnde omnino concluditur eſſe $r + r' = \varrho + \varrho'$. Deinde quia eſt

$$\text{coſ.}(\phi - \phi') = \text{coſ.}\phi\ \text{coſ.}\phi' + \text{ſin.}\phi\ \text{ſin.}\phi'$$
$$= \frac{(\text{coſ}\ u - e)(\text{coſ.}\ u' - e) + \text{ſin.}\ u\ \text{ſin.}\ u'(1 - e^2)}{(1 - e\ \text{coſ.}\ u)(1 - e\ \text{coſ.}\ u')};$$

ſi corda Ellipſis quae angulum $\phi - \phi'$ ſubtendit, dicatur $s$, erit

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\ \text{coſ.}(\phi - \phi') = (r + r')^2 - 2rr'(1 + \text{coſ.}(\phi - \phi')),$$

ideoque

$$2rr'(1 + \text{coſ.}(\phi - \phi')) = (r + r')^2 - s^2,$$

tumque pro altera Ellipſi, ſi corda ſubtendens angulum $\psi - \psi'$ dicatur $\sigma$, fiet

$$2\varrho\varrho'(1 + \text{coſ.}(\psi - \psi')) = (\varrho + \varrho')^2 - \sigma^2.$$

Atqui eſt

$$rr' = a^2(1 - e\ \text{coſ.}\ u)(1 - e\ \text{coſ.}\ u') \text{ et}$$
$$\varrho\varrho' = a^2(1 - e'\ \text{coſ.}\ v)(1 - e'\ \text{coſ.}\ v'),$$

fiet igitur

$$(1 - e\ \text{coſ.}\ u)(1 - e\ \text{coſ.}\ u') + (\text{coſ.}\ u - e)(\text{coſ.}\ u' - e) + \text{ſin.}\ u\ \text{ſin.}\ u'(1 - e^2) = \frac{(r + r)^2}{a^2} - \frac{s^2}{a^2} \text{ et}$$

$$(1 - e'\ \text{coſ.}\ v)(1 - e'\ \text{coſ.}\ v') + (\text{coſ.}\ v - e')(\text{coſ.}\ v' - e') + \text{ſin.}\ v\ \text{ſin.}\ v'(1 - e'^2) = \frac{(\rho + \rho')^2}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

At-

Atque euolutis his aequationibus habemus:

$$1+e^2-2e(\text{coſ.}\,u+\text{coſ.}\,u')+(1+e^2)\,\text{coſ.}\,u\,\text{coſ.}\,u'+ \text{ſin.}\,u\,\text{ſin.}\,u'(1-e^2)=\frac{(r+r')^2}{a^2}-\frac{s^2}{a^2};$$

$$1+e'^2-2e'(\text{coſ.}\,v+\text{coſ.}\,v')+(1+e'^2)\,\text{coſ.}\,v\,\text{coſ.}\,v'+ \text{ſin.}\,v\,\text{ſin.}\,v'(1-e'^2)=\frac{(\varrho+\varrho')^2}{a^2}-\frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Hincque fit

$$1+2e^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(u+u')^2-2e(\text{coſ.}\,u+\text{coſ.}\,u')+ \text{coſ.}(u-u')=\frac{(r+r')^2}{a^2}-\frac{s^2}{a^2};$$

$$1+2e'^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(v+v')^2-2e'(\text{coſ.}\,v+\text{coſ.}\,v')+ \text{coſ.}(v-v')=\frac{(\varrho+\varrho')^2}{a^2}-\frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Ideoque ob $u-u'=v-v'$,

$$e(\text{coſ.}\,u+\text{coſ.}\,u')=e'(\text{coſ.}\,v+\text{coſ.}\,v') \text{ et}$$

$$u\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(u+u')=e'\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(v+v'),$$

vt ex ſuperioribus conſtat; fit omnino $(r+r')^2-s^2=(\varrho+\varrho')^2-\sigma^2$, ſiue $s=\sigma$.

§. 14. Haec autem demonſtratio ſequenti quoque ratione inſtrui poteſt: Quia eſt $\text{coſ.}\,u=\frac{e+\text{coſ.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}$; fit

$$\text{coſ.}\tfrac{1}{2}u=\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}} \text{ et } \text{ſin.}\tfrac{1}{2}u=\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}}$$

quibus ſimiles formae pro $\text{coſ.}\tfrac{1}{2}u'$; $\text{ſin.}\tfrac{1}{2}u'$; $\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v$; $\text{coſ.}\tfrac{1}{2}v'$ etc. inuenientur; quumque ſit

$$u-u'=v-v' \text{ et } \text{coſ.}\tfrac{1}{2}(u-u')=\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(v-v'),$$

nec non

$$\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(u-u')=\text{ſin.}\tfrac{1}{2}(v-v'),$$

inde ſequentes colligentur aequationes:

$$\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi'(1+e)+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi'(1-e)}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)(1+e\,\text{coſ.}\Phi')}} =$$

$$\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi'(1+e')+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi'(1-e')}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\psi)(1+e'\,\text{coſ.}\psi')}}\ (A);$$

$$\frac{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi'-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi'\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi)\sqrt{(1-e^2)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)(1+e\,\text{coſ.}\Phi')}} =$$

$$\frac{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi'-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi'\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi)\sqrt{(1-e'^2)}}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\psi)(1+e'\,\text{coſ.}\psi')}}\ (B).$$

Iam autem ſi iſta aequatio conſideretur:

$$e\sqrt{(1-e^2}\left(\frac{\text{ſin.}\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\Phi}-\frac{\text{ſin.}\Phi'}{1+e\,\text{coſ.}\Phi'}\right) =$$

$$e'\sqrt{(1-e'^2)}\left(\frac{\text{ſin.}\psi}{1+e'\,\text{coſ.}\psi}-\frac{\text{ſin.}\psi'}{1+e'\,\text{coſ.}\psi'}\right),$$

facile patet prius membrum in binos hos factores reſolui:

$$2\sqrt{(1-e^2)}\frac{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi'-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi'\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi)}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)(1+e\,\text{coſ.}\Phi')}};$$

$$\frac{e(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi'(1+e)-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi'(1-e))}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)(1+e\,\text{coſ.}\Phi')}};$$

poſterius autem membrum in iſtos:

$$2\sqrt{(1-e'^2)}\frac{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi'-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi'\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi)}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\psi)(1+e'\,\text{coſ.}\psi')}};$$

$$\frac{e'(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi'(1+e')-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi'(1-e'))}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\psi)(1+e'\,\text{coſ.}\psi')}};$$

ob factores igitur primos inter ſe aequales per aequationem (B), fient quoque poſtremi inter ſe aequales, ſiue

$$\frac{e(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi'(1+e)-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi'(1-e))}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)(1+e\,\text{coſ.}\Phi')}} =$$

$$\frac{e'(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi'(1+e')-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi'(1-e'))}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\psi)(1+e'\,\text{coſ.}\psi')}}\ (C);$$

et

et hac aequatione per illam (A) multiplicata prodit:

$$\frac{e(\cos.\tfrac{1}{2}\phi^2\cos.\tfrac{1}{2}\phi'^2(1+e)^2-\sin.\tfrac{1}{2}\phi^2\sin.\tfrac{1}{2}\phi'^2(1-e)^2)}{(1+e\cos.\phi)(1+e\cos.\psi')}=$$

$$\frac{e'(\cos.\tfrac{1}{2}\psi^2\cos.\tfrac{1}{2}\psi'^2(1+e')^2-\sin.\tfrac{1}{2}\psi^2\sin.\tfrac{1}{2}\psi'^2(1-e')^2)}{(1+e'\cos.\psi)(1+e'\cos.\psi')};$$

quae euoluta ob

$$2\cos.\tfrac{1}{2}\phi^2=1+\cos.\phi;\quad 2\sin.\tfrac{1}{2}\phi^2=1-\cos.\phi \text{ etc.}$$

in hanc transformatur:

$$\frac{2e^2(1+\cos.\phi\cos.\phi')+e(1+e^2)(\cos.\phi+\cos.\phi')}{(1+e\cos.\phi)(1+e\cos.\phi')}=$$

$$\frac{2e'^2(1+\cos.\psi\cos.\psi')+e'(1+e'^2)(\cos.\psi+\cos.\psi')}{(1+e'\cos.\psi)(1+e'\cos.\psi')}.$$

Et ſi haec aequalitas vtrinque a binario ſubtrahatur, fiet:

$$(1-e^2)\frac{(2+e\cos.\phi+e\cos.\phi')}{(1+e\cos.\phi)(1+e\cos.\phi')}=(1-e'^2)\frac{2+e'\cos.\psi+e'\cos.\psi'}{(1+e'\cos.\psi)(1+e'\cos.\psi')}, \text{ ſiue}$$

$$(1-e^2)\left(\frac{1}{1+e\cos.\phi}+\frac{1}{1+e\cos.\phi'}\right)=$$

$$(1-e'^2).\left(\frac{1}{1+e'\cos.\psi}+\frac{1}{1+e'\cos.\psi'}\right);$$

vnde multiplicata hac aequatione vtrinque per $a$, ob

$$p=a(1-e^2);\quad p'=a(1-e'^2);$$

$$r=\frac{p}{1+e\cos.\phi};\quad r'=\frac{p}{1+e\cos.\phi'};$$

$$\varrho=\frac{p'}{1+e'\cos.\psi} \text{ et } \varrho'=\frac{p'}{1+e'\cos.\psi'};$$

fit omnino factis ſubſtitutionibus $r+r'=\varrho+\varrho'$. Tum vero ſi ab aequatione (A) ſubtrahatur illa (C) fit:

$$(1-e^2)\frac{(\cos.\tfrac{1}{2}\phi\cos.\tfrac{1}{2}\phi'+\sin.\tfrac{1}{2}\phi\sin.\tfrac{1}{2}\phi')}{\sqrt{(1+e\cos.\phi)(1+e\cos.\phi')}}=$$

$$(1-e'^2)\frac{(\cos.\tfrac{1}{2}\psi\cos.\tfrac{1}{2}\psi'+\sin.\tfrac{1}{2}\psi\sin.\tfrac{1}{2}\psi')}{\sqrt{(1+e'\cos.\psi)(1+e'\cos.\psi')}}, \text{ ſiue}$$

$$\frac{(1-e^2)\cos.\tfrac{1}{2}(\phi-\phi')}{\sqrt{(1+e\cos.\phi)(1+e\cos.\phi')}}=\frac{(1-e'^2)\cos.\tfrac{1}{2}(\psi-\psi')}{\sqrt{(1+e'\cos.\psi)(1+e'\cos.\psi')}}.$$

et

et ſumtis quadratis

$$\frac{2(1-e^2)^2\cos.\frac{1}{2}(\Phi-\Phi')^2}{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\Phi')}=\frac{(1-e^2)^2(1+\cos.(\Phi-\Phi'))}{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\Phi')}=$$

$$\frac{(1-e'^2)^2(1+\cos.(\psi-\psi'))}{(1+e'\cos.\psi)(1+e'\cos.\psi')};$$

vnde multiplicando vtrinque per $a^2$, colligetur:

$$r\,r'(1+\cos.(\Phi-\Phi'))=\varrho\,\varrho'(1+\cos.(\psi-\psi')),$$

hincque ob $(r+r')^2=(\varrho+\varrho')^2$, fiet quoque

$$r^2+r'^2-2\,r\,r'\cos.(\Phi-\Phi')=\varrho^2+\varrho'^2-2\,\varrho\,\varrho'\cos.(\psi-\psi').$$

§. 15. Quoniam demonſtrationes modo allatae ita inſtructae ſunt, vt ex ſuppoſita illa ratione ſectorum Ellipticorum circa focos deſcriptorum, in binis Ellipſibus eodem axe maiori praeditis, quae ſubdupla eſt parametrorum principalium, demonſtretur ſummam radiorum vectorum pro his ſectoribus in vtraque Ellipſi eſſe eandem, tumque cordas quae arcus Ellipticos ſubtendunt quoque inter ſe eſſe aequales; in hoc autem negotio id potius agitur vt inuerſa iſtius propoſitionis demonſtretur; nimirum ſi in binis Ellipſibus eodem axe maiori praeditis, binae cordae inter ſe aequales ita ducantur, vt rectae ab extremis punctis cordarum ad focos ductae conſtituant ſummam inter ſe aequalem in vtraque Ellipſi, tum ſectores Ellipticos circa focos deſcriptos fore in ratione ſubdupla parametrorum principalium; nunc ſane haud praeter rem erit vt oſtendamus quomodo demonſtratio directa procedat. Quia igitur ponitur eſſe $r+r=\varrho'+\varrho'$ et $s=\sigma$, ob

$$s^2=r^2+r'^2-2\,r\,r'\cos.(\Phi-\Phi')=$$
$$(r+r')^2-2\,r\,r'(1+\cos.(\Phi-\Phi'))=$$
$$(r+r')^2-4\,r\,r'\cos.\tfrac{1}{2}(\Phi-\Phi')^2 \text{ et}$$
$$\sigma^2=(\varrho+\varrho')^2-4\,\varrho\,\varrho'\cos.\tfrac{1}{2}(\psi-\psi')^2, \text{ fiet}$$

coſ.

$$\cos.\tfrac{1}{2}(\Phi-\Phi')\sqrt{r r'}=\cos.\tfrac{1}{2}(\psi-\psi')\sqrt{\varrho\varrho'},$$

hoc eſt

$$\frac{(1-e^2)\cos.\frac{1}{2}(\Phi-\Phi')}{\sqrt{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\Phi')}}=\frac{(1-e'^2)\cos.\frac{1}{2}(\psi-\psi')}{\sqrt{(1+e'\cos.\psi)(1+e'\cos.\psi')}}.$$

Tum vero ex iſta aequatione $r+r'=\varrho+\varrho'$, hoc eſt

$$\frac{(1-e^2)(2+e\cos.\Phi+e\cos.\Phi')}{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\Phi')}=\frac{(1-e'^2)(2+e'\cos.\psi+e'\cos.\psi')}{(1+e'\cos.\psi)(1+e'\cos.\psi')},$$

per operationes in ſuperiori §. adhibitas, ad iſtam deducimur:

$$\frac{e(\cos.\frac{1}{2}\Phi^2\cos.\frac{1}{2}\Phi'^2(1+e)^2-\sin.\frac{1}{2}\Phi^2\sin.\frac{1}{2}\Phi'^2(1-e)^2)}{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\Phi')}=$$

$$\frac{e'(\cos.\frac{1}{2}\psi^2\cos.\frac{1}{2}\psi'^2(1+e')^2-\sin.\frac{1}{2}\psi^2\sin.\frac{1}{2}\psi'^2(1-e')^2)}{(1+e'\cos.\psi)(1+e'\cos.\psi')}.$$

Nunc quia eſt:

$$\frac{(1-e^2)\cos.\frac{1}{2}(\Phi-\Phi')}{\sqrt{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\Phi')}}=$$

$$\frac{(1-e^2)(\cos.\frac{1}{2}\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi'+\sin.\frac{1}{2}\Phi\sin.\frac{1}{2}\Phi')}{\sqrt{(1+e\cos.\Phi)(1+e'\cos.\Phi')}}=$$

$$\frac{\cos.\frac{1}{2}\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi'(1+e)+\sin.\frac{1}{2}\Phi\sin.\frac{1}{2}\Phi'(1-e)}{\sqrt{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\Phi')}}-$$

$$\frac{e(\cos.\frac{1}{2}\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi'(1+e)-\sin.\frac{1}{2}\Phi\sin.\frac{1}{2}\Phi'(1-e))}{\sqrt{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\Phi')}},\ \text{et}$$

$$\frac{e\cos.\frac{1}{2}\Phi^2\cos.\frac{1}{2}\Phi'^2(1+e)^2-\sin.\frac{1}{2}\Phi^2\sin.\frac{1}{2}\Phi'^2(1-e)^2}{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\Phi')}$$

in iſtos binos reſoluitur factores

$$\frac{\cos.\frac{1}{2}\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi'(1+e)+\sin.\frac{1}{2}\Phi\sin.\frac{1}{2}\Phi'(1-e)}{\sqrt{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\Phi')}},$$

$$\frac{e(\cos.\frac{1}{2}\Phi\cos.\frac{1}{2}\Phi'(1+e)-\sin.\frac{1}{2}\Phi\sin.\frac{1}{2}\Phi'(1-e))}{\sqrt{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\Phi')}};$$

ſi prior horum factorum indigitetur per $\alpha$, poſterior vero per $\beta$, ſimilesque denominationes pro altera Ellipſi introducantur, has binas habebimus aequationes $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$; $\alpha\beta = \alpha'\beta'$; vnde omnino concluditur $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. Prior harum aequationum cum illa (A) §. ſuperiori coincidit, poſterior autem ad iſtam (C) redit. Ex aequatione autem (A) ſponte derivatur iſta aequatio (B), nec non haec quoque aequatio:

$$\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e + \text{coſ.}\,\Phi}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi}\right) - \text{Arc. coſ.}\left(\frac{e + \text{coſ.}\,\Phi'}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi'}\right) =$$
$$\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e' + \text{coſ.}\,\psi}{1 + e'\,\text{coſ.}\,\psi}\right) - \text{Arc. coſ.}\left(\frac{e' + \text{coſ.}\,\psi'}{1 + e'\,\text{coſ.}\,\psi'}\right);$$

multiplicata autem aequatione (B) per (C) prodit denique:

$$e\sqrt{(1 - e^2)}\left(\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi} - \frac{\text{ſin.}\,\Phi'}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi'}\right) =$$
$$e'\sqrt{(1 - e'^2)}\left(\frac{\text{ſin.}\,\psi}{1 + e'\,\text{coſ.}\,\psi} - \frac{\text{ſin.}\,\psi'}{1 + e'\,\text{coſ.}\,\psi'}\right);$$

ex quo omnino per ea quae §. 12. docuimus, liquet ſectores Ellipticos fore in ratione ſubdupla parametrorum principalium.

§. 16. Supponamus nunc deſcriptam eſſe Ellipſin

Tab. V. Fig. 8. N. 1. AQHB, ſemiaxe maiore $AC = a$, minore $CH = a\sqrt{(1 - e^2)}$, diſtantia foci F a centro $FC = ae$, et ducta corda $NM = s$, ſi iungantur FN, FM, atque dicatur angulus $AFN = \Phi'$; $AFM = \Phi$; $FM = r$; $FN = r'$; parameter vero principalis Ellipſis exprimatur per $p$. Tum ſi ex punctis M, N in axem maiorem demittantur perpendiculares $M\mu$, $N\nu$, quae productae circulo centro C radio CA deſcripto in $n$ et $m$ occurrant, et iungantur $nm$, CM, $Cm$, CN, $Cn$; liquet omnino ordinatas $m\mu$, $M\mu$ ſectas eſſe in ratione axis maioris ad minorem. Ea autem adhibita conſtructione fit ob

$$FM = r = \frac{p}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi'};$$
$$M\mu = FM\ \text{ſin.}\ AFM = \frac{p\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi},$$

hinc-

hincque duplum trianguli

$$F M C = M \mu . F C = p\, a . \frac{e\, ſin. \Phi}{1 + e\, coſ. \Phi},$$

et dupla differentia horum triangulorum

$$= p\, a\, e \left( \frac{ſin. \Phi}{1 + e\, coſ. \Phi} - \frac{ſin. \Phi'}{1 + e\, coſ. \Phi'} \right).$$

Tum vero habebitur

$$F \mu = F M\, coſ. M F B = - F M\, coſ. A F M = - \frac{p\, coſ. \Phi}{1 + e\, coſ. \Phi} \text{ et}$$

$$C \mu = F \mu - F C = - \frac{p\, coſ. \Phi}{1 + e\, coſ. \Phi} - a\, e$$

$$= - \frac{a\,(e + coſ. \Phi)}{1 + e\, coſ. \Phi}, \text{ ob } p = a\,(1 - e^2).$$

Hinc quum ſumto C A pro ſinu toto, ſit $C \mu$ coſinus arcus $A m$, habebitur $coſ. A m = \frac{a\,(e + coſ. \Phi)}{1 + e\, coſ. \Phi}$, et angulus

$$A C m = \text{ang. coſ. } \frac{e + coſ. \Phi}{1 + e\, coſ. \Phi}, \text{ quare fiet ſector}$$

$$A C m = \tfrac{1}{2} a^2 \text{ Arc. coſ. } \left( \frac{e + coſ. \Phi}{1 + e\, coſ. \Phi} \right) \text{ et ſector}$$

$$A C M = \tfrac{1}{2} a^2 \sqrt{(1 - e^2)} \text{ Arc. coſ. } \left( \frac{e + coſ. \Phi}{1 + e\, coſ. \Phi} \right),$$

eademque ratione ſector

$$A C N = \tfrac{1}{2} a^2 \sqrt{(1 - e^2)} \text{ Arc. coſ. } \left( \frac{e + coſ. \Phi'}{1 + e\, coſ. \Phi'} \right),$$

proinde ſector

$$N C M = \tfrac{1}{2} a^2 \sqrt{(1 - e^2)} \left[ \text{Arc. coſ. } \left( \frac{e + coſ. \Phi}{1 + e\, coſ. \Phi} \right) - \text{Arc. coſ. } \left( \frac{e + coſ. \Phi'}{1 + e\, coſ. \Phi'} \right) \right],$$

et ſector N F M = ſectori

$$N C M + \Delta F N C - \Delta F M C =$$

$$\tfrac{1}{2} a^2 \sqrt{(1 - e^2)} \left[ \text{Arc. coſ. } \left( \frac{e + coſ. \Phi}{1 + e\, coſ. \Phi} \right) - \text{Arc coſ. } \left( \frac{e + coſ. \Phi'}{1 + e\, coſ. \Phi'} \right) \right]$$

$$- \tfrac{1}{2} a^2 e\,(1 - e^2) \left( \frac{ſin. \Phi}{1 + e\, coſ. \Phi} - \frac{ſin. \Phi'}{1 + e\, coſ. \Phi'} \right).$$

Vnde nunc planum fit quid ſingulae iſta expreſſiones Analyticae in §. 12. allatae deſignent.

§. 17. Supponamus nunc cordam NM in G bifariam ſecari et ductam eſſe ſemidiametrum Ellipſis CQ per G tranſeuntem, tumque ſi per G ducatur GP normalis ad axem maiorem, quae cordae $nm$ in $g$ occurrit, erit omnino $ng = gm$ et $nm$ normalis iunctae C$g$, quae producta circulo occurrat in $g$, tumque ex iis quae in Conicis demonſtrantur liquet, ſi per Q ducatur QR normalis ad axem maiorem, eam quoque per $q$ tranſire. Quia igitur eſt $mg^2 = CA^2 - Cg^2$ et $MG^2 : CQ^2 - CG^2 = CO^2 : CQ^2$, poſita CO ſemidiametro coniugata ipſius CQ, ob parallelas autem $g$P et $q$R, ſit

$$CQ^2 - CG^2 : Cq^2 - Cg^2 = CQ^2 : Cq^2,$$

fiet ex aequo perturbate:

$$MG^2 : mg^2 = CO^2 : Cq^2 = CO^2 : CA^2;$$

hoc eſt $MG : mg = CO : CA$. Inſignis autem iſthaec proprietas nunc quoque ad nouam Demonſtrationem Geometricam Theorematis *Lambertiani* perducit. Scilicet ſi iam deſcripta intelligatur Ellipſis $A'Q'B'$, in qua $A'C' = AC$, at ſemiaxis minor $C'H'$ diuerſus a ſemiaxe minore prioris CH, tumque in hac Ellipſi aptetur corda $M'N' = MN$, ita vt quoque ſit $F'M' + F'N' = FM + FN$, caeterumque centro $C'$ radio $C'A'$ deſcripto circulo ſimilis adhibeatur conſtructio ac pro Fig. 8. n. 1; tum perinde ac §. 9. factum eſt demonſtrabitur fore $CO = C'O'$, vnde ob

$$nm : NM = CA : CO \quad \text{et} \quad n'm' : N'M' = C'A' : C'O',$$

fiet quoque $nm = n'm'$, ex quo omnino ſequitur eſſe ſectorem circularem $nCm =$ ſectori $n'C'm'$. Tum vero ob $FQ.fQ = CO^2$ et $F'Q'.f'Q' = C'O'^2$, fit quoque $FQ = F'Q'$, vnde ob $fQ^2 - FQ^2 = 4CF.CR$ et $f'Q'^2 - F'Q'^2 = 4C'F'.C'R'$, fit $CF.CR = C'F.C'R'$; eſt autem differentia triangulorum

$$FmC - FnC = \tfrac{1}{2}FC.(m\mu - n\nu) = FCmg.\text{coſ}.ngP = FCmg.\text{coſ}.qCR = F'C'.\tfrac{CR.mg}{CA},$$

et

et ſimili modo

$$\Delta\, F'm'C' - F'n'C' = F'C' . \frac{C'R' . m'g'}{C'A'},$$

vnde ob FC . CR = F'C' . C'R', eſt

$$\Delta\, F m C - F n C = \Delta\, F'm'C' - F'n'C'.$$

Atqui ſector $nFm$ = ſect. $nCm + \Delta\, FnC - \Delta\, FmC$, et ſector $n'F'm'$ = ſect. $n'C'm' + \Delta\, F'n'C' - \Delta\, F'm'C'$; ideoque ſector $nFm$ = ſect. $n'F'm'$; at ſector $nFm$ : ſector NFM = CA : CH et ſector $n'F'm'$ : ſect. N'F'M' = C'A' : C'H', proinde denique ſector NFM : ſect. N'F'M' = CH : C'H'.

§. 18. Demonſtratio ſuperior ex principiis Analyticis deducta, quum locum habere nequeat niſi ſi ſupponatur $e < 1$, iam quoque diſpiciendum eſt quomodo integrale ipſius $\frac{\partial\Phi}{1 + e\, coſ.\, \Phi}$ habeatur comparatum caſu quo ponitur $e > 1$. Supponamus igitur ſemiaxe transuerſo CA eſſe deſcriptam hyperbolam aequilateram AQM et ex puncto eius K in axem CA eſſe demiſſam perpendicularem KP, tum ſi dicantur $KP = y$, $CP = x$, $CA = a$, fiet aequatio pro hyperbola $a^2 = x^2 - y^2$, et area hyperbolica, rectis CK, CA et arcu AK incluſa Tab. V. Fig. 7.

$$= \tfrac{1}{2} a^2 \int \frac{\partial x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \tfrac{1}{2} a^2 \int \frac{\partial y}{\sqrt{(y^2 + a^2)}}.$$

Si igitur nunc maioris facilitatis gratia ponatur $a = 1$, area vero hyperbolica exprimatur per $\tfrac{1}{2} u$, atque coordinata KP deſignetur per $S . u$, abſciſſa vero CP per $C . u$; tum has habebimus relationes $C . u^2 - S . u^2 = 1$; $\partial u . S . u = \partial . C . u$ et $\partial u . C . u = \partial . S . u$. Porro pro integranda formula $\frac{\partial\Phi}{1 + e\, coſ.\, \Phi}$, ſi ponatur $C . u = \frac{e + coſ.\, \Phi}{1 + e\, coſ.\, \Phi}$, fiet

$$S .\, u = \frac{ſin.\, \Phi \sqrt{(e^2 - 1)}}{1 + e\, coſ.\, \Phi}; \quad \partial . C .\, u = \frac{(e^2 - 1)\, \partial\Phi\, ſin.\, \Phi}{(1 + e\, coſ.\, \Phi)^2},$$

ideoque ob $\partial u = \frac{\partial . C . u}{S . u}$, conſequimur $\partial u = \frac{\partial\Phi \sqrt{(e^2 - 1)}}{1 + e\, coſ.\, \Phi}$, hincque $\int \frac{\partial\Phi}{1 + e\, coſ.\, \Phi} = \frac{u}{\sqrt{(e^2 - 1)}}$, omiſſa conſtante adiicienda, ſi ſuppona-

ponatur euaneſcente $u$ etiam euaneſcere $\int \frac{\partial \Phi}{1 + e \operatorname{coſ.} \Phi}$; ideoque habebimus

$$\int \frac{\partial \Phi}{1 + e \operatorname{coſ.} \Phi} = \frac{1}{\surd (e^2 - 1)} \text{ Ar. C.} \left( \frac{e + \operatorname{coſ.} \Phi}{1 + e \operatorname{coſ.} \Phi} \right),$$

quod verbis expreſſum ita ſonet: area hyperbolae aequilaterae, pro qua abſciſſa a centro computata $= \frac{e + \operatorname{coſ.} \Phi}{1 + e \operatorname{coſ.} \Phi}$. Hinc igitur pro binis angulis $\Phi$, $\Phi'$ circa focum deſcriptis habemus duplum differentiae ſectorum hyperbolicorum

$$\frac{p^2}{(e^2 - 1)^{3:2}} \left[ \text{Arc. C.} \left( \frac{e + \operatorname{coſ.} \Phi}{1 + e \operatorname{coſ.} \Phi} \right) - \text{Arc. C.} \left( \frac{e + \operatorname{coſ.} \Phi'}{1 + e \operatorname{coſ.} \Phi'} \right) + e \surd (e^2 - 1) \left( \frac{\operatorname{ſin.} \Phi}{1 + e \operatorname{coſ.} \Phi} - \frac{\operatorname{ſin.} \Phi'}{1 + e \operatorname{coſ.} \Phi'} \right) \right].$$

Et pro angulis $\psi$, $\psi'$ in alia hyperbola, cuius idem axis transverſus $a$, parameter vero $p'$ et excentricitas $= e'$, fit duplum differentiae ſectorum hyperbolicorum

$$\frac{p'^2}{(e'^2 - 1)^{3:2}} \left[ \text{Arc. C.} \left( \frac{e' + \operatorname{coſ.} \psi}{1 + e' \operatorname{coſ.} \psi} \right) - \text{Arc. C.} \left( \frac{e' + \operatorname{coſ.} \psi'}{1 + e' \operatorname{coſ.} \psi'} \right) + e' \surd (e'^2 - 1) \left( \frac{\operatorname{ſin.} \psi}{1 + e' \operatorname{coſ.} \psi} - \frac{\operatorname{ſin.} \psi'}{1 + e' \operatorname{coſ.} \psi'} \right) \right].$$

§. 19. Quod ſi nunc in binis hyperbolis eodem axe transuerſo gaudentibus, bini capiantur ſectores hyperbolici circa focos cognomines deſcripti, ita vt cordae quae arcus hyperbolicos ſubtendunt, vtrinque ſint aequales, tumque vt ſumma radiorum vectorum in vna hyperbolarum ſit aequalis ſummae radiorum vectorum in altera, dico iſtos ſectores hyperbolicos omnino eſſe in ratione ſubdupla parametrorum principalium. Nam ſi radii vectores pro vna hyperbolarum dicantur $r$, $r'$, pro altera vero $\varrho$, $\varrho'$, et corda pro prima exprimatur littera $s$, pro altera littera $\sigma$, tum vti §. 15, demonſtrabitur eſſe:

$e$ (coſ.

$$\frac{e\,(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi'^2\,(e+1)^2-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi^2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi'^2\,(e-1)^2)}{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)\,(1+e\,\text{coſ.}\Phi')}=$$

$$\frac{e'\,(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi'^2\,(e'+1)^2-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi^2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi'^2\,(e'-1)^2)}{(1+e'\,\text{coſ.}\psi)\,(1+e'\,\text{coſ.}\psi')}\text{ et}$$

$$(e^2-1)\,\frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi'+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi')}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)\,(1+e\,\text{coſ.}\Phi')}}=$$

$$(e'^2-1)\,\frac{(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi'+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi')}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\psi)\,(1\;e'\,\text{coſ.}\psi')}};$$

vnde adhibitis denominationibus $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$ §. 15. in vſum vocatis, fit ob $\beta-\alpha=\beta'-\alpha'$ et $\alpha\beta=\alpha'\beta'$, $\alpha=\alpha'$ et $\beta=\beta'$. Vnde erit

$$\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi'\,(e+1)-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi'\,(e-1)}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)\,(1+e\,\text{coſ.}\Phi')}}=$$

$$\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi'\,(e'+1)-\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi'\,(e'-1)}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\psi)\,(1+e'\,\text{coſ.}\psi')}},\text{ (A) et}$$

$$e\,\frac{[\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi'\,(e+1)+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi'\,(e-1)]}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)\,(1+e\,\text{coſ.}\Phi')}}=$$

$$e'\,\frac{[\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi'\,(e'+1)+\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi'\,(e'-1)]}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\psi)\,(1+e'\,\text{col.}\psi)}},\text{ (C).}$$

Iam ſi area Hyperb. cuius **C.** aequalis ipſi $\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi\sqrt{(e+1)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)}}$ ponatur $\tfrac{1}{2}u$, erit

$$\text{C.}\tfrac{1}{2}u=\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi\sqrt{(e+1)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)}};\quad \text{S.}\tfrac{1}{2}u=\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\sqrt{(e-1)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi)}};$$

$$\text{C.}\tfrac{1}{2}u'=\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi'\sqrt{(e+1)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi')}};\quad \text{S.}\tfrac{1}{2}u'=\frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\sqrt{(e-1)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\Phi')}};$$

**C.**

$$\text{C.}\tfrac{1}{2}v = \frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi\sqrt{(e'+1)}}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi)}};\quad \text{S.}\tfrac{1}{2}v = \frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi\sqrt{(e'-1)}}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi)}};$$

$$\text{C.}\tfrac{1}{2}v' = \frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi'\sqrt{(e'+1)}}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi')}};\quad \text{S.}\tfrac{1}{2}v' = \frac{\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi'\sqrt{(e'-1)}}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi')}}.$$

Vnde ſuffectis his valoribus fit per aequationem (A)

$$\text{C.}\tfrac{1}{2}u\,.\,\text{C.}\tfrac{1}{2}u' - \text{S.}\tfrac{1}{2}u\,\text{S.}\tfrac{1}{2}u' = \text{C.}\tfrac{1}{2}v\,.\,\text{C.}\tfrac{1}{2}v' - \text{S.}\tfrac{1}{2}v\,.\,\text{S.}\tfrac{1}{2}v',$$

ex quo omnino concluditur $\tfrac{1}{2}(u-u') = \tfrac{1}{2}(v-v')$, tumque $\text{S.}\tfrac{1}{2}(u-u') = \text{S.}\tfrac{1}{2}(v-v')$, ſiue

$$\text{S.}\tfrac{1}{2}u\,.\,\text{C.}\tfrac{1}{2}u' - \text{C.}\tfrac{1}{2}u\,.\,\text{S.}\tfrac{1}{2}u' = \text{S.}\tfrac{1}{2}v\,.\,\text{C.}\tfrac{1}{2}v' - \text{C.}\tfrac{1}{2}v\,.\,\text{S.}\tfrac{1}{2}v',$$

et ſuffectis valoribus

$$\frac{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi\;\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi' - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\Phi'\;\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi)}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)\,(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi')}\sqrt{(e^2-1)}$$

$$= \frac{(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi\;\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi' - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi'\;\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi)}{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi)\,(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi')}\sqrt{(e'^2-1)}\;\;(\text{B}).$$

Multiplicata autem hac aequatione (B) per illam (C), conſequimur omnino

$$e\sqrt{(e^2-1)}\left(\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi} - \frac{\text{ſin.}\,\Phi'}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi'}\right) =$$

$$e'\sqrt{(e'^2-1)}\left(\frac{\text{ſin.}\,\psi}{1+e'\,\text{coſ.}\,\psi}\right) - \left(\frac{\text{ſin.}\,\psi'}{1+e\,\text{coſ.}\,\psi'}\right)$$

et denique ob $u-u' = v-v'$, quia

$$\text{C.}\,u = \text{C.}\tfrac{1}{2}u^2 + \text{S.}\tfrac{1}{2}u^2 = \frac{e+\text{coſ.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi},\ \text{etc. prodibit}$$

$$\text{Ar. C.}\left(\frac{e+\text{coſ.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}\right) - \text{Ar. C.}\left(\frac{e+\text{coſ.}\,\Phi'}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi'}\right) =$$

$$= \text{Ar. C.}\left(\frac{e'+\text{coſ.}\,\psi}{1+e\,\text{coſ.}\,\psi}\right) - \text{Ar. C.}\left(\frac{e'+\text{coſ.}\,\psi'}{1+e'\,\text{coſ.}\,\psi'}\right).$$

Quia nunc eſt $p^2 = a^2(e^2-1)$ et $p'^2 = a'^2(e'^2-1)$, fiet omnino $\dfrac{p^{3:2}}{(e^2-1)^{3:2}} = \dfrac{p'^{3:2}}{(e'^2-1)^{3:2}}$. At ſector hyperbolicus P, radiis vectoribus $r$, $r'$ et angulo $\Phi-\Phi'$ comprehenſus, eſt vti

§. prae-

§. praecedenti demonſtrauimus

$$= \frac{p^2}{2(e^2-1)^{3:2}}\Big[\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e+\text{coſ.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}\right)-\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e+\text{coſ.}\,\Phi'}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi'}\right)$$
$$+e'\surd(e'^2-1)\left(\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}-\frac{\text{ſin.}\,\Phi'}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi'}\right)\Big]$$

et ſector hyperbolicus Q, radiis vectoribus $\varrho$, $\varrho'$ angulo $\psi-\psi'$ comprehenſus

$$= \frac{p'^2}{2(e'^2-1)^{3:2}}\Big[\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e'+\text{coſ.}\,\psi}{1+e'\,\text{coſ.}\,\psi}\right)-\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e'+\text{coſ.}\,\psi'}{1+e'\,\text{coſ.}\,\psi'}\right)$$
$$+e\surd(e^2-1)\left(\frac{\text{ſin.}\,\psi}{1+e'\,\text{coſ.}\,\psi}-\frac{\text{ſin.}\,\psi'}{1+e'\,\text{coſ.}\,\psi'}\right)\Big];$$

hincque colligitur omnino ob $\frac{p}{e^2-1}=\frac{p'}{e'^2-1}$; $P:Q=\surd p:\surd p'$.

§. 20. Quemadmodum in Elementis Trigonometriae demonſtratur eſſe:

$$\text{coſ.}\,(\alpha+\beta)=\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta-\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta;$$
$$\text{ſin.}\,(\alpha+\beta)=\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta+\text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta;$$
$$\text{coſ.}\,(\alpha-\beta)=\text{coſ.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta+\text{ſin.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta;$$
$$\text{ſin.}\,(\alpha-\beta)=\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta-\text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta;$$

ita quoque pro hyperbola aequilatera demonſtrabitur, eſſe:

$$C.(\alpha+\beta)=C.\alpha\,C.\beta+S.\alpha\,S.\beta;$$
$$S.(\alpha+\beta)=S.\alpha\,C.\beta+C.\alpha\,S.\beta;$$
$$C.(\alpha-\beta)=C.\alpha\,C.\beta-S.\alpha\,S.\beta;$$
$$S.(\alpha-\beta)=S.\alpha\,C.\beta-C.\alpha\,S.\beta;$$

vnde colligitur

$$C.(\alpha+\beta)+C.(\alpha-\beta)=2\,C.\alpha\,C.\beta;$$
$$C.(\alpha+\beta)-C.(\alpha-\beta)=2\,S.\alpha\,S.\beta;$$
$$S.(\alpha+\beta)+S.(\alpha-\beta)=2\,S.\alpha\,C.\beta;$$
$$S.(\alpha-\beta)-S.(\alpha-\beta)=2\,C.\alpha\,C.\beta;$$

 tumque

tumque $C. 2\alpha + 1 = 2 C. \alpha^2$; $C. 2\alpha - 1 = 2 S. \alpha^2$; $S. 2\alpha = 2 S. \alpha C. \alpha$. His igitur praenotatis nunc demonſtratio noſtra quoque hunc in modum abſolui poteſt; ob

$$C.\,u = \frac{e + coſ.\,\Phi}{1 + e\,coſ.\,\Phi};\ \text{erit}\ coſ.\,\Phi = \frac{e - C.\,u}{e\,C.\,u - 1};$$

$$ſin.\,\Phi = \frac{S.\,u\,\sqrt{(e^2 - 1)}}{e\,C.\,u - 1}\ \text{et}\ \frac{e^2 - 1}{1 + e\,coſ.\,\Phi} = e\,C.\,u - 1;$$

quia igitur

$$r = \frac{p}{1 + e\,coſ.\,\Phi} = \frac{a\,(e^2 - 1)}{1 + e\,coſ.\,\Phi}\ \text{et}\ r' = \frac{a\,(e^2 - 1)}{1 + e\,coſ.\,\Phi'},$$

habebimus $r + r' = a\,(e\,(C.\,u + C.\,u') - 2)$; ſimilique modo $\varrho + \varrho' = a\,(e'\,(C.\,v + C.\,v') - 2)$; ideoque poſito $r + r' = \varrho + \varrho'$, erit quoque

$$e\,(C.\,u + C.\,u') = e'\,(C.\,v + C.\,v').$$

Tum vero ob

$$r^2 + r'^2 - 2rr'\,coſ.(\Phi - \Phi') = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'\,coſ.\,(\psi - \psi'),\ \text{fit}$$

$$r\,r'\,coſ.\tfrac{1}{2}(\Phi - \Phi'^2) = \varrho\varrho'\,coſ.\tfrac{1}{2}\,(\psi - \psi'^2);\ \text{ſiue}$$

$$\frac{(e^2 - 1)\,coſ.\tfrac{1}{2}\,(\Phi - \Phi')}{\sqrt{(1 + e\,coſ.\Phi)\,(1 + e\,coſ.\Phi')}} = \frac{(e'^2 - 1)\,coſ.\tfrac{1}{2}\,(\psi - \psi')}{\sqrt{(1 + e'coſ.\psi)(1 + e'coſ.\psi')}},$$

quae in hanc transformatur:

$$C.\tfrac{1}{2}u\,C.\tfrac{1}{2}u'\,(e - 1) + S.\tfrac{1}{2}u\,S.\tfrac{1}{2}u'\,(e + 1) =$$

$$C.\tfrac{1}{2}v\,C.\tfrac{1}{2}v'\,(e' - 1) + S.\tfrac{1}{2}v\,S.\tfrac{1}{2}v'\,(e' + 1),\ \text{id eſt}$$

$$e\,C.\tfrac{1}{2}(u + u') - C.\tfrac{1}{2}(u - u') = e'\,C.\tfrac{1}{2}(v + v') - C.\tfrac{1}{2}(v - v'),$$

quare quum ſit

$$e\,(C.\,u + C.\,u') = e\,C.\tfrac{1}{2}\,(u + u')\,C.\tfrac{1}{2}\,(u - u')\ \text{et}$$

$$e'\,(C.\,v + C.\,v') = e'\,C.\tfrac{1}{2}\,(v + v')\,C.\tfrac{1}{2}\,(v - v'),\ \text{erit}$$

$$e\,C.\tfrac{1}{2}\,(u + u') = e'\,C.\tfrac{1}{2}\,(v + v')\ \text{et}$$

$$C.\tfrac{1}{2}\,(u - u') = C.\tfrac{1}{2}\,(v - v'),$$

vnde

vnde ſimul colligitur fore

$$S.\tfrac{1}{2}(u-u') = S.\tfrac{1}{2}(v-v') \text{ et } u-u' = v-v'.$$

Denique vero prodibit

$$e\,C.\tfrac{1}{2}(u+u')\,S.\tfrac{1}{2}(u-u') = e'\,C.\tfrac{1}{2}(v+v')\,S.\tfrac{1}{2}(v-v'),$$

hoc eſt $e(S.u - S.u') = e'(S.v - S.v')$, ſiue

$$e\sqrt{(e^2-1)}\left(\frac{\textit{ſin.}\,\Phi}{1+e\,\textit{coſ.}\,\Phi} - \frac{\textit{ſin.}\,\Phi'}{1+e\,\textit{coſ.}\,\Phi'}\right) =$$

$$e'\sqrt{(e'^2-1)}\left(\frac{\textit{ſin.}\,\psi}{1+e'\,\textit{ſin.}\,\psi} - \frac{\textit{ſin.}\,\psi'}{1+e\;\;\textit{coſ.}\,\psi'}\right),$$

et, ob $u - u' = v - v'$,

$$\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e+\textit{coſ.}\,\Phi}{1+e\,\textit{coſ.}\,\Phi}\right) - \text{Arc. coſ.}\left(\frac{e+\textit{coſ.}\,\Phi'}{1+e\,\textit{coſ.}\,\Phi'}\right) =$$

$$\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e'+\textit{coſ.}\,\psi}{1+e'\,\textit{coſ.}\,\psi}\right) - \text{Arc. coſ.}\left(\frac{e'+\textit{coſ.}\,\psi'}{1+e'\,\textit{coſ.}\,\psi'}\right).$$

§. 21. Circa demonſtrationem noſtram in ſuperioribus allatam notari meretur, eam aliquanto faciliorem euadere ſi ponatur angulus $\Phi' = 0$, quo in caſu radius vector $r'$ in ipſum axem Ellipſis incidet, eritque $r' = \frac{p}{1+e}$, ipſa autem demonſtratio tunc hunc in modum concinnabitur. Ob $r + r' = \varrho + \varrho'$ et $s = \sigma$ fiet

$$(r+r')^2 - 4rr'\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi^2 = (\varrho+\varrho')^2 - 4\varrho\varrho'\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(\psi-\psi')^2,$$

ex quo colligitur:

$$(1-e)\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}} = (1-e'^2)\frac{\text{coſ.}\tfrac{1}{2}(\psi-\psi')}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi)(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi')}}.$$

Tumque ex aequatione $r + r' = \varrho + \varrho'$, iſthaec deducitur:

$$\frac{e\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi^2(1+e)}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{e'(\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi^2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\psi'^2(1+e')^2 - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi^2\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\psi'^2(1-e')^2}{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi)(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi')}.$$

Heic autem ſi ſtatuatur

$$\alpha = \frac{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\Phi\,\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}};$$

$$\beta = \frac{e\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\Phi\,\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}};$$

$$\alpha' = \frac{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi'\,(1+e') + \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi'\,(1-e')}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi)\,(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi')}};$$

$$\beta' = \frac{e'(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi'\,(1+e') - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi'\,(1-e')}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi)\,(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi')}};$$

ob $\alpha-\beta=\alpha'-\beta'$ et $\alpha\beta=\alpha\beta$, fit $\alpha=\alpha$, $\beta=\beta$; hoc eſt

$$\frac{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\Phi\,\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}} = \frac{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi'\,(1+e') + \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi'\,(1-e')}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi)\,(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi')}},$$

nec non

$$\frac{e\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\Phi\,\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}} = \frac{e'(\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi'\,(1+e') - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi'\,(1-e'))}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi)\,(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi')}}.$$

Tum vero ex priori harum aequationum colligitur ſimul

$$\frac{\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\Phi\,\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}} = \frac{(\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi' - \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi'\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi)\sqrt{(1-e'^2)}}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi)\,(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi')}},$$

qua per poſteriorem multiplicata fit

$$e\sqrt{(1-e^2)}\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi} = e'\sqrt{(1-e'^2)}\left(\frac{\text{ſin.}\,\psi}{1+e\,\text{coſ.}\,\psi} - \frac{\text{ſin.}\,\psi'}{1+e'\,\text{coſ.}\,\psi'}\right);$$

ſimulque patet eſſe

$$\text{Arc. coſ.}\left(\frac{e+\text{coſ.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}\right) = \text{Arc. coſ.}\left(\frac{e'+\text{coſ.}\,\psi}{1+e'\,\text{coſ.}\,\psi}\right) - \text{Arc. coſ.}\left(\frac{e'+\text{coſ.}\,\psi'}{1+e'\,\text{coſ.}\,\psi'}\right),$$

vnde omnino colligitur ſectores Ellipticos eſſe in ratione ſubdupla parametrorum principalium. Caeterum memorabilis proprietas angulorum $\psi$ et $\psi'$ heic locum habet, quae omnino attentione digna videtur. Quia ſcilicet eſt:

$$\frac{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\Phi\,\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}} = \frac{\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi'\,(1+e') + \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,\psi'\,(1-e')}{\sqrt{(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi)\,(1+e'\,\text{coſ.}\,\psi')}},\ \text{et}$$

*e* coſ.

$$\frac{e \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\Phi \sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e \operatorname{coſ.}\Phi)}} = \frac{e'(\operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\psi \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\psi'(1+e') - \operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\psi \operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\psi'(1-e'))}{\sqrt{(1+e'\operatorname{coſ.}\psi)(1+e'\operatorname{coſ.}\psi')}}.$$

Si prior harum aequationum multiplicetur per $e'$, fit

$$\frac{(e'+e)\operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\Phi\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e\operatorname{coſ.}\Phi)}} = 2e'(1+e')\frac{\operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\psi \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\psi'}{\sqrt{(1+e'\operatorname{coſ.}\psi)(1+e'\operatorname{coſ.}\psi')}}$$

nec non

$$(e'-e)\frac{\operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\Phi\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1+e\operatorname{coſ.}\Phi)}} = 2e'(1-e')\frac{\operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\psi \operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\psi'}{\sqrt{(1+e'\operatorname{coſ.}\psi)(1+e'\operatorname{coſ.}\psi')}}$$

et diuiſa hac aequatione per illam fiet omnino:

$$\frac{1-e'}{1+e'}\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}\psi \operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}\psi' = \frac{e'-e}{e'+e}, \text{ ſiue}$$

$$\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}\psi.\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}\psi' = \frac{e'-e}{e'+e}\cdot\frac{1+e'}{1-e'}.$$

Caeterum quum ſupra inuenerimus:

$$\frac{\operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\Phi\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e\operatorname{coſ.}\Phi)}} = \frac{(\operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\psi \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\psi' - \operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\psi' \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\psi)\sqrt{(1-e'^2)}}{\sqrt{(1+e'\operatorname{coſ.}\psi)(1+e'\operatorname{coſ.}\psi')}}$$

$$= \frac{(\operatorname{tang.}\frac{1}{2}\psi - \operatorname{tang.}\frac{1}{2}\psi')\operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\psi \operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\psi'\sqrt{(1-e'^2)}}{\sqrt{(1+e'\operatorname{coſ.}\psi)(1+e'\operatorname{coſ.}\psi')}},$$

fiet nunc

$$(\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}\psi - \operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}\psi')\sqrt{\left(\frac{1-e'}{1+e'}\right)} = \frac{\operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\Phi\sqrt{(1+e'\operatorname{coſ.}\Phi)(1+e'\operatorname{coſ.}\psi')}}{(1+e')\operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\psi\operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\psi'\sqrt{(1+e\operatorname{coſ.}\Phi)}}$$

$$= \frac{2e'\operatorname{ſin.}\frac{1}{2}\Phi}{(e'+e)\operatorname{coſ.}\frac{1}{2}\Phi\sqrt{(1+e)}} = \frac{2e'\operatorname{tang.}\frac{1}{2}\Phi}{(e'+e)\sqrt{(1+e)}},$$

ideoque colligitur

$$\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}\psi - \operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}\psi' = \frac{2e'\operatorname{tang.}\frac{1}{2}\Phi}{e+e'}\cdot\frac{\sqrt{(1+e')}}{\sqrt{(1+e)(1-e')}}.$$

Harum igitur aequationum ope nunc ſiue $\operatorname{tang.}\frac{1}{2}\psi$, ſeu $\operatorname{tang.}\frac{1}{2}\psi'$ per $\operatorname{tang.}\frac{1}{2}\Phi$ et conſtantes facile exprimetur.

§. 22. Si demonſtrationem noſtram ad ratiocinium Geometricum Cel. *Lamberti* accommodare velimus, ponendum eſt $r = r'$ et $\phi' = -\phi$, vnde deducitur primum

$$r \operatorname{coſ.} \phi = \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2}(\psi - \psi') \sqrt{\varrho \varrho'}, \text{ ſiue}$$

$$\frac{(1 - e^2) \operatorname{coſ.} \phi}{1 + e \operatorname{coſ.} \phi} = \frac{(1 - e'^2) \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}(\psi - \psi')}{\sqrt{(1 + e' \operatorname{coſ.} \psi)(1 + e' \operatorname{coſ.} \psi')}}.$$

Tumque ex aequatione $2r = \varrho + \varrho'$, colligitur

$$\frac{e(\operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\phi^4 (1 + e)^2 - \operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\phi^4 (1 - e)^2}{(1 + e \operatorname{coſ.} \phi)^2} =$$

$$\frac{e'(\operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\psi^2 \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\psi'^2 (1 + e')^2 - \operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\psi^2 \operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\psi'^2 (1 - e')^2}{(1 + e' \operatorname{coſ.} \psi)(1 + e' \operatorname{coſ.} \psi')},$$

quare ſi ponatur

$$\alpha = \frac{\operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\phi^2 (1 + e) \operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\phi^2 (1 - e)}{1 + e \operatorname{coſ.} \phi}; \text{ et}$$

$$\beta = \frac{e(\operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\phi^2 (1 + e) + \operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\phi^2 (1 - e))}{1 + e \operatorname{coſ.} \phi},$$

pro $\alpha'$ vero et $\beta'$ denominationes ſupra adhibitae retineantur, fiet nunc denuo $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; hoc eſt:

$$\frac{e + \operatorname{coſ.} \phi}{1 + e \operatorname{coſ.} \phi} = \frac{\operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\psi \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\psi' (1 + e') + \operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\psi \operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\psi' (1 - e')}{\sqrt{(1 + e' \operatorname{coſ.} \psi)(1 + e' \operatorname{coſ.} \psi')}} \text{ et}$$

$$e = e' \frac{(\operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\psi \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\psi' (1 + e') - \operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\psi \operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\psi' (1 - e'))}{\sqrt{(1 + e' \operatorname{coſ.} \psi)(1 + e' \operatorname{coſ.} \psi')}}.$$

Ex priori vero concludimus quoque

$$\frac{\operatorname{ſin.} \phi \sqrt{(1 - e^2)}}{1 + e \operatorname{coſ.} \phi} = \frac{(\operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\psi \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\psi' - \operatorname{ſin.} \frac{1}{2}\psi' \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\psi) \sqrt{(1 - e'^2)}}{\sqrt{(1 + e' \operatorname{coſ.} \psi)(1 + e' \operatorname{coſ.} \psi')}},$$

et illa per praecedentem multiplicata obtinemus:

$$2e\sqrt{(1 - e^2)} \cdot \frac{\operatorname{ſin.} \phi}{1 + e \operatorname{coſ.} \phi} = e' \sqrt{(1 - e'^2)} \left(\frac{\operatorname{ſin.} \psi}{1 + e' \operatorname{coſ.} \psi} - \frac{\operatorname{ſin.} \psi'}{1 + e' \operatorname{coſ.} \psi'}\right),$$

tumque

$$2 \operatorname{Arc.} \operatorname{coſ.} \left(\frac{e + \operatorname{coſ.} \phi}{1 + e \operatorname{coſ.} \phi}\right) = \operatorname{Arc.} \operatorname{coſ.} \left(\frac{e' + \operatorname{coſ.} \psi}{1 + e' \operatorname{coſ.} \psi}\right) - \operatorname{Arc.} \operatorname{coſ.} \left(\frac{e' + \operatorname{coſ.} \psi'}{1 + e' \operatorname{coſ.} \psi'}\right).$$

§. 23.

§. 23. Quum ſit $r = \frac{p}{1 + e\, coſ. \Phi}$, erit $coſ. \Phi = \frac{p}{e r} - \frac{1}{e}$; hincque $\partial \Phi . ſin. \Phi = \frac{p \partial r}{e r^2}$, et $ſin. \Phi = \frac{1}{e r} \sqrt{(e^2 r^2 - (p - r)^2)}$, ideoque $\partial \Phi = \frac{p \partial r}{r \sqrt{(e^2 r^2 - (p - r)^2)}}$, et $r^2 \partial \Phi = \frac{p r \partial r}{\sqrt{(e^2 r^2 - (p - r)^2)}}$, quae formula ob $p = a(1 - e^2)$ in hanc transformatur:

$$r^2 \partial \Phi = \frac{p r \partial r}{\sqrt{(1 - e^2)} \sqrt{(- a^2 (1 - e^2) + 2 a r - r^2)}};$$

quia igitur eſt $\frac{r^2 \partial \Phi}{\sqrt{p}}$ tempori proportionale, quo ſector Ellipticus $\frac{1}{2} r^2 \partial \Phi$ percurritur, erit elementum temporis quoque proportionale formulae differentiali $\frac{a r \partial r}{\sqrt{(- a^2 (1 - e^2) + 2 a r - r^2)}}$. Caeterum haec expreſſio pro differentiali $r^2 \partial \Phi$ per ſola ratiocinia Geometrica ſic eruitur; quia eſt $\partial r : r \partial \Phi = r \partial r : r^2 \partial \Phi = 1 : tang. TQF$, ſitque $ſin. TQF : 1 = CH : CO$, fiet $coſ. TQF = \frac{\sqrt{(CO^2 - CH^2)}}{CO}$. Atqui eſt $\sqrt{(CO^2 - CH^2)} = \sqrt{(FC^2 - FD^2)}$, quum igitur ſit $FC = ea$ et $FD = CA - QF = a - r$, erit omnino Tab. IV. Fig. 1.

$$\sqrt{(FC^2 - FD^2)} = \sqrt{(e^2 a^2 - (a - r)^2)}$$

et ob $CH = \frac{p}{\sqrt{(1 - e^2)}}$, fiet

$$tang. TQF = \frac{CH}{\sqrt{(FC^2 - FD^2)}} = \frac{p}{\sqrt{(1 - e^2)}\sqrt{(a^2 e^2 - (a - r)^2)}},$$

vnde patet propoſitum. Quod ſi iam integrale formulae $\frac{r \partial r}{\sqrt{(- a^2 (1 - e^2) + 2 a r - r^2)}}$ ita accipiatur vt euaneſcat poſito $r = \delta$, ex iis quae ſupra demonſtrauimus omnino liquet, hanc formulam differentialem reduci poſſe ad differentiam binarum aliarum eiusdem formae, ſcilicet

$$\frac{\varrho \partial \varrho}{\sqrt{(e^2 a^2 - (a - \varrho)^2)}} - \frac{\varrho' \partial \varrho'}{\sqrt{(e'^2 a^2 - (a - \varrho')^2)}},$$

modo ſumatur $\varrho + \varrho' = r + \delta$, tumque ſit corda quae ſubtendit arcum Ellipticum radiis vectoribus $r$ et $\delta$ interceptum, aequalis illi quae reſpondet ſectori Elliptico radiis vectoribus $\varrho$ et $\varrho'$ intercepto. Simili quoque ratione liquet, pro Hyperbola formulam differentiam $\frac{r \partial r}{\sqrt{((a + r)^2 - e^2 a^2)}}$ reduci poſſe ad differentiam

tiam binarum formularum

$$\frac{\varrho\,\partial\varrho}{\sqrt{((a+\varrho)^2-e'^2\,a^2)}}-\frac{\varrho'\,\partial\varrho'}{\sqrt{((a^2+e'^2)-e'^2\,a^2)}},$$

iiſdem pro $\varrho$ et $\varrho'$ praeſcriptis conditionibus ac ſupra.

§. 24. Hinc igitur nunc occaſio ſubminiſtratur disquirendi, an non in genere huiusmodi formula $\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(\mathrm{H}\,r+\mathrm{M}\,r+\mathrm{N}\,r^2)}}$ ad differentiam binarum aliarum cognominum reduci queat, vbi quidem Illuſtr. *de la Grange* ſublimi ratiocinio Analytico demonſtrauit, hanc formulam, vtcunque coefficientes H, M, N fuerint comparati, ſemper ad differentiam binarum huiusmodi formularum

$$\frac{x\,\partial x}{\sqrt{(\mathrm{L}+\mathrm{M}\,x+\mathrm{N}\,x^2)}}-\frac{y\,\partial y}{\sqrt{(\mathrm{L}+\mathrm{M}\,y+\mathrm{N}\,y^2)}}$$

reduci poſſe. Verum dum Illuſtris hic Geometra exinde inferre contendit, iſtam formulam differentialem $\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(\mathrm{H}+\mathrm{M}\,r+\mathrm{N}\,r^2)}}$, ſemper et omni caſu eſſe proportionalem elemento temporis in Ellipſi, eius ratiocinium vix quidem ſibi rite conſtare poteſt. Nam dum (loco citato *Actor. Berolinenſ. p.* 198.) invenerat

$$\sqrt{(\mathrm{H}+\mathrm{M}r+\mathrm{N}r^2)}=\frac{c\beta}{2c}\sqrt{(-p^2+2pr-(1-e^2)\,r^2)},$$

facile perſpicitur hanc aequalitatem non ſubſiſtere poſſe, niſi ſi formula $\mathrm{H}+\mathrm{M}\,r+\mathrm{N}\,r^2$ factores habeat reales, tumque inſuper ſint N et H quantitates negatiuae. Eſt enim vt ſupra vidimus

$$\sqrt{(-p^2+2pr-(1-e^2)\,r^2)}=\sqrt{(1-e^2)}\sqrt{(a^2\,e^2-(a-r)^2)}$$
$$=\sqrt{(1-e^2)}\sqrt{(-a^2\,(1-e^2)+2\,a\,r-r^2)};$$

quamobrem fiet omnino

$$\sqrt{(-\tfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{M}}-\tfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\,r-r^2)}=\sqrt{(-a^2\,(1-e^2)+2\,a\,r-r^2)};$$

ideoque

$$2a = -\frac{M}{N} \text{ et } a^2(1-e^2) = \frac{H}{N}.$$

Praeterea euidens eſt hanc aequalitatem

$$\sqrt{(H + Mr + Nr^2)} = \frac{c\beta}{2e}\sqrt{(-p^2 + 2pr - (1-e^2)r^2)}$$

pro ſectoribus hyperbolicis quoque ſubſiſtere poſſe, erit autem tunc

$$\sqrt{(\frac{H}{N} + \frac{M}{N} + r^2)} = \sqrt{(-a^2(e^2-1) + 2ar + r^2)};$$

ideoque $2a = \frac{M}{N}$ et $\frac{H}{N} = -a^2(e^2-1)$, quare heic praeſcribitur non ſolum vt formula $H + Mr + Nr^2$ factores habeat rationales, verum etiam vt N ſit quantitas poſitiua, H autem negatiua.

§. 25. Caeterum quemadmodum ex Theoremate Cel. *Lambert* concluditur, formulas $\frac{r\partial r}{\sqrt{(-L + Mr - r^2)}}$, $\frac{r\partial r}{\sqrt{(-L + Mr + r^2)}}$, ad differentiam binarum aliarum conſimilis formae reduci poſſe; ita hinc quoque denuo colligitur, quoties in genere iſta expreſſio $H + Mr + Nr^2$ factores habeat reales, tum $\frac{r\partial r}{\sqrt{(H + Mr + Nr^2)}}$ reduci poſſe ad differentiam binarum huiusmodi formularum:

$$\frac{x\partial x}{\sqrt{(H + Mx + Nx^2)}} - \frac{y\partial y}{\sqrt{(H' + My + Ny^2)}}.$$

Nam ſi ſupponamus coefficientem M ſemper ſigno affici poſitiuo, quia pro ſigno negatiuo loco $r$ ſubſtituere ſufficiet $-r$, nunc videbimus quomodo reductiones pro formulis

$$\frac{r\partial r}{\sqrt{(L + Mr + Nr^2)}} \text{ et } \frac{r\partial r}{\sqrt{(L + Mr - r^2)}},$$

ex prioribus deriuentur. Primum igitur in formula $\frac{r\partial r}{\sqrt{(-L + Mr - r^2)}}$, ſi loco $r$ ſubſtituatur $-r$, tumque denominatur per $\sqrt{-1}$ multiplicetur, iſta formula omnino in hanc transformatur $\frac{r\partial r}{\sqrt{(L + Mr + Nr^2)}}$, vnde ob

$$\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(-L+Mr-Nr^2)}} = \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(-L'+Mx-Nx^2)}} - \frac{y\,\partial y}{\sqrt{(-L'+My+Ny^2)}},$$

fit quoque

$$\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(L+Mr+Nr^2)}} = \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(L'+Mx+Nx^2)}} - \frac{y\,\partial y}{\sqrt{(L'+My+Ny^2)}}.$$

Simili modo ſi in formula $\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(-L+Mr-r^2)}}$ loco $r$ ſcribatur $-r$ et denominator multiplicetur per $\sqrt{-1}$, prodibit formula $\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(L+Mr-r^2)}}$, vnde quoque fiet

$$\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(L+Mr-r^2)}} = \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(L'+Mx-x^2)}} - \frac{y\,\partial y}{\sqrt{(L'+My-y^2)}}.$$

§. 26. Quum reductio formularum differentialium $\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(L+Mr+r^2)}}$, $\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(L+Mr-r^2)}}$, in praecedenti §. inſtituta per quantitates imaginarias procedat, nunc operae pretium eſt vt disquiramus, annon alia ratione hae formulae ad iſtas formas $\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(-L+Mr-r^2)}}$ et $\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(-L+Mr+r^2)}}$ reduci queant. Si igitur loco M ſcribatur $2a$, et loco L quantitas $(m^2-1)a^2$, vbi $m > 1$, erit formula

$$\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(L+Mr-r^2)}} = \frac{r\,\partial r}{\sqrt{(m^2a^2-(a-r^2))}},$$

nunc ponatur $a-r = na-u$, ita vt $n > m$, fiet igitur $\partial r = \partial u$ et $r = u-(n-1)a$, hincque

$$\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(m^2a^2-(a-r)^2)}} = \frac{\partial u\,(u-(n-1)a)}{\sqrt{(m^2a^2-(na-u)^2)}} = \frac{\partial u\,(u-(n-1)a)}{\sqrt{((m^2-n^2)a^2+2nau-u^2)}};$$

vbi nunc quidem denominatoris forma ea eſt quae ſupponitur pro reductione ad ſectores Ellipticos, ob $(m^2-n^2)a^2$ quantitatem negatiuam. Quia nunc eſt

$$\int\frac{\partial u\,(u-(n-1)a)}{\sqrt{((m^2-n^2)a^2+2nau-u^2)}} = -\sqrt{(m^2a^2-(na-u)^2)}\,a\,\text{Arc. coſ.}\,\frac{na-u}{ma},$$

poſterior autem horum terminorum ſectorem Ellipticum exprimat,

mat, nunc omnino liquet quomodo expreſſio $\frac{r\partial r}{\sqrt{(L+Mr+r^2)}}$ per quantitatem algebraicam et ſectorem Ellipticum exprimatur. Scilicet ſi centro C interuallo $CA = na$ deſcribatur circulus AKB, tumque ſemiaxe maiore AC et minore CH, ellipſis AHB, ita vt ſit diſtantia foci a centro $CF = ma$; nunc ſi ad punctum quodcunque huius ellipſis P ducatur ex foco F recta $FP = u$, ex P in axem maiorem normalis demittatur PR quae circulo in Q occurrat, et iungantur PC, QC. Iam quia coſ. $QCA = \frac{CR}{CA}$, ſitque $CA \cdot TP = CA^2 - CF \cdot CQ$, fiet omnino $\frac{CR}{CA} = \frac{CA - FP}{CF} = \frac{na - u}{ma}$. Si nunc angulus QCA exprimatur per $\theta$, fiet coſ. $\theta = \frac{na-u}{ma}$, et ſector circuli ACQ $= \frac{1}{2} n^2 a^2 \theta$, hinc quum ſit ſector ACQ : ſector. ACP $=$ CK : CH $= na : a\sqrt{(n^2 - m^2)}$, erit ſector. ACP $= \frac{na^2\partial\sqrt{(n^2-m^2)}}{2}$. Porro quum ſit $PR^2 : CA^2 - CR^2 = CH^2 : CA^2$, erit omnino $CA^2 - CR^2 = \frac{CA^2 \cdot PR^2}{CH^2}$, et introductis expreſſionibus Analyticis, ob $\frac{CR}{CA} = \frac{na-u}{ma}$, $m^2 a^2 - (na - u)^2 = \frac{m^2 a^2 y^2}{n^2 - m^2}$, poſito $PR = y$; hinc ſi ponatur $CH = b = a\sqrt{(n^2 - m^2)}$, fiet

$$b\sqrt{(m^2 a^2 - (na - u)^2)} = may = FC \cdot PR,$$

ideoque $b\sqrt{(m^2 a^2 - (na-u)^2)}$ exprimet duplam aream trianguli FPC, ſi nunc ſector Ellipticus AFP exprimatur littera S et triangulum FPC littera T, fiet ſector

$$ACP = S + T = \frac{na^2\partial\sqrt{(n^2-m^2)}}{2}, \text{ hinc}$$

$$a\theta = \frac{2S}{na\sqrt{(n^2-m^2)}} + \frac{2T}{na\sqrt{(n^2-m^2)}} \text{ et}$$

$$a\theta - \sqrt{(m^2a^2 - (na-u)^2)} = \frac{2T}{na\sqrt{(n^2-m^2)}} + \frac{2T}{na\sqrt{(n^2-m^2)}}$$

$$- \frac{2T}{a\sqrt{(n^2-m^2)}} = \frac{2S}{na\sqrt{(n^2-m^2)}} + \frac{2T(1-n)}{na\sqrt{(n^2-m^2)}},$$

quae expreſſio quoties $n = 1$, omnino abit in $\frac{2S}{a\sqrt{(1-m^2)}}$. Nunc igitur erit

$$\int \frac{r\partial r}{\sqrt{(L+Mr-r^2)}} = \int \frac{r\partial r}{\sqrt{(m^2a^2-(a-r)^2)}} = \frac{2S}{na\sqrt{(n^2-m^2)}} + \frac{2T(1-n)}{na\sqrt{(n^2-m)}} + C,$$

Tab. V. Fig. 9.



vbi

vbi conſtantis indoles definitur per terminum ex quo differentiatio incipit; ponamus igitur hunc terminum eſſe $r = \delta$, fietque tum $u = \delta + (n-1)a$, vnde ſi ducatur ad Ellipſin radius vector $FP' = u' = \delta + (n-1)a$ et ponatur ſector Ellipticus $AFP' = S'$, triangulum vero $FP'C = T'$, erit omnino

$$\int \frac{r\,\partial r}{\sqrt{(L+Mr-r^2)}} = \frac{2(S-S')}{na\sqrt{(n^2-m^2)}} - \frac{2(T-T')(n-1)}{na\sqrt{(n^2-m^2)}}.$$

Hinc igitur patet iſtud integrale $\int \frac{r\,\partial r}{\sqrt{(L+Mr-r^2)}}$, quoties fuerit L quantitas poſitiua, minime quidem ſtatui poſſe proportionale tempori, quo ſector Ellipticus circa focum deſcribitur.

Tab. IV. §. 27. Quod ſi nunc ponatur $FN = u'$, $FM = u$,
Fig. 6. ſector $AFM = S$, ſector $AFN = S'$, triangulum $FMC = T$,
N. 1. triangulum $FNC = T'$, poſito ſemiaxe maiori $CA = na$ et diſtantia $FC = ma$; tum vero ſimili ratione ponatur in altera
Fig. 6. N. 2. ellipſi $aqb$, $ac = na$, $fc = m'a$, ſector $afm = \sigma$, $afn = \sigma'$, triangulum $fcm = \tau$ et $fcn = \tau'$, et ſi ſupponatur eſſe cordam $NM = nm$ et $FM + FN = fm + fn$, fiet per ea quae ſupra demonſtrauimus, ſector $NFM$ : ſect. $nfm = S - S' : \sigma - \sigma' = CH : cb = \sqrt{(n^2-m^2)} : \sqrt{(n^2-m'^2)}$; ſimilique modo

$$T - T' : \tau - \tau' = \sqrt{(n^2-m^2)} : \sqrt{(n^2-m'^2)}.$$

Iam ſi, radiis vectoribus $fm$, $fn$ per $v$, $v'$ indigitatis, ponatur $x = v - (n-1)a$, $y = v' - (n-1)a$, demonſtrabitur vt in §. praecedenti, fore:

$$\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(L'+Mx-x^2)}} - \int \frac{y\,\partial y}{\sqrt{(L'+My-y^2)}} = \frac{2(\sigma-\sigma')}{na\sqrt{(n^2-m'^2)}} - \frac{2(\tau-\tau')(n-1)}{na\sqrt{(n^2-m'^2)}},$$

modo ſcilicet ſupponatur $n > m'$, hinc ergo colligitur fore,

$$\text{ob } \frac{2(S-S')}{na\sqrt{(n^2-m^2)}} - \frac{2(T-T')(n-1)}{na\sqrt{(n^2-m^2)}} = \frac{2(\sigma-\sigma')}{na\sqrt{(n^2-m'^2)}} - \frac{2(\tau-\tau')(n-1)}{na\sqrt{(n^2-m'^2)}},$$

$$\frac{r\,\partial r}{\sqrt{(L+Mr-r^2)}} = \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(L'+Mx-x^2)}} - \frac{y\,\partial y}{\sqrt{(L'+My-y^2)}},$$

vbi quidem erit

$$x + y = v + v' - 2(n-1)a = u + u' - 2(n-1)a = r + \delta.$$

Simili

Simili autem ratione qua $\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r - r^2)}}$ nunc ad ſectorem Ellipticum circa focum deſcriptum et quantitatem algebraicam fuerit reductum, etiam $\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r + r^2)}}$, quoties iſta forma in factores reales eſt reſolubilis, ad ſectorem hyperbolicum circa focum deſcriptum et quantitatem algebraicam reduci poteſt, cui rei explicandae, cum ex ſuperioribus abunde ſatis clareat, non eſt vt vlterius immoremur. Quamuis autem iſta expreſſio $\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r - r^2)}}$ non ſtatui queat proportionalis ſectori Elliptico circa focum deſcripto, tamen facile reducitur ad ſectorem Ellipticum circa aliud quodpiam punctum in axe minori deſcriptum. Nam ob

$$a\,\theta\,\sqrt{(m^2 a^2 - (n a - u)^2)} = \frac{2 S}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}} - \frac{2 T (n - 1)}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}},$$

vbi S = ſect. A F P, et T = triang. F P C, ſi nunc capiatur F I : F C = $n$ — 1 : 1, fiet triangulum I P F = 2 T ($n$ — 1), ideoque ſector A I P = A F P — Δ I P F = S — T ($n$ — 1), vnde ſi iſte ſector A I P exprimatur per U, fiet Tab. V. Fig. 9.

$$a\,\theta - \sqrt{(m^2 a^2 - (n a - u)^2)} = \frac{2 U}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}}.$$

Hincque ſi iungatur I P′, et exprimatur ſector A I P′ per U′, fiet omnino $\int \frac{r \partial r}{\sqrt{(L + M r - r^2)}} = \frac{2 (U - U')}{n a \sqrt{(n^2 - m^2)}}$, id eſt duplo ſectoris Elliptici P I P′, diuiſo per quantitatem $n\,a\,\sqrt{(n^2 - m^2)}$.

§. 28. Nunc denique iſte caſus remanet expendendus, quo formula L + M $r$ + $r^2$ in factores reales prorſus non eſt reſolubilis. Pro hoc igitur caſu ſupponamus centro C, ſemiaxe transuerſo C A et coniugato C H deſcriptas eſſe hyperbolas coniugatas A M Q, H L L′, et ſi ex puncto quocunque L hyperbolae coniugatae in axem transuerſum demittatur normalis L P, erit L P² — C H² : C P² = C H² : C A². Hinc ſi dicatur C A = $a$, C H = $b$, diſtantia foci a centro C F = $c$ = $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, abſciſſa C P = $u$ et applicata L P = $y$, erit $y^2 - b^2 : u^2 = b^2 : a^2$, vnde colligitur Fig. 10.

 $y^2 =$

$y^2 = \frac{b^2}{a^2} u^2 + b^2$, $y = \frac{b}{a} \surd (u^2 + a^2)$, et $\partial y = \frac{b\,u\,\partial u}{a \surd (u^2 + a^2)}$, hinc fiet

$$u \partial y - y \partial u = \frac{b}{a} \cdot \frac{u^2 \partial u}{\surd (u^2 + a^2)} - \frac{b}{a} \partial u \surd (u^2 + a^2) = - \frac{a\,b\,\partial u}{\surd (u^2 + a^2)}.$$

Iam ſi punctum $l$ ſumatur proximum ipſi L et iungantur C L, C $l$, nec non F L, F $l$, tumque recta C L exprimatur per $z$ et angulus L C H per $\zeta$, erit elementum L C $l = + \frac{1}{2} z^2 \partial \zeta$, atqui $z^2 \partial \zeta = - u \partial y + y \partial u$, quare erit elementum

$$\text{L C } l = y \partial u - u \partial y = \frac{a\,b\,\partial u}{\surd (u^2 + a^2)}.$$

Si nunc excentricitas hyperbolae exprimatur per $e$, erit $c = e a$, tumque loco $u$ ſubſtituatur $a v = c u - a^2$, hoc eſt $u = \frac{v + a}{e}$ eritque $\partial u = \frac{\partial v}{e} = \frac{a \partial v}{c}$, nec non

$$\surd (u^2 + a^2) = \frac{1}{e} \surd (v^2 + 2 a v + a^2 (1 + e^2)),$$ quare fiet

$$\frac{a\,b\,\partial u}{\surd (u^2 + a^2)} = \frac{a\,b\,\partial v}{\surd (a^2 (1 + e^2) + 2 a v + v^2)}.$$

Quum nunc ſit

$$\int \frac{r \partial r}{\surd (L + 2 M r + r^2)} = \surd (L + 2 M r + r^2) - \int \frac{M \partial r}{\surd (L + 2 M r + r^2)},$$

euidens omnino eſt formulam differentialem $\frac{a \partial v}{\surd (a^2 (1 + e^2) + 2 a v + v^2)}$ cum iſthac $\frac{M \partial r}{\surd (L + 2 M r + r^2)}$ plane coincidere, ſiquidem ponatur $v = r$, $M = a$, et $L = a^2 (1 + e^2)$. Tum vero ſi ſupponamus ordinatam L P occurrere hyperbolae A M Q in F, ſi iungatur F M, erit F M . C A = C P . C F — C A², ideoque F M $= v = \frac{c u}{a} - a$. Tum vero ſi aliud quodcunque punctum L′ in hyperbola coniugata aſſumatur, et exinde normalis demittatur ad axem tranſuerſum L′P′, quae hyperbolae AMQ occurrat in M′ et iungatur F M′ $= v'$, erit area hyperbolica

$$\text{H C L}' = \int \frac{a\,b\,\partial v'}{\surd (a^2 (1 + e^2) + 2 a v' + v'^2)},$$

hincque fiet area

$$\text{L C L}' = \int \frac{a\,b\,\partial v'}{\surd (a^2 (1 + e^2) + 2 a v' + v'^2)} - \int \frac{a\,b\,\partial v}{\surd (a^2 (1 + e^2) + 2 a v + v^2)}.$$

Prae-

Praeterea obſeruandum eſt eſſe

$$b\sqrt{(L+2Mr+r^2)} = b\sqrt{(a^2(1+e^2)+2av+v^2)}$$

$$= b\sqrt{(c^2+(a+v)^2)},$$ vbi ob $a+v=\frac{cu}{a}$ fit quoque

$$b\sqrt{(L+2Mr+r^2)}=\frac{bc}{a}\sqrt{(a^2+u^2)},$$

atqui $\frac{b}{a}\sqrt{(a^2+u^2)}=y$, erit igitur

$$b\sqrt{(L+2Mr+r^2)}=cy,$$

id eſt aequalis duplo trianguli L C F. Hinc colligitur area hyperbolica

$$HCFL = \text{ſect.}\, HCL + \Delta\, LCF = \tfrac{1}{2}\int\frac{ab\,\partial v}{\sqrt{(a^2(1+e^2)+2av+v^2)}}$$
$$+ \tfrac{1}{2} b\sqrt{(a^2(1+e^2)+2av+v^2)},$$

et area hyperbolica

$$HCFL' = \tfrac{1}{2}\int\frac{ab\,\partial v'}{\sqrt{(a^2(1+e^2)+2av'+v'^2)}}$$
$$+ \tfrac{1}{2} b\sqrt{(a^2(1+e^2)+2av+v'^2)},$$

vnde fit ſector hyperbolicus

$$LFL' = \tfrac{1}{2}\int\frac{ab\,\partial v'}{\sqrt{(a^2(1+e^2)+2av'+v'^2)}} - \tfrac{1}{2}\int\frac{ab\,\partial v}{\sqrt{(a^2(1+e^2)+2av+v^2)}}$$
$$+\tfrac{1}{2}b\sqrt{(a^2(1+e^2)+2av'+v'^2)}-\tfrac{1}{2}b\sqrt{(a^2(1+e^2)+2av+v^2)}$$
$$=\tfrac{1}{2}b\cdot\int\frac{r'\partial r'}{\sqrt{(L+2Mr'+r'^2)}}-\tfrac{1}{2}b\int\frac{r\partial r}{\sqrt{(L+2Mr+r^2)}}.$$

Tum vero hinc liquet, in aliis hyperbolis coniugatis, quibus idem competit axis tranſuerſus $a$, coniugatus vero ſit $b'$, exiſtente excentricitate $e'$ ſi puncta $l$, $l'$ in hyperbola coniugata, $m$ et $m'$ in hyperbola principali ita determinentur, vt ſit $fm+fm'=FM+FM'$, et corda $mm'=MM'$, eſſe omnino, ſi iam $fm$, $fm'$ exprimantur per $\varrho$, $\varrho'$,

$$\int\frac{\varrho'\partial\varrho'}{\sqrt{(L'+2M\varrho'+\varrho'^2)}}-\int\frac{\varrho\partial\varrho}{\sqrt{(L'+2M\varrho+\varrho^2)}}=\int\frac{r'\partial r'}{\sqrt{(L+2Mr'+r'^2)}}-\int\frac{r\partial r}{\sqrt{(L+2Mr+r^2)}};$$

vbi $L'=a^2(1+e'^2)$. Quomodo autem haec propoſitio exacte demonſtrari queat, nondum quidem mihi liquet.

---

DETER-

# DETERMINATIO MOTVVM
# PENDVLI COMPOSITI BIFILI
## EX PRIMIS MECHANICAE PRINCIPIIS PETITA.

Auctore

*NICOLAO FVSS.*

*Conuent. exhib. d. 17 Mart. 1785.*

§. 1.

Quantis Theoria oſcillationum ſummorum virorum, *Dan. Bernoullii*, *Euleri*, aliorumque, locupletata ſit inuentis qui nouit, mirabitur forſan, me argumentum toties agitatum denuo in ſcenam prouocare eiusque tractationem hic ſuscipere. Non ſolum enim vniuerſa motus corporum oſcillantium et vibrantium doctrina modo laudatorum Geometrarum ſtudio ad ſummum, quod quidem, ob defectum Analyſeos, attingere po eſt perfectionis faſtigium euecta videtur; ſed etiam ipſe caſus, quem hic tractare mihi propoſui, ab Illuſtri quondam *Daniele Bernoulli* in Commentariis Academiae noſtrae ſemel iterumque conſideratus fuit. Aſt ipſa illa eius poſtrema de hoc argumento commentatio, cui titulus eſt: *De motibus reciprocis, compoſitis, multifariis, nondum exploratis, qui in pendulis bimembribus facilius obſeruari poſſint* (V. Nouor. Comment. T. XIX.) mihi de hoc argu-

argumento cogitandi anſam dedit; non quod inuentis tanti viri aliquid addere voluerim, ſed ea potiſſimum ratione, vt, methodum vulgarem adhibendo, oſtenderem, quomodo hi motus immediate per prima Mechanicae principia explicari queant, ſine ſubſidio principii *Bernoulliani*, quippe quod ipſum ex iisdem principiis mechanicis deduci poteſt, vti Ill. *Eulerus* oſtendit (Nouor. Comment. T. XIX. p. 294.). Fateor equidem ſolutionem noſtra methodo adornatam, pro numero corpusculorum pendulum conſtituentium ternario maiore, ſummis premi calculi difficultatibus; verum *Bernoulliana* methodus eodem laborat incommodo, cum taedioſa ſingularum radicum inueſtigatio negotium faceſſat in aequatione, quae cuiuslibet corporis elongationem ab axe indicat, pro oſcillationibus ſimplicibus et perfecte ſynchronis in ſyſtemate formandis. Quo igitur conſenſus meae ſolutionis cum *Bernoulliana* ex longe alio fonte deriuata pateſcat, eam hic breuiter exponere eosdemque, expeditis generalioribus, caſus determinatos tractare conſtitui, quibus Ill. *Bernoulli* methodum ſuam illuſtrauerat.

## Inueſtigatio formularum generalium.

§. 2. Concipiatur filum tenuiſſimum et grauitatis expers O A B, quod, ex puncto O ſuspenſum et duobus corpusculis in A et B onuſtum, a pauſa quacunque ad motum concitatum, poſt elapſum tempus $t$ ſitum teneat O A B in figura expreſſum. Ad huius fili motum determinandum in rectam verticalem O V ex punctis A et B agantur normales A P et B Q, et vocetur longitudo fili O A $= a$, longitudo fili A B $= b$; tum vero ſit A maſſa ſeu pondus corporis A, B vero maſſa corporis B, quae quatuor quantitates igitur ſunt conſtantes. Quod variabiles attinet, ſtatuantur pro praeſente penduli ſitu interualla O P $= x$, P A $= y$, O Q $= x'$, Q B $= y'$, anguli vero A O P $= \zeta$, Tab. VI. Fig. 1.

B A $q = \eta$ (ducta ſcilicet per punctum A verticali $a q$). His poſitis erit

$$x = a \text{ coſ. } \zeta; \qquad x' = a \text{ coſ. } \zeta + b \text{ coſ. } \eta;$$
$$y = a \text{ ſin. } \zeta; \qquad y' = a \text{ ſin. } \zeta + b \text{ ſin. } \eta;$$

ita vt angulis $\zeta$ et $\eta$ totus penduli ſtatus determinetur.

§. 3. Iam pro determinando penduli motu conſiderari debent omnes vires, quibus ambo corpuſcula A et B ſollicitantur, inter quas ſtatim occurrunt ipſa corporum pondera, dum corpus A in directione A $q$, vi A, et corpus B in directione B $r$, vi B, verticaliter deorſum trahitur; tum vero ſi ponatur tenſio fili O A $=$ P et tenſio fili A B $=$ Q, corpus A inſuper ſollicitabitur in directione A O vi $=$ P et in directione A B vi $=$ Q; corpus autem B a tenſione Q vrgebitur in directione B A. Has nunc vires ſecundum duas directiones fixas reſolui oportet, alteram verticalem, alteram vero horizontalem; quo facto vis A O $=$ P dabit pro directione A $a$ vim verticalem P coſ. $\zeta$ et pro directione A P vim horizontalem P ſin. $\zeta$; deinde vero vis A B $=$ Q dabit pro directione verticali B $b$ vim Q coſ. $\eta$ et pro directione horizontali B $q$ vim Q ſin. $\eta$. Iam colligantur vires quibus ambo corpora ſollicitantur, eritque pro corpore A

vis verticalis ſecundum A $q$ $=$ A $-$ P coſ. $\zeta$ $+$ Q coſ. $\eta$;
vis horizontalis ſecundum A $\alpha$ $=$ $-$ P ſin. $\zeta$ $+$ Q ſin. $\eta$;

pro altero autem corpore B habebimus

vim verticalem ſecundum B $r$ $=$ B $-$ Q coſ. $\eta$;
vim horizontalem ſecundum B $\beta$ $=$ $-$ Q ſin. $\eta$.

§. 4. His iam viribus inuentis conſideremus motum vtriusque corporis, quem pariter ſecundum directiones verticalem

lem et horizontalem contemplari conueniet. Cum igitur pro corpore A ſit O P $= x$, P A $= y$, celeritas eius ſecundum directionem verticalem A $q$ erit $= \frac{\partial x}{\partial t}$, ſecundum directionem vero verticalem A $\alpha$ celeritas erit $= \frac{\partial y}{\partial t}$. Simili modo corporis B celeritas verticalis erit $= \frac{\partial x'}{\partial t}$, horizontalis vero $= \frac{\partial y'}{\partial t}$. Sin autem maſſa quaecunque M vi vrgeatur V, eiusque celeritas dicatur $= u$, ex Mechanica conſtat fore $\partial u = \frac{2 g V \partial t}{M}$, quae formula ad noſtrum caſum translata pro motu vtriusque corporis ſequentes quatuor praebet aequationes differentiales ſecundi gradus:

$$\text{I. } \frac{A \partial \partial x}{2 g \partial t^2} = A - P \operatorname{coſ.} \zeta + Q \operatorname{coſ.} \eta;$$

$$\text{II. } \frac{A \partial \partial y}{2 g \partial t^2} = - P \operatorname{ſin.} \zeta + Q \operatorname{ſin.} \eta;$$

$$\text{III. } \frac{B \partial \partial x'}{2 g \partial t^2} = B - Q \operatorname{coſ.} \eta;$$

$$\text{IV. } \frac{B \partial \partial y'}{2 g \partial t^2} = - Q \operatorname{ſin.} \eta;$$

vbi littera $g$ denotat altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo. Atque ex his quatuor aequationibus definiri debent ambae tenſiones P et Q, vna cum angulis $\zeta$ et $\eta$, qui ſi fuerint cogniti, motus penduli ad quoduis tempus $t$ perfecte innoteſcit.

§. 5. Incipiamus ab aequationibus tertia et quarta, indeque eliminemus tenſionem Q, quod fit ope huius combinationis: III. ſin. $\eta$ — IV. coſ. $\eta$, quae nobis praebet iſtam aequationem:

$$\frac{B \partial \partial x' \operatorname{ſin.} \eta - B \partial \partial y' \operatorname{coſ.} \eta}{2 g \partial t^2} = B \operatorname{ſin.} \eta,$$

quae per maſſam B diuiſa abit in hanc:

$$\partial \partial x' \operatorname{ſin.} \eta - \partial \partial y' \operatorname{coſ.} \eta = 2 g \partial t^2 \operatorname{ſin.} \eta.$$

Ipſa autem tenſio Q definietur ope huius combinationis:

III. coſ. $\eta$ + IV. ſin. $\eta$, quippe quae dat

$$\frac{B \partial \partial x' cos. \eta + B \partial \partial y' sin. \eta}{2 g \partial t^2} = B \cos. \eta - Q,$$

vnde fit

$$Q = B \cos. \eta - \frac{B \partial \partial x' cos. \eta - B \partial \partial y' sin. \eta}{2 g \partial t^2}.$$

Faciamus porro has combinationes:

$$I. + III. = \frac{A \partial \partial x + B \partial \partial x'}{2 g \partial t^2} = A + B - P \cos. \zeta;$$

$$II. + IV. = \frac{A \partial \partial y + B \partial \partial y'}{2 g \partial t^2} = - P \sin. \zeta.$$

Ex poſtrema harum aequationum fit tenſio

$$P = - \frac{A \partial \partial y - B \partial \partial y'}{2 g \partial t^2 sin. \zeta},$$

quo valore in altera ſubſtituto prodibit iſta aequatio:

$$A \partial \partial x + B \partial \partial x' = 2 g (A + B) \partial t^2 + (A \partial \partial y + B \partial \partial y') \cot. \zeta.$$

Cum igitur ſit

$$x = a \cos. \zeta; \qquad x' = a \cos. \zeta + b \cos. \eta;$$

$$y = a \sin. \zeta; \qquad y' = a \sin. \zeta + b \sin. \eta;$$

ex binis aequationibus ab vtraque tenſione immunibus, quas modo eruimus, ſcilicet:

$$I. \quad \partial \partial x' \sin. \eta - \partial \partial y' \cos. \eta = 2 g \partial t^2 \sin. \eta;$$

$$II. \quad A \partial \partial x + B \partial \partial x' = 2 g (A + B) \partial t^2 + (A \partial \partial y + B \partial \partial y') \cot. \zeta;$$

ad quoduis tempus determinari poterunt binae elongationes ab axe $\zeta$ et $\eta$. Hanc autem inueſtigationem ſi in genere ſuſcipere vellemus, in calculos adeo delaberemur perplexos, vt inde vix quicquam concludi poſſet; quamobrem noſtram inueſtigationem ad eum tantum caſum reſtringemus, quo pendulum oſcillationes quam minimas peragit.

## De oſcillationibus minimis.

§. 6. Hoc igitur caſu ambo anguli $\zeta$ et $\eta$ erunt quam minimi, ideoque $\text{ſin.}\,\zeta = \zeta$; $\text{coſ.}\,\zeta = 1$; $\text{ſin.}\,\eta = \eta$; $\text{coſ.}\,\eta = 1$; conſequenter $x = a$; $y = a\zeta$; $x' = a + b$; $y' = a\zeta + b\eta$. Quodſi igitur hi valores in quaternis illis aequationibus ſupra §. 4. allatis ſubſtituantur, prodibunt iſtae:

$$\text{I. } 0 = A - P + Q;$$

$$\text{II. } \frac{A a \partial\partial\zeta}{2 g \partial t^2} = - P\zeta + Q\eta;$$

$$\text{III. } 0 = B - Q;$$

$$\text{IV. } \frac{B a \partial\partial\zeta + B b \partial\partial\eta}{2 g \partial t^2} = - Q\eta.$$

Ex tertia aequatione ſtatim fit $Q = B$; ex prima vero $P = A + B$, ita vt tenſiones ipſis maſſis hoc caſu ſint aequales, quibus in reliquis aequationibus ſubſtitutis habebitur

$$\frac{A a \partial\partial\zeta}{2 g \partial t^2} = -(A + B)\zeta + B\eta;$$

$$\frac{B a \partial\partial\zeta + B b \partial\partial\eta}{2 g \partial t^2} = - B\eta;$$

ex quibus binos angulos $\zeta$ et $\eta$ definiri oportet, id quod ſequentium artificiorum ſubſidio fieri poteſt.

§. 7. Ponatur breuitatis gratia $\frac{A + B}{A} = n$, vt ſit $\frac{B}{A} = n - 1$, et noſtrae aequationes erunt

$$\frac{a \partial\partial\zeta}{2 g \partial t^2} = - n\zeta + (n - 1)\eta;$$

$$\frac{a \partial\partial\zeta + b \partial\partial\eta}{2 g \partial t^2} = - \eta.$$

Nunc vero ſtatuatur $\zeta = \mathfrak{A}\Phi$ et $\eta = \mathfrak{B}\Phi$, ſitque $\frac{\partial\partial\Phi}{2 g \partial t^2} = - \frac{\Phi}{k}$, quibus ſubſtitutis ambae noſtrae aequationes ita ſe habebunt:

$$\frac{\mathfrak{A} a}{k} = n\mathfrak{A} - (n - 1)\mathfrak{B};$$

$$\frac{\mathfrak{A} a + \mathfrak{B} b}{k} = \mathfrak{B};$$

ex quarum poſteriore fit $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}(k - b)}{a}$, quo valore in priori

 ſub-

ſubſtituto prodit

$$\frac{k-b}{k} = \frac{n(k-b)}{a} - n + 1,$$

vnde deducitur

$$kk = (a+b)k - \frac{ab}{n}, \text{ ſiue}$$

$$k = \tfrac{1}{2}(a+b) \pm \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{ab}{n}}.$$

Cum iam ex aequatione modo aſſumta $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = -\frac{\Phi}{k}$, poſito concinnitatis ergo $\frac{2g}{k} = \lambda^2$, fiat $\partial\partial\Phi + \lambda\lambda\Phi\,\partial t^2 = 0$, hanc aequationem per $2\,\partial\Phi$ multiplicando et integrando habebimus $\partial\Phi^2 + \lambda\lambda\Phi\Phi\,\partial t^2 = C$, vbi conſtans C ita eſt determinanda, vt hoc integrale euaneſcat poſito angulo $\Phi$ conſtante, puta $\Phi = \alpha$, quo facto habebimus $\partial\Phi^2 = \lambda\lambda(\alpha\alpha - \Phi\Phi)\partial t^2$, vnde deducitur $\lambda\,\partial t = \frac{\partial\Phi}{\sqrt{(\alpha\alpha - \Phi\Phi)}}$, hincque denuo integrando $\lambda t + \delta = \text{Arc. ſin. } \frac{\Phi}{\alpha}$, vnde fit $\Phi = \alpha\,\text{ſin.}(\lambda t + \delta)$, vbi $\delta$ eſt conſtans arbitraria per ſecundam integrationem ingreſſa. Ad quoduis igitur tempus $t$ innoteſcit angulus $\Phi$, cuius ope porro binae penduli elongationes quaeſitae $\zeta$ et $\eta$ ita definiuntur, vt ſit

$$\zeta = \mathfrak{A}\,\alpha\,\text{ſin.}(\lambda t + \delta);$$

$$\eta = \mathfrak{B}\,\alpha\,\text{ſin.}(\lambda t + \delta).$$

§. 8. Haec autem ſolutio tantum eſt particularis et non omnes penduli motus complectitur. Quoniam autem pro

$$k = \tfrac{1}{2}(a+b) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{ab}{n}}$$

duplex valor, ratione ſigni ambigui, datur, ſi alterum vocemus $k'$, ob $\lambda' = \sqrt{\frac{2g}{k'}}$ et $\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'} = \frac{k'-b}{a}$, etiam haec radix $k'$ ſolutionem ſuppeditat. Erit enim etiam

$$\zeta = \mathfrak{A}'\,\alpha'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \delta');$$

$$\eta = \mathfrak{B}'\,\alpha'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \delta');$$

atque

atque ex his binis ſolutionibus ſpecialibus ſolutionem generalem et completam formare licet. Ex natura enim aequationum conſtat, hos duos valores coniungi poſſe, ita vt ſolutio completa his duabus conditionibus complectatur:

$$\zeta = \mathfrak{A}\alpha\,\text{ſin.}(\lambda t + \delta) + \mathfrak{A}'\alpha'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \delta')$$

$$\eta = \mathfrak{B}\alpha\,\text{ſin.}(\lambda t + \delta) + \mathfrak{B}'\alpha'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \delta')$$

quae certe erit completa, quia quatuor inuoluit quantitates conſtantes arbitrarias $\alpha$, $\alpha'$, $\delta$, $\delta'$ quot ſcilicet ex iterata integratione binarum aequationum differentio-differentialium oriri potuerant. Pro motu denique angulorum $\zeta$ et $\eta$ notentur celeritates angulares, quae ſunt

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \mathfrak{A}\alpha\lambda\,\text{coſ.}(\lambda t + \delta) + \mathfrak{A}'\alpha'\lambda'\,\text{coſ.}(\lambda' t + \delta');$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \mathfrak{B}\alpha\lambda\,\text{coſ.}(\lambda t + \delta) + \mathfrak{B}'\alpha'\lambda'\,\text{coſ.}(\lambda' t + \delta').$$

§. 9. Ex modo dictis apparet, motum quemcunque vtique quaſi mixtum ex binis ſimplicibus ſpectari, talemque motum compoſitum maxime ideo irregularem eſſe poſſe: at bini illi motus ſimplices admodum regulares erunt. Cum enim ſit $\zeta : \eta = \mathfrak{A} : \mathfrak{B} = \mathfrak{A}' : \mathfrak{B}'$, patet elongationes inter ſe tenere rationem conſtantem. Tum vero ſi loco $t$ ſcribatur $t + \frac{2\pi}{\lambda}$, vel etiam $t + \frac{2\pi}{\lambda'}$, denotante $2\pi$ integram peripheriam, ſeu angulum 360°, ob ſin. $(\lambda t + 2\pi + \delta) =$ ſin. $(\lambda t + \delta)$ valores angulorum $\zeta$ et $\eta$ prorſus iidem manebunt. Vnde concluditur, pendulum poſt tempus $\frac{2\pi}{\lambda}$ in eundem ſitum peruenire, quem tempore $t$ tenuerat, ideoque interea duas peregiſſe oſcillationes, ita vt tempus vnius oſcillationis ſit $= \frac{\pi}{\lambda} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}}$, in minutis ſecundis expreſſum. Id etiam de altero genere oſcillationum ſimplicium tenendum eſt, quarum vnaquaeque abſoluitur tempore $\frac{\pi}{\lambda'} = \pi\sqrt{\frac{k'}{2g}}$ minutorum ſecundorum.

Deter-

## Determinatio penduli ſimplicis iſochroni.

§. 10. Conſideremus nunc pendulum ſimplex, minimas oſcillationes peragens, cuius longitudo $OM = k$, maſſa corporis $M = M$ et angulus $MOP = \Phi$, ita vt coordinatae ſint $OP = x = k \cos. \Phi$ et $PM = y = k \sin. \Phi$, ſiue ob angulum $\Phi$ infinite paruum erit $x = k$ et $y = k\Phi$. Tum ſi tenſionem ſtatuamus $= T$, erit

Tab. VI. Fig. 2.

$$\frac{M \partial \partial x}{2 g \partial t^2} = M - T \text{ et } \frac{M \partial \partial y}{2 g \partial t^2} = - T \Phi;$$

at vero tenſio ipſi ponderi eſt aequalis, vnde habebimus

$$\frac{\partial \partial x}{2 g \partial t^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial \partial y}{2 g \partial t^2} = - \Phi;$$

vnde deducitur acceleratio angularis $\frac{\partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = - \frac{\Phi}{k}$. Hinc ratio patet, quare ſupra (§. 7.) poſuerimus $\frac{\partial \partial \Phi}{2 g \partial t^2} = - \frac{\Phi}{k}$. Eſt enim $k$ longitudo penduli ſimplicis iſochroni et $\Phi$ elongatio ab axe $OV$; vnde intelligimus binas aequationis quadraticae radices $k$ et $k'$ deſignare longitudinem pendulorum ſimplicium binis oſcillationum generibus in pendulo noſtro bifilo reſpondentium, tempore vnius oſcillationis pro priore exiſtente $= \pi \sqrt{\frac{k}{2 g}}$, pro altero $= \pi \sqrt{\frac{k'}{2 g}}$.

## Conſideratio ſtatus initialis.

§. 11. In expoſitione quaeſtionis ſtatuimus pendulum a pauſa quacunque ad motum concitari; vnde ſtatus initialis, a quo motus incipit, conſiderari debet. Hunc in finem ponamus pendulum noſtrum bimembre initio diductum fuiſſe ab axe $OV$, ſintque diductiones initiales corpuſculi ſuperioris $AP = d$, inferioris $BQ = d'$, quas tanquam minimas reſpectu longitudinis filorum $OA = a$, $AB = b$, ſpectare licebit, ita vt ſit angulus $\zeta = \frac{d}{a}$ et angulus $\eta = \frac{d' - d}{b}$, eritque $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$, vnde ob $t = 0$ celeritates angulares nobis ſuppeditant

ditant has binas aequationes:

$$\mathfrak{A}\,\alpha\,\lambda\,\text{coſ.}\,\delta + \mathfrak{A}'\,\alpha'\,\lambda'\,\text{coſ.}\,\delta' = 0$$

$$\mathfrak{B}\,\alpha\,\lambda\,\text{coſ.}\,\delta + \mathfrak{B}'\,\alpha'\,\lambda'\,\text{coſ.}\,\delta' = 0$$

ex quarum priore fit coſ. $\delta' = -\frac{\mathfrak{A}\,\alpha\,\lambda\,\text{coſ.}\,\delta}{\mathfrak{A}'\,\alpha'\,\lambda'}$, ex altera vero coſ. $\delta' = -\frac{\mathfrak{B}\,\alpha\,\lambda\,\text{coſ.}\,\delta}{\mathfrak{B}'\,\alpha'\,\lambda'}$, quibus inter ſe aequatis haec prodit aequatio: $\frac{\mathfrak{A}\,\text{coſ.}\,\delta}{\mathfrak{A}'} = \frac{\mathfrak{B}\,\text{coſ.}\,\delta}{\mathfrak{B}'}$, ſiue $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}\,\text{coſ.}\,\delta = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'}\,\text{coſ.}\,\delta$. Eſt vero $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{k-b}{a}$ et $\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'} = \frac{k'-b}{a}$, vnde manifeſtum eſt ſtatui non poſſe $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'}$, quoniam tum fieri deberet $k' = k$, hoc eſt $\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{ab}{n}} = 0$, ſiue $n = \frac{4ab}{(a+b)^2}$. Cum autem ſit $n = \frac{A+B}{A}$, ſemper erit $n > 1$, vnde neceſſario eſſe debet $\frac{4ab}{(a+b)^2} > 1$, hoc eſt $(a-b)^2 < 0$, quod cum fieri nequeat, ſtatuendum eſt coſ. $\delta = 0$, ideoque $\delta = \frac{\pi}{2}$, vnde fit coſ. $\delta' = 0$, ideoque et $\delta' = \frac{\pi}{2}$, ita vt pro ſtatu initiali propoſito ſit

$$\zeta = \frac{d}{a} = \mathfrak{A}\,\alpha + \mathfrak{A}'\,\alpha';$$

$$\eta = \frac{d'-d}{b} = \mathfrak{B}\,\alpha + \mathfrak{B}'\,\alpha'.$$

§. 12. Ponamus autem

$$\mathfrak{A}\,\alpha = \mathfrak{C}\,(k-b);\quad \mathfrak{A}'\,\alpha' = \mathfrak{C}'\,(k'-b)$$

eritque $\mathfrak{B}\,\alpha = \mathfrak{C}\,a$; $\mathfrak{B}'\,\alpha' = \mathfrak{C}'\,a$, ideoque

$$\frac{d}{a} = \mathfrak{C}\,(k-b) + \mathfrak{C}'\,(k'-b);$$

$$\frac{d'-d}{b} = \mathfrak{C}\,a + \mathfrak{C}'\,a.$$

Ex poſteriore harum aequationum fit $\mathfrak{C}' = \frac{d'-d}{a\,b} - \mathfrak{C}$, quo valore in priore ſubſtituto prodit

$$\frac{d}{a} = \mathfrak{C}\,(k-b) + \frac{(d'-d)(k'-b)}{a\,b} - \mathfrak{C}\,(k'-b)\ \text{ſiue}$$

$$\frac{d}{a} = \mathfrak{C}\,(k-k') + \frac{(d'-d)(k'-b)}{a\,b},\ \text{vnde fit}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{bd - (d' - d)(k' - b)}{ab(k - k')} = \frac{k'(d - d') + bd'}{ab(k - k)}, \text{ hincque}$$

$$\mathfrak{C}' = \frac{d' - d}{ab} - \frac{k'(d - d') + bd}{ab(k - k')} = \frac{k(d' - d) - bd'}{ab(k - k')}.$$

Tum vero ſi pendulum a ſtatu hoc initiali ad motum concitetur, pro quouis tempore $t$ inde elapſo habebimus elongationes

$$\zeta = \mathfrak{C}(k - b)\,\text{ſin.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda t) + \mathfrak{C}(k' - b)\,\text{ſin.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda t);$$

$$\eta = \mathfrak{C} a\,\text{ſin.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda t) + \mathfrak{C}' a\,\text{ſin.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda t);$$

et celeritates angulares

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mathfrak{C}\lambda(k - b)\,\text{coſ.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda t) + \mathfrak{C}'\lambda'(k' - b)\,\text{coſ.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda t);$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \mathfrak{C}\lambda a\,\text{coſ.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda t) + \mathfrak{C}'\lambda' a\,\text{coſ.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda t).$$

## Applicatio ad caſum quendam determinatum.

§. 13. Conſideremus nunc primum caſum ab Ill. *Bernoulli* in Diſſertatione citata tractatum, ſintque penduli fila $a = b = 275$ lin. pariſ., pondus vero corporis ſuperioris $A = 16$ ſemi-vnciar. inferioris $B = 9$ ſemi-vnciar. eritque $n = \frac{25}{16}$, $k = 440$, $k' = 110$ linear. pariſ. vnde ob $g = 15\frac{1}{8}$ ped. par. $= 2178$ lin. erit $\lambda = 3,1464$ et $\lambda' = 6,2928 = 2\lambda$, vnde tempus vnius oſcillationis pro corpuſculo ſuperiore A erit $\frac{\pi}{\lambda} = 0,998$ minut. ſecund. hoc eſt vnius proxime minuti ſecundi; inferioris vero corporis B tempus oſcillationis erit ſemiminuti ſecundi. His
Tab. VI Fig. 3. ſtabilitis repraeſentet figura tertia huius penduli ſtatum initialem, ſitque ponduſculum A a ſitu verticali O V diductum ad diſtantiam $AP = 48$ lin. dum alterum pondus B libere pendet, ita vt etiam $BQ = 48$ lin. vnde ob $d' = d = 48$ lin. erit $\mathfrak{C} = \frac{48}{275.335}$ atque $\mathfrak{C}' = -\frac{48}{275.333}$, conſequenter

$$\zeta = \tfrac{24}{275}\,[\,\text{ſin.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda t) + \text{ſin.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda' t)\,];$$

$$\eta = \tfrac{8}{55}\,[\,\text{ſin.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda t) - \text{ſin.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda' t)\,];$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \tfrac{24}{275}\lambda\,[\,\text{coſ.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda t) + 2\,\text{coſ.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda' t)\,];$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \tfrac{8}{55}\lambda\,[\,\text{coſ.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda t) - 2\,\text{coſ.}\,(\tfrac{\pi}{2} + \lambda' t)\,];$$

quae

quae quatuor expreſſiones ſequenti modo concinnius repraeſentari poſſunt:

$$\zeta = \tfrac{24}{575}\,(\text{coſ.}\,\lambda t + \text{coſ.}\,2\lambda t);$$

$$\eta = \tfrac{8}{55}\,(\text{coſ.}\,\lambda t - \text{coſ.}\,2\lambda t);$$

$$\tfrac{\partial\zeta}{\partial t} = \tfrac{24}{575}\,\lambda\,(\text{ſin.}\,\lambda t + 2\,\text{ſin.}\,2\lambda t);$$

$$\tfrac{\partial\eta}{\partial t} = \tfrac{8}{55}\,\lambda\,(\text{ſin.}\,\lambda t - 2\,\text{ſin.}\,2\lambda t).$$

§. 14. Quo nunc in motus penduli noſtri phaenomena accurratius inquiramus, quaeramus temporis ea momenta, quibus corpus ſuperius retrogreditur, quod fit vbi celeritas angularis euaneſcit. Ponatur igitur $\frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0$, eritque ſin. $\lambda t = -2$ ſin. $2\lambda t$, cui aequationi ſatisfit poſito $\lambda t = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi$, etc., ſiue $t = 1, 2, 3, 4$, etc. min. ſec.; tum vero eidem aequationi proxime ſatisfit caſibus $\lambda t = \frac{7\pi}{12}, \frac{31\pi}{12}, \frac{55\pi}{12}$, etc. hoc eſt tempore $t = \frac{7}{12}, \frac{31}{12}, \frac{55}{12}$, etc. min. ſec. Corpus autem inferius retrogredi incipiet vbi $\frac{\partial\eta}{\partial t} = 0$, hoc eſt ſin. $\lambda t = +2$ ſin. $\lambda' t$, quod fit caſibus $\lambda t = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$, etc. hoc eſt tempore $t = 1$, 2, 3, etc. min. ſec. tum vero huic aequationi ſatisfaciunt proxime valores $\lambda t = \frac{5\pi}{12}, \frac{10\pi}{12}, \frac{29\pi}{12}$, etc. Hic autem probe cauendum eſt ne corpus inferius his poſtremis temporis momentis cenſeatur retrogredi: ex ſequentibus enim patebit hoc fieri omnino non poſſe, quod paradoxon infra diluetur.

§. 15. Quaeramus porro quibusnam temporis momentis corpus ſuperius A in axem O V incidit, quod cum eueniat quando angulus $\zeta$ euaneſcit, fieri debebit coſ. $\lambda t = -$ coſ. $2\lambda t$, quod euenit caſibus quibus eſt $\lambda t = \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{9\pi}{3}$, etc. hoc eſt tempore $t = \frac{1}{3}$, 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, 3, etc. min. ſec. Quod autem corpus inferius attinet, id per axem tranſit quando angulus B A $q$ abit in Q A $q$, hoc eſt vbi $\eta = -\theta$, ſiue, quia ambo fila

aequalia, ideoque $\theta = \zeta$, fieri debet $\eta = -\zeta$, ſiue $\zeta + \eta = 0$, hoc eſt $4 \cos. \lambda t - \cos. 2 \lambda t = 0$, vel $\frac{\cos. \lambda t}{\cos. 2 \lambda t} = \frac{1}{4}$, quod intra ſpatium periodi noſtrae 2 minutorum ſecundorum bis euenit: 1°.) ſi $\lambda t = 103°$, 2°.) ſi $\lambda t = 257°$, ideoque tempore $t = \frac{103}{180}$ min. ſec. et $t = \frac{257}{180}$ min. ſec. Hoc igitur modo praecipua motus penduli noſtri bifili momenta, quem Ill. *Bernoulli* non niſi ad mentem Theoriae ſuae deſcribi poſſe putauerat, ex primis Theoriae motus principiis determinauimus.

§. 16. Supereſt vt pro praecipuis temporis momentis, quae modo quaeſiuimus, diſtantias corpuſculorum ab axe, eorumque digreſſus regreſſusque aſſignemus. Hunc in finem cum ſit $y = a \zeta$ et $y' = a \zeta + b \eta$, erit pro noſtro caſu

$$y = 24 (\cos. \lambda t + \cos. 2 \lambda t)$$
$$y' = 16 (4 \cos. \lambda t - \cos. 2 \lambda t)$$

vnde ſi ſucceſſiue ſtatuamus $t = \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, 1, \frac{3}{2}, 2$, diſtantiae corpuſculorum ab axe pro hiſce temporibus erunt ſequentes:

Si $t = \frac{1}{2}$; $y = -24$; $y' = +16$.
Si $t = \frac{7}{12}$; $y = -27$; $y' = -2,7$.
Si $t = 1$; $y = 0$; $y' = -80$.
Si $t = \frac{3}{2}$; $y = -24$; $y' = +16$.
Si $t = 2$; $y = +48$; $y' = +48$.

Omnia haec eadem manent, ſi ſucceſſiue capiatur $t = \frac{5}{2}, \frac{31}{12}, 3, \frac{7}{2}, 4$, vnde patet integram periodum eſſe 2 min. ſec. hoc eſt pendulum poſt quaelibet duo minuta ſecunda in ſtatum initialem reuertit. Hic autem ſtatim patet, quod ſupra iam §. 14. innuimus, temporis momentis $t = \frac{7}{12}, \frac{19}{12}, \frac{31}{12}$, etc. min. ſec. corpus inferius regredi non poſſe. Quanquam enim celeritas eius angularis his momentis euaneſcit, inde neutiquam ſequi-

ſequitur dari hoc loco puncta regreſſus. Corpus enim his temporis interuallis tantum fit ſtationarium et poſt ſtatum quietis momentaneae curſum ſuum continuat, cuius Phaenomeni deinceps per experimenta inſtituta certior ſum factus.

§. 17. Figura quarta exhibet ſtatum noſtri penduli pro quinque epochis modo examinatis. Eſt ſcilicet $O\,\alpha\,\alpha'$ figura initialis ſyſtematis, ideoque pro vtroque tempore $t = 0$ et $t = 2$ min. ſec. $O\,\gamma\,\gamma'$ eſt figura pro tempore $t = \frac{1}{2}$ et $t = \frac{3}{2}$; $O\,\delta\,\delta'$ pro tempore $t = \frac{7}{12}$ et $O\,\beta\,\beta'$ pro integra oſcillatione $t = 1$. Hic igitur erit $\alpha\beta = \alpha' v = 48$ lin. par. $\beta\gamma = 24$, $\beta\delta = 27$, $\gamma\delta = 3$, $\alpha'\gamma' = 32$, $\gamma' v = 16$, $v\beta' = 80$. Ita corpuſculum ſuperius, quod initio erat in $\alpha$, tempore $\frac{1}{3}''$ peruenit in $\beta$, tempore $\frac{1}{2}''$ in $\gamma$, poſt $\frac{7}{12}''$ in $\delta$, vbi regreditur et poſt integrum minutum ſecundum elapſum iterum in axem incidit in $\beta$, a quo iterum regreditur ad dextram in $\delta$ et elapſo tempore $\frac{3}{2}''$ in $\gamma$ peruenit, a quo puncto porro poſt duo minuta ſecunda iterum in $\alpha$ cadit. Tab. VI. Fig. 4.

Tempore ergo $= \frac{1}{2}''$ abſoluit ſpatium $\alpha\beta + \beta\gamma = 72'''$
- - - - 1 - - - - $\gamma\delta + \delta\beta = 30$
- - - - $\frac{3}{2}$ - - - - $\beta\delta + \delta\gamma = 30$
- - - - 2 - - - - $\gamma\beta + \beta\alpha = 72$

tempuſculum autem quo ſpatiolum $\gamma\delta$ percurritur, eſt $\frac{7}{12} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ min. ſec. Quod corpus inferius attinet, id

tempore $\frac{1}{2}''$ abſoluit ſpatium $\alpha'\gamma' = 32$ lin.
- 1 - - - $\gamma' v + v\beta' = 96$ —
- $\frac{3}{2}$ - - - $\beta' v + v\gamma' = 96$ —
- 2 - - - $\gamma'\alpha' = 32$ —

quae diſtantiae perfecte congruunt cum illis quas Ill. *Bernoulli* de hoc caſu habet.

§. 18. Hic igitur ſingularis motus, qui re obiter perſtricta, maxime videtur irregularis, hac ſaltem regularitate gaudet, quod perfecta in eo periodus exiſtat, et omnia eademque phaenomena ſingulis duplis minutis ſecundis ſe exhibeant et pendulum ad priſtinum ſtatum reuocetur. Maxima irregularitas in eo eſt ſita, quod pendulum ſuperius quatuor faciat itus reditusque, intermedios minores extremis, dum inferius pendulum duas tantum facit oſcillationes. Tum vero corporis ſuperioris diſceſſus ab axe maximi cadunt ad ſiniſtram, dum inferioris ponduſculi diſceſſus maximi ad dextram cadunt; celeritas autem angularis eius ſi maxima, alterius minima eſt. Denique eo ipſo tempore, quo corpus vnum in axem incidit, alterum ab eo maxime eſt remotum. Interim tamen, elapſo vno minuto ſecundo, hoc eſt dimidia periodo, vtrumque corpus exacte viae integrae perficiendae ſemiſſem abſoluit, corpus ſuperius ſcilicet 102, inferius vero 128 lin. pariſ.

## Alia applicatio.

§. 19. Quodſi nunc corpora A et B permutentur, ſiue ſi ſtatuatur $A = 9$ et $B = 16$ ſemi-vnciar. ita vt $n = \frac{25}{9}$, pro hoc caſu habebimus ſequentes valores pro longitudine penduli ſimplicis iſochroni:

$$k = 275\,[1 + \sqrt{(1 - \tfrac{9}{25})}] = \tfrac{9}{5} \cdot 275 = 495 \text{ lin.}$$
$$k' = 275\,[1 - \sqrt{(1 - \tfrac{9}{25})}] = \tfrac{1}{5} \cdot 275 = 55 \text{ lin.}$$

vnde fit $\lambda = 2,9665$, ſiue in gradibus proxime $\lambda = 170°$ et $\lambda' = 3\lambda$, vnde pro eodem ſtatu initiali, vbi $d' = d = 48$ lin. habebimus $\mathfrak{C} = \frac{6}{55 \cdot 275}$ et $\mathfrak{C}' = -\frac{6}{55 \cdot 275}$, conſequenter

$$\mathfrak{C}\,(k - b) = \tfrac{24}{275} \text{ et } \mathfrak{C}'\,(k' - b) = \tfrac{24}{275},$$

quibus valoribus rite ſuffectis quatuor noſtrae aequationes principales ita ſe habebunt:

$$\zeta = \tfrac{24}{275}\,(\text{coſ.}\ \lambda\,t + \text{coſ.}\ 3\,\lambda\,t);$$
$$\eta = \tfrac{6}{55}\,(\text{coſ.}\ \lambda\,t - \text{coſ.}\ 3\,\lambda\,t);$$
$$\tfrac{\partial\zeta}{\partial t} = \tfrac{24}{275}\,\lambda\,(\text{ſin.}\ \lambda\,t + 3\ \text{ſin.}\ 3\,\lambda\,t);$$
$$\tfrac{\partial\eta}{\partial t} = \tfrac{6}{55}\,\lambda\,(\text{ſin.}\ \lambda\,t - 3\ \text{ſin.}\ 3\,\lambda\,t).$$

§. 20. Quodſi nunc in momenta temporis inquirere velimus, quibus vtrumque corpus in axem incidit, quibusque regreditur et maxime ab eo recedit: ſtatuamus primo $\frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0$, hoc eſt ſin. $\lambda\,t = -$ ſin. $3\,\lambda\,t$, quod euenit, ſi $\lambda\,t = \pi,\ 2\,\pi,\ 3\,\pi$, etc. tum vero etiam proxime ſi $\lambda\,t = 66°,\ 114°,\ 294°$, etc., hoc eſt $\lambda\,t = \frac{11\pi}{30},\ \frac{19\pi}{30},\ \frac{49\pi}{30}$, etc. Tum vero pro corpore inferiore ſtatuamus $\frac{\partial\eta}{\partial t} = 0$, hoc eſt ſin. $\lambda\,t = 3$ ſin. $3\,\lambda\,t$, quod iterum euenit quando $\lambda\,t = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$, etc. et proxime etiam caſibus $\lambda\,t = \frac{11\pi}{36},\ \frac{61\pi}{36}$, etc. Vbi iterum notandum eſt pro corpore inferiore non dari niſi duo puncta regreſſus, caſu vero $\lambda\,t = \frac{11\pi}{36}$ et $\frac{61\pi}{36}$ celeritatem angularem ad momentum euaneſcere, ſeu corpus fieri ſtationarium. Corpus ſuperius per axem tranſit quando fit $\zeta = 0$, hoc eſt coſ. $\lambda\,t = -$ coſ. $3\,\lambda\,t$, hoc eſt $\lambda\,t = \frac{\pi}{4},\ \frac{2\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{6\pi}{4}$, etc. corpus vero inferius in axem incidit, quando $\zeta + \eta = 0$, hoc eſt ſi fuerit $\lambda\,t = \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}$, etc.

§. 21. Quodſi iam pro praecipuis momentis diſtantiam vtriusque corporis ab axe computare velimus, huic negotio inſeruient formulae:

$y =$

$$y = 24\,(\text{coſ.}\ \lambda\, t + \text{coſ.}\ 3\,\lambda\, t)$$
$$y' = 6\,(9\ \text{coſ.}\ \lambda\, t - \text{coſ.}\ 3\,\lambda\, t),$$

vnde ſi tempus vnius oſcillationis $\frac{\pi}{\lambda}$ in tria interualla aequalia diſcerpatur

ſi $t = \frac{\pi}{3\lambda}$, erit $y = -12$; $y' = +33$;
ſi $t = \frac{2\pi}{3\lambda}$, erit $y = +12$; $y' = -33$;
ſi $t = \frac{3\pi}{3\lambda}$, erit $y' = -48$; $y' = -48$;
ſi $t = \frac{4\pi}{3\lambda}$, erit $y = +12$; $y' = -33$;
ſi $t = \frac{5\pi}{3\lambda}$, erit $y = -12$; $y' = +33$;
ſi $t = \frac{6\pi}{3\lambda}$, erit $y = +48$; $y' = +48$;

Tab. VI. Fig. 5. §. 22. Hinc igitur patet corpus ſuperius tempore $\frac{\pi}{\lambda}$ tres facere oſcillationes, dum inferius eodem tempore vnicam tantum abſoluit. Ceterum figura quinta ſiſtit ſtatum penduli pro ſex epochis modo ſtabilitis. Quod ſpatia percurſa attinet, ea ſunt ſequentia:

| Triens | Corp. ſup. | | Corp. inferius. |
|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha\gamma + \gamma\beta = 60$ | - - - | $\alpha'\beta' = 15$ lin. |
| 2 | $\beta\gamma = 24$ | - - - | $\beta'\gamma' = 66$ — |
| 3 | $\gamma\beta + \delta\beta = 60$ | - - - | $\gamma'\delta' = 15$ — |
| 4 | $\delta\beta + \beta\gamma = 60$ | - - - | $\delta'\gamma' = 15$ — |
| 5 | $\gamma\beta = 24$ | - - - | $\gamma'\beta' = 66$ — |
| 6 | $\beta\gamma + \alpha\gamma = 60$ | - - - | $\beta'\alpha' = 15$ — |

Puncta regreſſus minoris pro corpore ſuperiore quidem non ſunt in $\beta$ et $\gamma$, ſed parum ab his diſtabunt punctis. Supra enim §. 20. vidimus puncta regreſſus ibi fore, vbi $\lambda t = \frac{11\pi}{30}$, $\frac{19\pi}{30}$, vnde ſit $y = \pm 13$, ita vt puncta regreſſus tantum inter-

vallo

vallo vnius lineae diſtent a punctis $\beta$ et $\gamma$, neque vero $2\frac{1}{4}$ lin. vti Cel. *Bernoulli* inuenerat.

## Experimentum.

§. 23. Quanquam haec omnia firmiſſimis principiis innituntur et cum applicatione *Bernoulliana*, quousque quidem Viro Illuſtriſſimo eam proſequi placuerat, perfectiſſime conſpirant, ita vt nullum dubium ſupereſſe queat, quin motus noſtri penduli reuera ita ſe habeant, quemadmodum hic ſunt aſſignati: tamen, ne vlla ſuperſit dubitandi ratio, vtrumque caſum experimentis ſubiicere conſtitueram. Paraui hunc in finem duo corpora plumbea conicae figurae, alterum 10, alterum $5\frac{2}{3}$ ſemiunciarum, (30 et 17 Solotnik), quae filo tenuiſſimo longitudinis 275 lin. pariſ. iunxi; et quomodocunque hoc ſyſtema ſuſpendebatur, ſiue corpuſculum grauius inferne, ſiue ſuperne erat ſuſpenſum, ſemper motus penduli huius, poſtquam modo praeſcripto ad eum concitabatur, perfectiſſime cum Theoria conſpirauit. Vtroque caſu motus reciproci, modo tardiores modo celeriores excurſiones, regreſſus intermedii et ſtationes ſe praebebant, mirum quantum, Theoriae conformes. Quin adeo in corpore inferiore momenta illa dubia, quibus celeritas angularis ſine regreſſu nulla euaſerat, in oculos incurrebant. His igitur experimentis non ſolum principia hic vſitata, ſed etiam celebre illud principium *Bernoullianum*, non mediocriter confirmantur. Quantam fiduciam haec experimenta, non admodum ſubtiliter inſtituta, mereantur, etiam inde concludi poteſt, quod diſceſſus maximi ab axe et percurſa ſpatia cum iis quos calculus praebuerat primis quatuor vel ſex oſcillationibus exactiſſime conueniebant. Mox enim, ob impedimenta phyſica ab huiusmodi motibus inſeparabilia, hi diſceſſus ſenſi-

biliter diminuuntur, donec tandem totum ſyſtema ad ſtatum perfectae quietis redigitur.

§. 24. Cum priore caſu, quo $A = 16$, $B = 9$, inuenerimus corpus ſuperius duas facere oſcillationes tempore quo inferius vnicam oſcillationem abſoluit; altero vero caſu $A = 9$ et $B = 16$ tres perficiantur oſcillationes tempore quo corpus inferius ſemel oſcillauit: ſuſcitari hic poſſet quaeſtio: Quaenam relatio inter corpora A et B, vel etiam inter fila *a* et *b* ſubſiſtere debeat, vt tempora oſcillationum ſint in data ratione. Huius autem Problematis, vt et aliarum ſimilium quaeſtionum algebraicarum, ſolutionem alia occaſione traditurus ero.

ADDI-

# ADDITIONES ANALYTICAE
## AD DISSERTATIONEM
# DE MOTV PENDVLI BIFILI.

Auctore
*NICOLAO FVSS.*

*Convent. exhib. d. 7 April.* 1785.

§. 1.

In ſuperiore de hoc argumento diſſertatione omnia, quae motum penduli bifili ſpectant, perfecte determinata fuere, pro data ſcilicet corporum et filorum quibus connectuntur ratione. Motus autem minus complicati iis tantum caſibus oriuntur, quibus inter tempora oſcillationum ratio ſimplex ſubſiſtit, veluti euenit in caſibus ſpecialibus, ad quos formulas noſtras generales applicauimus; vbi inuenimus, ſi fila aequalia et ratio corporum vt 16 ad 9, corpus ſuperius duas facere oſcillationes, dum inferius vnicam abſoluit, permutatis autem corporibus tres perfici oſcillationes a corpore ſuperiore tempore quo inferius vnicam fecerit. Hinc naſcuntur plures quaeſtiones, tam ob vſum, quem praeſtari poſſunt in inueſtigatione caſuum ad experimenta idoneorum, quam per ſe, vtpote quae ad Analyſin ſpectant, memorabiles: 1°) Quaenam ſcilicet ratio ſiue pondera ſiue fila inter ſe tenere debeant, vt tempore

 vnius

vnius oſcillationis tardioris a corpore ſuperiori datus oſcillationum numerus perficiatur, ſiue vt tempora oſcillationum $\frac{\pi}{\lambda}$ et $\frac{\pi}{\lambda'}$, hoc eſt $\pi \sqrt{\frac{k}{2g}}$ et $\pi \sqrt{\frac{k'}{2g}}$, ſint in data ratione? 2°) Quaenam porro ſint rationes temporum oſcillationis, vt relatio inter ambo corpora eadem maneat, vti noſtro caſu, vbi permutabantur? 3°) Quibusnam ſub conditionibus longitudines pendulorum iſochronorum fiant rationales? etc. Harum quaeſtionum ſolutionem hic, ſupplementi inſtar, tradere conſtitui.

## Problema I.

§. 2. *Data longitudine filorum* a *et* b *inuenire rationem ponduſculorum* A *et* B, *vt longitudines pendulorum ſimplicium iſochronorum* k *et* k′ *inter ſe datam teneant rationem, puta* $\alpha : \beta$.

## Solutio.

Cum ex ſuperioris diſſertationis §. 7. ſit

$$k = \tfrac{1}{2}(a+b) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(a+b)^2 - \tfrac{ab}{n}} \text{ et}$$

$$k' = \tfrac{1}{2}(a+b) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(a+b)^2 - \tfrac{ab}{n}},$$

inde deducitur ſumma $k + k' = a + b$ et productum $k k' = \frac{ab}{n}$. Iam ſtatuatur $k = \alpha v$ et $k' = \beta v$, erit $k : k' = \alpha : \beta$, vti requiritur; tum vero erit $(\alpha + \beta) v = a + b$ et $\alpha \beta v v = \frac{ab}{n}$. Ex prima harum conditionum deducitur $v = \frac{a+b}{\alpha+\beta}$, qui valor in altera ſubſtitutus praebet $\frac{\alpha\beta(a+b)^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{ab}{n}$, vnde colligitur $n = 1 + \frac{B}{A} = \frac{ab(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta(a+b)^2}$, conſequenter

$$\frac{B}{A} = \frac{ab(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta(a+b)^2}{\alpha\beta(a+b)^2}.$$

Hinc ſtatim patet rationem $\alpha : \beta$ ita aſſumi debere, vt ſit

$$ab(\alpha+\beta)^2 > \alpha\beta(a+b)^2,$$

hoc

hoc eſt $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} > \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$, quia alioquin vnum alterumue corpuſculorum fieret negatiuum.

## Corollarium 1.

§. 3. Relatio inuenta inter pondera A et B eadem manet, etiamſi fila inter ſe permutentur. Mutatis enim litteris *a* et *b* inter ſe, expreſſio pro $\frac{B}{A}$ inuenta non mutatur. Tum vero etiam manifeſtum eſt, fractionem $\frac{B}{A}$ eo eſſe minorem, quo maior fuerit inaequalitas filorum *a* et *b*, eamque ad vnitatem reduci, ſi fuerit $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{2}$, quo igitur caſu corpora ſunt aequalia.

## Corollarium 2.

§. 4. Si quaeratur ratio ponderum A et B, qua oſcillationes fiant aequales, ſtatui debet $\beta = \alpha$, vnde fit

$$\frac{B}{A} = -\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

Maſſa igitur vnius corporis hoc caſu foret negatiua, quod cum euenire nequeat, manifeſtum eſt oſcillationes nunquam aequales fieri poſſe in tali pendulo.

## Corollarium 3.

§. 5. Si filorum longitudines *a* et *b* ſtatuantur aequales, erit ratio ponduſculorum $B : A = (\alpha - \beta)^2 : 4\alpha\beta$. Hinc ſi ſtatuatur $\alpha = 1$ et $\beta = 4$, ita vt $\lambda : \lambda' = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = 1 : 2$, erit $B : A = 9 : 16$. Et poſito $\alpha = 1$ et $\beta = 9$, ita vt $\lambda : \lambda' = 1 : 3$, erit $B : A = 16 : 9$, quod cum applicationibus noſtris in ſuperiore diſſertatione factis perfecte congruit.

## Corollarium 4.

§. 6. In genere autem circa hunc caſum filorum aequalium notari meretur, ſi ponatur $\alpha = \mu\mu$ et $\beta = \nu\nu$, fore $\frac{B}{A} = \frac{(\mu\mu - \nu\nu)^2}{4\mu\mu\nu\nu}$; tum vero ſi ſtatuatur $\alpha = (\mu + \nu)^2$ et $\beta = (\mu - \nu)^2$, fore $\frac{B}{A} = \frac{4\mu\mu\nu\nu}{(\mu\mu - \nu\nu)^2}$ qui duo valores in eo tantum differunt, quod vnus ſit alterius reciprocum, ſiue quod corpora A et B ſint inter ſe permutata. Ita viciſſim, ſi pendulum ita fuerit comparatum, vt ratio temporum oſcillationis fuerit $\mu : \nu$, permutatis corpusculis haec temporum ratio erit $\mu + \nu : \mu - \nu$. Quo obſeruato haud difficile erit innumerabiles rationes temporis aſſignare, quae hac proprietate gaudeant, vt relatio inter corpora ſuspenſa maneat eadem.

## Corollarium 5.

§. 7. Sin autem pro eodem caſu filorum aequalium quaeramus rationem maſſarum A et B, vt oſcillationum tempora fiant inter ſe aequalia, hoc eſt $\beta = \alpha$, prodit $\frac{B}{A} = 0$, ideoque $B = 0$, quo caſu igitur pendulum non amplius eſt bimembre, ſed abit in pendulum ſimplex vniformiter oſcillans.

## Problema II.

§. 8. *Si pondera A et B fuerint data, inuenire rationem filorum* a *et* b, *vt longitudines pendulorum ſimplicium iſochronorum* k *et* k' *inter ſe datam teneant rationem* $\alpha : \beta$.

## Solutio.

Cum ſit

$$n = 1 + \frac{B}{A} = \frac{ab(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta(a+b)^2}, \text{ erit } (a+b)^2 = \frac{ab(\alpha+\beta)^2}{n\alpha\beta}.$$

Pona-

Ponatur breuitatis ergo $\frac{(\alpha+\beta)^2}{n\alpha\beta} = 2m$, eritque

$$(a+b)^2 = 2mab.$$

Hinc igitur euoluendo fit

$$aa + 2ab + bb = 2mab$$

vnde colligitur $aa = 2(m-1)ab - bb$, hincque

$$a = (m-1)b \pm \sqrt{(m-1)^2 bb - bb},$$

ita vt ſit

$$\frac{a}{b} = m - 1 \pm \sqrt{mm - 2m}.$$

Quo autem quaeſtio ſit poſſibilis, ratio $\alpha : \beta$ ita eſt ſumenda, vt ſit $\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}} > \sqrt{n}$. Nam cum ſit $m$ numerus realis, neceſſe eſt vt praeterea ſit $m > 2$, hoc eſt $\frac{(\alpha+\beta)^2}{2n\alpha\beta} > 2$, ſiue $\frac{(\alpha+\beta)^2}{4n\alpha\beta} > 1$, ſeu $\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}} > \sqrt{n}$.

## Corollarium 1.

§. 9. Si ambo corpora ſtatuantur aequalia, et quaeratur ratio filorum ita, vt tempora oſcillationum ſint in data ratione, ob $n = 2$ pro hoc caſu conditio adimplenda ita ſe habebit: $\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta} > 2$, ſiue $\alpha\alpha - 6\alpha\beta + \beta\beta > 0$. Statuatur ergo $\alpha\alpha = 6\alpha\beta - \beta\beta + \beta\beta\omega$, eritque $\alpha = 3\beta \pm \sqrt{(8\beta\beta + \beta\beta\omega)}$, ſiue $\frac{\alpha}{\beta} = 3 \pm \sqrt{(8+\omega)}$, hoc eſt ratio data $\alpha : \beta$ ita comparata eſſe debet, vt ſit vel $\frac{\alpha}{\beta} > 3 + \sqrt{8}$ vel $\frac{\alpha}{\beta} < 3 - \sqrt{8}$, quae conditiones ita enunciari poſſunt: *Poſitis ambobus corpuſculis A et B aequalibus, nulla inter tempora oſcillationum* $\sqrt{\alpha}$ *et* $\sqrt{\beta}$ *ratio ſubſiſtere poteſt, niſi extra limites* $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ et $\sqrt{3-\sqrt{8}}$. Quaeſtio igitur impoſſibilis eſt, quoties fractio $\frac{\alpha}{\beta}$ continetur intra limites $3 + \sqrt{8} = \frac{35}{6}$ et $3 - \sqrt{8} = \frac{1}{6}$ proxime.

Corol-

## Corollarium 2.

§. 10. Ita ſi quaeratur exempli gratia ratio filorum $a$ et $b$ talis, vt exiſtente $A = B$ oſcillationes fiant aequales, hoc caſu ob $n = 2$, $m = 1$ et $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, ideoque *intra* limites ſupra aſſignatos, habebimus $\frac{a}{b} = \sqrt{-1}$, vnde manifeſtum eſt hoc caſu aequalitatem inter oſcillationum tempora locum habere non poſſe.

## Corollarium 3.

§. 11. Sin autem quaeratur ratio ipſa $\alpha : \beta$, caſu quo $B = A$ et $b = a$, hoc eſt maſſae et fila aequalia, erit $\frac{a}{b} = 1$, ideoque $m - 1 \pm \sqrt{(mm - 2m)} = 1$, vnde deducitur $m = 2$, ideoque fieri debet $\frac{(\alpha + \beta)^2}{2\alpha\beta} = 4$, ſiue $\alpha\alpha - 6\alpha\beta + \beta\beta = 0$, vnde fit $\frac{\alpha}{\beta} = 3 \pm \sqrt{8}$. Tempora igitur oſcillationum hoc caſu erunt 1 et $3 \pm \sqrt{8}$, hoc eſt tempore vnius oſcillationis tardioris corpuſculum alterum duas proxime faciet oſcillationes cum dimidia.

## Problema III.

§. 12. *Inueſtigare conditiones filorum* a *et* b, *vt longitudines* k *et* k′ *penduli ſimplicis iſochroni fiant rationales.*

## Solutio.

Cum igitur eſſe debeat $\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{ab}{n} = \Box$, ſtatuatur hoc quadratum $\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{ab}{n} = \frac{cc}{4}$, eritque $n = \frac{4ab}{(a+b)^2 - cc}$. At vero ob $n = 1 + \frac{B}{A} > 1$, ſemper eſſe debet $\frac{4ab}{(a+b)^2 - cc} > 1$, ſiue $4ab > (a+b)^2 - cc$, hoc eſt $cc > (a-b)^2$, conſequenter $c > a - b$. Introducta autem hac littera $c$ longitudines

nes pendulorum ſimpliciorum iſochronorum erunt

$$k = \frac{a+b+c}{2} \text{ et } k' = \frac{a+b-c}{2}.$$

Cum igitur tempora oſcillationum ſint in ratione ſubduplicata longitudinum $k$ et $k'$, ſi haec ratio ſtatuatur $\mu : \nu$, erit

$$\mu : \nu = \sqrt{(a+b+c)} : \sqrt{(a+b-c)},$$

vnde fit $\frac{\mu\mu}{\nu\nu} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+b+c}{a+b-c}$, ac proinde $c = \frac{(a+b)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$; qui valor, ob $c > a-b$, eſſe debet $\frac{(a+b)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta} > a-b$, ſiquidem fuerit $a > b$. At vero eſſe poterit $a > b$, $a < b$, $a = b$, vnde tres caſus ſunt conſiderandi.

## Caſus I.

Sit $a > b$, fierique debebit

$$(a+b)(\alpha-\beta) > (a-b)(\alpha+\beta),$$

hoc eſt $b\alpha > a\beta$, ſiue $\frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta}$. At vero eſt per hypotheſin $a > b$, ſiue $\frac{a}{b} > 1$. Habemus ergo has conditiones: $\frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{a}{b} > 1$, quae ſi fuerint adimpletae, erit $c = \frac{(a+b)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$, vnde fit $r = \frac{ab(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta(a+b)^2}$, conſequenter

$$\frac{B}{A} = \frac{ab(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta(a+b)^2}{\alpha\beta(a+b)^2}$$

et longitudines quaeſitae penduli ſimplicis iſochroni rationales

$$k = \frac{a+b+c}{2} \text{ et } k' = \frac{a+b-c}{2}.$$

## Caſus II.

Sit $b > a$, fierique debebit

$$(a+b)(\alpha-\beta) > (b-a)(\alpha+\beta),$$

quae conditio euoluta praebet $a\alpha > b\beta$, hoc eſt $\frac{b}{a} < \frac{\alpha}{\beta}$. Per hypotheſin autem eſt $\frac{b}{a} > 1$; vnde hae duae conditiones

erunt adimplendae: $\frac{b}{a} < \frac{\alpha}{\beta}$ et $\frac{b}{a} > 1$, quo facto habebitur

$$c = \frac{(a+b)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta},\quad \frac{B}{A} = \frac{ab(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta(a+b)^2}{\alpha\beta(a+b)^2}$$

longitudines autem quaeſitae erunt

$$k = \frac{a+b+c}{2} \text{ et } k' = \frac{a+b-c}{2}.$$

## Caſus III.

Sit $b = a$, fierique debebit $c = \frac{2a(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta} > 0$, hoc eſt $2a(\alpha-\beta) > 0$, quod ſemper euenit, quia per hypotheſin eſt $\alpha > \beta$. Hoc igitur caſu ſine vlla reſtrictione ſumi poterit $c = \frac{2a(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$, tum autem erit $\frac{B}{A} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}$, longitudines vero

$$k = \frac{a+b+c}{2} \text{ et } k' = \frac{a+b-c}{2}.$$

## Scholion.

§. 13. Si, data ratione ponduſculorum A et B, ſiue numero $n$, in valores filorum $a$ et $b$ inquirere vellemus, ita determinandos, vt ratio temporum prodeat rationalis, ad formulas perduceremur, quas nullo modo quadratas efficere licet in genere. Caſum igitur tantum particularem, quo $n = 2$, ſeu ambo corpora aequalia, examinaui et inueni quaeſtionem tum impoſſibilem fieri, id quod ex demonſtratione ſequentis Theorematis clarius patebit.

## Theorema.

§. 14. *Poſitis ambobus corporibus aequalibus nulla datur relatio inter fila a et b, qua ratio temporum prodiret rationalis.*

## Demonſtratio.

Cum hoc caſu, quo $n = 2$, habeamus

$2k = a + b + \sqrt{(aa+bb)}$ et

$2k' = a + b - \sqrt{(aa+bb)}$,

pona-

ponatur $a = e(pp - qq)$ et $b = 2epq$, eritque

$$\sqrt{(aa + bb)} = e(pp + qq),$$

conſequenter

$$k = e(pp + pq) \text{ et } k' = e(pq - qq), \text{ hinc}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{k}{k'} = \frac{pp + pq}{pq - qq} = \frac{p(p+q)}{q(p-q)}.$$

Multiplicetur haec fractio ſupra et infra per $q(p - q)$, et cum $\frac{\alpha}{\beta}$ debeat eſſe quadratum, fieri debet

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{pq(pp - qq)}{qq(p-q)^2} = \square,$$

ſiue etiam $pq(pp - qq) = \square$, ſiue poſito $p = xx$ et $q = yy$, ob $pq = xxyy = \square$, neceſſe eſt vt ſit $x^4 - y^4 = \square$, quod impoſſibile eſſe cuique conſtat. Demonſtratum enim eſt differentiam duorum biquadratorum quadratum eſſe non poſſe.

## Scholion 1.

§. 15. Plerumque autem, ſi numerum $n$, ſeu rationem corporum A et B, pro lubitu accipere voluerimus, et rationem filorum $a$ et $b$ ita definire, vt tempora fiant rationalia, in caſus incideremus, qui rationem rationalem inter tempora oſcillationum plane non admittunt; vnde coacti erimus pro his caſibus longitudinem fili vtriusque ſecundum praecepta ſupra data quouis caſu inueſtigare.

## Scholion 2.

§. 16. Si id tantum intendamus, vt ratio temporum prodeat rationalis, quaecunque fuerit relatio inter fila, ſtatim ponatur $a + b = 2r$ et $\sqrt{(a + b)^2 - \frac{4ab}{n}} = 2s$, eritque $4ss = 4rr - \frac{4ab}{n}$, hinc $4ab = 4n(rr - ss)$, quo ſubtracto ab $aa + 2ab + bb = 4rr$, remanet

$$(a-b)^2 = 4(rr - nrr + nss),$$

ſiue extracta radice

$$a - b = 2\surd(rr - nrr + nss),$$

vnde patet eſſe debere $rr + nss > nrr$. Tum autem erit

$$a = r + \surd(rr + nss - nrr);$$

$$b = r - \surd(rr + nss - nrr);$$

deinde $k = r + s$ et $k' = r - s$, hincque $\frac{k}{k'} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{r+s}{r-s}$, ideoque ratio quaeſita rationalis. Dummodo igitur fuerit $rr + nss > nrr$, hoc eſt $n < \frac{rr}{rr-ss}$, hoc eſt $n < \frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}$, ob $\frac{r}{s} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$, ſemper ratio temporum rationalis eſſe poterit, quam conditionem etiam ſupra §. 8. inuenimus, vbi ſermo erat de determinanda ratione filorum tali, vt ratio ſit data inter longitudines pendulorum ſimplicium.

SUR

# SUR LE MOUVEMEMT GYRATOIRE D'UN CORPS ATTACHÉ À UN FIL EXTENSIBLE.

Par

*JACQUES BERNOULLI.*

*Préſenté à la Conférence le* 23. *Novembre* 1786.

Dans les recherches qu'on fait ſur le mouvement d'un corps attaché à un fil, dont l'autre boût reſte fixé toujours au même point, on ſuppoſe ordinairement, que le fil eſt abſolument inextenſible. Comme cette ſuppoſition ne peut jamais être réelle en toute rigueur, j'ai cru qu'un eſſai ſur les perturbations, que le mouvement doit ſouffrir par l'extenſibilité du fil, ne ſeroit pas entiérement deſtitué d'interêt; & c'eſt le réſultat des recherches que j'ai faites jusqu'à-préſent ſur ce ſujèt, que je préſente ici à l'Académie. Un ſecond Memoire contiendra peut-être la ſuite des ces recherches.

§. 1. J'ai commencé par le cas le plus ſimple & le plus facile à traiter, en ſuppoſant qu'une force finie ne puiſſe produire qu'une extenſion infiniment-petite; ce qui ne s'écarte pas extrêmement de la nature, où les extenſions ont toujours un très petit rapport avec la longueur du fil. Cette ſuppoſition d'ailleurs repond à celle, que les plus grands geomètres

 ſe

ſe ſont permiſe en traitant de la vibration des cordes, où ils regardent les ordonnées de la courbe formée par la corde, comme infiniment-petites.

§. 2. Je ſuppoſe auſſi, ce qui eſt admis par les phyſiciens comme confirmé très à-peu-près par la nature, que les extenſions du même fil ſont proportionnelles aux forces, qui ſont appliquées à le tendre.

§. 3. Il eſt néceſſaire, que le choc, qui doit donner le mouvement au corps, ſe faſſe dans une direction perpendiculaire ou quaſi-perpendiculaire au fil, étendu dans toute ſa longueur. Sans cela il en réſulteroit, ou immédiatement, ou par la décompoſition des forces, une viteſſe dans la direction du fil même; & par une conſéquence néceſſaire le fil ſe romproit à l'inſtant, à moins que cette viteſſe ne put être regardée comme infiniment-petite. Car ſoit la viteſſe communiquée au corps dans la direction du fil $= c$, celle qui lui reſte après s'être étendu de l'eſpace $x$, $= v$, ſa maſſe $=$ M, le plus grand poids, que le fil puiſſe porter ſans ſe rompre, $=$ P, & ſa plus grande extenſion $= \theta$; la force, avec laquelle le fil ſera tendu, après s'être étendu de la longueur $x$, & par conſéquent auſſi ſa force reſſerrante, ſera $= \frac{x}{\theta} . P$. On aura donc $- \partial v = \frac{x}{\theta} . \frac{P}{M} . \frac{\partial x}{v}$, ou $- v \partial v = \frac{P x \partial x}{M \theta}$, & en intégrant, $C - \frac{1}{2} v v = \frac{P x x}{2 M \theta}$. Comme $v = c$, quand $x = 0$, C ſera $= \frac{1}{2} c c$, donc $c c - v v = \frac{P x x}{M \theta}$. Or pour que le fil ne ſe rompit pas, il faudroit que $v = 0$, quand $x = \theta$, ce qui donneroit $c c = \frac{P \theta}{M}$, formule contradictoire, puiſque $c$, P, & M étant des quantités finies, & $\theta$ infiniment-petit, on auroit le fini égal à l'infiniment-petit.

§. 4.

§. 4. Pour plus de ſimplicité je ne regarde non plus d'abord que le choc, qui ſe fait, & la viteſſe, qui ſe produit, dans un des plans, qu'on peut mener par le fil étendu, enſorte que le mouvement ſe faſſe toûjours dans le même plan, & que la courbe décrite par le corps ne puiſſe pas être de la nature de celles à double courbure.

§. 5. Pour pouvoir faire abſtraction dans ce premier cas que je traite, de l'action de la gravité, je ſuppoſe que le mouvement ſe faſſe ſans friction ſur une table horizontale.

§. 6. De ce que les extenſions du fil ſont infiniment-petites, il ſuit que la viteſſe produite dans la direction du fil par la combinaiſon de la force centrifuge du corps & de la force reſſerrante du fil, doit auſſi toûjours reſter infiniment-petite; puisqu'une force finie, en agiſſant par un eſpace infiniment-petit, ne peut produire qu'une viteſſe infiniment-petite. La même choſe eſt d'ailleurs manifeſte par le raiſonnement du §e. 3.

§. 7. Puisque donc la viteſſe dans la direction du fil eſt infiniment plus petite que la viteſſe gyratoire du corps, il ſuit que les extenſions produites par la premiére, ſont toûjours infiniment plus petites, que les angles décrits avec la derniere.

§. 8. Ces viteſſes infiniment-petites dans la direction du fil ne pourront donc cauſer aucune perturbation dans la viteſſe gyratoire du corps, qui par-conſequent reſtera toujours égale à la viteſſe initiale. Cela ſe voit encore mieux par le raiſonnement ſuivant.

Soit

Tab. VII. Fig. 3. Soit A B, la longueur naturelle du fil, quand il eſt étendu, ſans être tendu - - - - - $= a$
l'angle B A P - - - - - - - $= \omega$
l'arc B P - - - - - - - - $= a\,\omega$

qu'en parcourant l'angle $\omega$, le corps ſoit parvenu en M, de-ſorte que le fil ſe ſoit étendu de la longueur P M $= z$
la force centrifuge du corps en M - - - $= \Phi$

A M étant perpendiculaire à M $r$, (menée parallèle à P $p$ $=$ $a\,\partial\,\omega$,) la force reſſerrante du fil ne peut changer en rien la viteſſe gyratoire du corps: voyons, ſi elle doit ſouffrir quelque atteinte de la force centrifuge, qui agit dans la direction M T, perpendiculaire à l'élément de la courbe M $m$. En décompoſant cette force, indiquée par M T, en deux autres M V & M S, l'une dans la direction A M, & l'autre ſelon $r$ M, on aura, par la reſſemblance des triangles M S T & M $m$ $r$, (en appellant M $m$, $\partial\,s$,) M S $= \frac{\Phi\,\partial\,z}{\partial\,s}$, & c'eſt cette force uniquement, qui pourroit faire varier la viteſſe gyratoire du corps. Or cette force eſt infiniment-petite & peut être négligée, parceque $\partial\,z$ eſt infiniment-petit par rapport à $\partial\,s$ *), par-conſéquent la viteſſe gyratoire du corps reſtera toûjours égale à ſa viteſſe initiale.

§. 9.

*) La viteſſe ſelon $r\,m$ étant infiniment-petite par rapport à celle ſelon M $m$, ces eſpaces, décrits dans le même élément de tems, doivent auſſi être l'un infiniment plus petit que l'autre. Car du reſte il ne s'en ſuivroit pas, que $z$ étant infiniment plus petit que l'arc B M ou B P, $\partial\,z$ dut néceſſairement auſſi être infiniment plus petit que M $r$ ou M $m$: c'eſt ce qui ſera démontré plus bas, où l'on verra $\partial\,\partial\,z$ dans un rapport fini avec $\partial$. M $m$.

§. 9. En retenant donc les dénominations du §. 8., mettons de plus la viteſſe initiale gyratoire - - $= c$
la maſſe du corps - - - - - - $= M$
la plus grande extenſion poſſible du fil - - - $= \partial$
le poids requis pour la produire - - - $= P$
le rayon oſculateur en M - - - - $= R$
donc la force centrifuge en M - - - $= \frac{cc}{R}$
l'élément du tems - - - - - - $= \partial t$

la viteſſe infiniment-petite, que l'effort combiné de la force centrifuge & de l'élaſticité du fil peuvent donner au corps dans la direction P M - $= v$,

on aura $v = \frac{c\,\partial z}{a\,\partial\omega}$, puisque $a\,\partial\omega$ étant décrit avec la viteſſe $c$, $\partial z$ doit être décrite dans le même tems.

§. 10. Par nos ſuppoſitions on voit, qu'on peut auſſi regarder $a + z$ comme $= a$, &

$$\partial s = \sqrt{(a^2\,\partial\omega^2 + \partial z^2)} = a\,\partial\omega;$$

par-conſéquent la force centrifuge doit être regardée comme agiſſant entiérement dans la direction P M, puisque l'effort, qui en réſulte dans cette direction, eſt $= \frac{Mr}{Mm} \times \frac{cc}{R}$, & que, comme on vient de voir, $Mr = Mm$.

§. 11. Quant à la force contraire ou reſſerrante du fil, elle ſera en $M = \frac{z}{\partial} . P$.

§. 12. D'après tout ceci, & par les principes connus, on aura donc la force accélératrice

$$\frac{cc}{R} - \frac{z}{\partial} \cdot \frac{P}{M} = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = (\text{puisque } \partial t = \frac{a\,\partial\omega}{c})\ \frac{cc\,\partial\partial z}{aa\,\partial\omega^2}.$$

§. 13. Cherchons d'abord l'expreſſion du rayon oſculateur R. La formule générale pour les courbes, dont les ordonnées partent d'un centre, eſt $R = \frac{y \partial s^3}{\partial x^3 + y \partial y \partial \partial x - y \partial x \partial \partial y}$: & en appliquant cette formule à notre cas préſent, on a $y = a + z = a$, $\partial y = \partial z$, $\partial \partial y = \partial \partial z$, $\partial x = a \partial \omega$, $\partial \partial x = a \partial \partial \omega = 0$, puisque l'équation du §^e^ précédent ſuppoſe, que $\partial t$, & par-conſéquent auſſi $\partial \omega$, ſoit conſtante; enfin $\partial s = \partial x = a \partial \omega$. En ſubſtituant ces différentes valeurs dans la formule générale, on aura

$$R = \frac{a^4 \partial \omega^3}{a^3 \partial \omega^3 - a a \partial \omega \partial \partial z} = \frac{a a \partial \omega^2}{a \partial \omega^2 - \partial \partial z}.$$

Ici il ſemble au premier coup d'oeïl, que $z$ étant infiniment-petit par rapport à $\omega$, $\partial \partial z$ devroit l'être auſſi à l'égard de $\partial \omega^2$; qu'ainſi on pourroit encore négliger $\partial \partial z$, ce qui donneroit ſimplement $R = a$. Mais outre qu'on voit d'abord, que la courbe, quoique s'écartant infiniment-peu d'un cercle, ne peut pourtant pas jouïr de la propriété d'avoir un rayon oſculateur conſtant, on trouveroit auſſi à la fin, en continuant le calcul d'après cette ſuppoſition, que la courbe auroit des rayons oſculateurs d'une grandeur très-variable, ce qui ſeroit en contradiction avec ce qu'on auroit commencé par admettre. Retenons donc l'expreſſion $R = \frac{a a \partial \omega^2}{a \partial \omega^2 - \partial \partial z}$, & attendons jusqu'après pour examiner la raiſon, pourquoi $\partial \partial z$ ne peut pas être négligée comme infiniment-petite à l'égard de $a \partial \omega^2$.

§. 14. En ſubſtituant donc la valeur de R dans l'équation du §. 12., on aura $\frac{a c^2 \partial \omega^2 - c^2 \partial \partial z}{a^2 \partial \omega^2} - \frac{P z}{M \theta} = \frac{c^2 \partial \partial z}{a^2 \partial \omega^2}$. Multipliant par $a a \partial \omega^2$ et encore par $\partial z$, l'équation devient

$$a c c \partial \omega^2 \partial z - 2 c c \partial z \partial \partial z - \frac{P a a z \partial z \partial \omega^2}{M \theta} = 0.$$

En intégrant on trouve

$$a c c z \partial \omega^2 - c c \partial z^2 - \frac{P a a z z \partial \omega^2}{2 M \theta} + \text{conſt.} = 0.$$

J'atten-

J'attendrai jusqu'à la fin pour déterminer cette conſtante; mais pour l'homogénéité des termes, & pour pouvoir paſſer à la ſeconde intégration, je lui donnerai cette forme, $CC\theta\partial\omega^2$; nous avons donc

$$acc z\partial\omega^2 - cc\partial z^2 - \frac{Paazz\partial\omega^2}{2M\theta} + CC\theta\partial\omega^2 = 0,$$

ce qui donne $\partial\omega^2 = \dfrac{cc\partial z^2}{accz - \frac{Paazz}{2M\theta} + CC\theta}$, ou

$$\partial\omega = \sqrt{\frac{2ccM\theta}{Paa}} \times \frac{\partial z}{\sqrt{\frac{2M\theta ccz}{Pa} + \frac{2MCC\theta\theta}{Paa} - zz}};$$

faiſons $z = \frac{M\theta cc}{Pa} - y$, & $\sqrt{\frac{2ccM\theta}{Paa}} = \lambda$, & ſubſtituons ces valeurs, on aura

$$\partial\omega = \frac{-\lambda\partial y}{\sqrt{\frac{c^4M^2\theta^2}{P^2a^2} + \frac{2MCC\theta\theta}{Paa} - yy}} = \frac{-\lambda\partial y}{\sqrt{bb - yy}},$$

en mettant encore $\sqrt{\frac{c^4M^2\theta^2}{P^2a^2} + \frac{2MC^2\theta^2}{Pa^2}} = bb$. Diviſant le numérateur & le dénominateur par $b$, l'équation devient $\partial\omega = \lambda \times \frac{-\partial y : b}{\sqrt{1 - yy : bb}}$. L'intégration donne donc $\omega = \lambda\,(D - A.\,\text{ſin.}\, y : b)$, ou $A.\,\text{ſin.}\,\frac{y}{b} = D - \frac{\omega}{\lambda}$, $\frac{y}{b} = \text{ſin.}\,(D - \frac{\omega}{\lambda})$, et $y = b\,\text{ſin.}\,(D - \omega : \lambda)$, par conſequent $z = \frac{M\theta cc}{Pa} - b\,\text{ſin.}\,(D - \omega : \lambda) =$ (en remettant pour $\lambda$ et $b$ leurs valeurs)

$$\frac{M\theta cc}{Pa} - \sqrt{\left(\frac{c^4M^2\theta^2}{P^2a^2} + \frac{2MC^2\theta^2}{Pa^2}\right)} \times \text{ſin.}\,\left(D - \omega\sqrt{\frac{Paa}{2Mcc\theta}}\right).$$

§. 15. En différentiant l'équation

$$z = \frac{M\theta cc}{Pa} - b\,\text{ſin.}\,(D - \frac{\omega}{\lambda}),$$

on trouve $\partial z = \frac{b\partial\omega}{\lambda} \times \text{coſ.}\,(D - \frac{\omega}{\lambda})$, & par-conſéquent la petite viteſſe

$$v = \frac{c\partial z}{a\partial\omega} = \frac{bc}{\lambda a} \times \text{coſ.}\,(D - \frac{\omega}{\lambda}) = \sqrt{\frac{c^4M\theta + 2PCC\theta}{2Paa}} \times \text{coſ.}\,\left(D - \omega\sqrt{\frac{Paa}{2ccM\theta}}\right).$$

§. 16. Differentiant $\partial z$ de nouveau, on aura

$$\partial\partial z = \frac{b\,\partial\,\omega^2}{\lambda\,\lambda} \times \text{ſin.}\left(D - \frac{\omega}{\lambda}\right).$$

§. 17. Examinons maintenant le genre des différens rapports de $z:\omega$, $\partial z:\partial\omega$ & $\partial\partial z:\partial\omega^2$. Dans le §. 14. nous avons trouvé $\omega = \lambda\,(D - A\,.\,\text{ſin.}\,y:b)$. Or $y$ & $b$ étant toutes deux des quantités infiniment-petites du premier ordre, $D - A\,.\,\text{ſin.}\,y:b$ ſera une quantité finie, & $\omega$ ſera une quantité du même genre que $\lambda = \sqrt{\frac{2c^2 M\theta}{P\,a\,a}}$; ainſi $\omega$ eſt auſſi infiniment-petit, mais d'un ordre intermédiaire entre le fini & l'infiniment-petit du premier ordre, & l'on aura

$$z:\omega :: \tfrac{1}{\infty} : \sqrt{\tfrac{1}{\infty}} :: 1 : \sqrt{\infty}.$$

§. 18. Le rapport de $\partial z:\partial\omega$ ſe tire du §. 15., où ce qui dans l'expreſſion de $\partial z$ eſt renfermé entre deux parenthèſes, eſt encore une quantité finie; quant à l'autre partie, elle donnera, en mettant $\frac{1}{\infty}$ pour $\theta$,

$$\partial z:\partial\omega :: \sqrt{\tfrac{1}{\infty}} : 1 :: 1 : \sqrt{\infty}:$$

& par-conſéquent on pourra à juſte titre, comme j'ai fait, négliger $z$ & $\partial z$ en comparaiſon de $\omega$ & $\partial\omega$.

§. 19. Mais c'eſt bien différent pour le $\partial\partial z$: car dans le §. 16. les multiplicateurs de $\partial\omega^2$ étant tous deux des quantités finies, on voit, que le rapport de $\partial\partial z:\partial\omega^2$ eſt exprimé par une quantité finie; & par cela même, pourquoi dans l'expreſſion du rayon oſculateur on ne peut pas négliger le $\partial\partial z$, comme cela paroiſſoit naturellement permis. Au reſte en enviſageant avec quelque attention l'équation différentielle du §. 12., on auroit déja pu en conclure la néceſſité d'un rapport fini entre $\partial\partial z$ & $\partial\omega^2$, parceque ſans cela les termes n'en ſeroient pas homogènes: & cet accord ſert à prouver la juſteſſe de notre raiſonnement.

§. 20.

§. 20. Il eſt tems d'examiner la nature de la courbe, dont nous avons trouvé l'équation; après quoi nous déterminerons auſſi les conſtantes C C & D. Reprenons pour cet effet l'équation du §. 14., $\omega = \lambda$ (D — A . ſin. $y : b$), qui revient à celle-ci A . ſin. $y : b =$ D — $\omega : \lambda =$ (en faiſant $\omega = \lambda D + \lambda \Phi - \lambda 90°$) $90° - \Phi$, ou $\frac{y}{b} = \frac{Mc\theta^2}{Pab} - \frac{z}{b} = \frac{f-z}{b}$ (mettant $\frac{Mcc\theta}{Pa} = f$) $=$ ſin. $(90° - \Phi) =$ coſ. $\Phi$; d'où l'on tire $z = f - b$ coſ. $\Phi = f - b + b - b$ coſ. $\Phi = f - b + b$ ſin. verſ. $\Phi$. Donc ſin. verſ. $\Phi = \frac{z-f+b}{b}$, ou $\Phi =$ A . ſin. verſ. $(\frac{z-f+b}{b})$. Remettant pour $\Phi$ ſa valeur, on a

$\omega - \lambda D + \lambda 90° = \lambda$ A . ſin. verſ. $(\frac{z-f+b}{b})$, et

$a\omega - a\lambda D + a\lambda 90° = a\lambda$ A . ſin. verſ. $(\frac{z-f+b}{b})$

$= \frac{a\lambda}{b} \times$ A . ſin. verſ. $(z - f + b)$ rayon $b$.

(Cette dernière expreſſion ſignifie, que $\frac{a\lambda}{b}$ doit être multiplié avec un arc, dont le rayon $= b$, & le ſinus-verſe $= z - f + b$).

Décrivons donc avec les deux rayons A C $= a$, & Tab. VII.
A D $= a + f - b$ les deux cercles concentriques & infini- Fig. 4.
ment-voiſins, C B P & D F A; que le commencement des $\omega$ ſe faſſe au point B, & qu'on prenne l'arc B C (du coté oppoſé aux $\omega$ poſitifs) $= a\lambda 90° - a\lambda D$; ſoit de plus D M la courbe en queſtion, pour laquelle on a nommé l'angle B A P, $\omega$, & P M, $z$; on aura C P $=$ D R $= a\omega - a\lambda D + a\lambda 90°$, & R M $= z - f + b$. Notre équation donne donc D R $=$ à un arc de cercle, dont le rayon $= b$, & le ſinus-verſe $=$ R M, en multipliant cet arc par $\frac{a\lambda}{b}$.

A cette propriété on reconnoit donc infaïlliblement, que notre courbe eſt une cycloïde, ou plutôt une epicycloïde

 *inſi-*

*infiniment* allongée (puiſque $a\lambda : b :: \sqrt{\frac{1}{\infty}} : \frac{1}{\infty}$), où les rayons des deux cercles ſont dans le rapport de $1 : \infty$, ſavoir celui du cercle mobile $= b = \sqrt{\frac{M^2 c^4 \theta^2}{P^2 a^2} + \frac{2 M C C \theta^2}{P a a}}$, & celui du cercle immobile $= a$.

§. 21. Comme le même ſinus-verſe peut convenir à une infinité de différens arcs-de-cercle, on voit que l'arc $a\omega$ aura une infinité de valeurs pour la même valeur de $z$; c'eſt ce qu'on ſait d'ailleurs être une propriété des courbes cycloïdales, & qu'on pouvoit auſſi prévoir d'avance, comme devant convenir à la courbe que nous cherchions. Il eſt manifeſte donc, que dans quelque petit tems fini que ce ſoit, le corps parcourra un arc $a\omega$ fini auſſi; mais dans ce petit tems il ne laiſſera pas que de décrire une infinité de petites epicycloïdes, dont chacune aura pour baſe un arc $a\omega = a\lambda 360°$, où un angle de $360\lambda$ degrés, où l'on ſe ſouviendra que $\lambda$ répréſente une fraction infiniment-petite.

§. 22. Si l'on vouloit qu'après un certain nombre de tours $m$, que le corps auroit faits, $z$ eut la même grandeur comme auparavant, il faudroit reprendre l'équation du §. 20., $z = f - b$ coſ. $\Phi = f - b$ ſin. $(D - \frac{\omega}{\lambda})$, & faire égales les valeurs de $z$, après avoir ſubſtitué pour $\omega$ ſucceſſivement $0$ & $m\, 360°$, ce qui donne

$$f - b \text{ ſin. } D = f - b \text{ ſin. } (D - \tfrac{m\, 360°}{\lambda}), \text{ ou}$$
$$\text{ſin. } D = \text{ſin. } (D - \tfrac{m\, 360°}{\lambda}).$$

Ainſi pour ſatisfaire à cette conditon, il faut ſimplement, que $\frac{m}{\lambda}$ ſoit un nombre entier. Si $m = 1$, le corps décrira dans un ſeul tour le nombre infini de $\frac{1}{\lambda}$ epicycloïdes, dont chacune occupera (comme nous avons déja trouvé plus haut) un arc de $\lambda\, 360°$ ſur le cercle immobile.

§. 23.

§. 23. Reprenons encore l'équation
$z = f - b$ ſin. $(D - \frac{\omega}{\lambda})$, qui donne
$\partial z = + \frac{b \partial \omega}{\lambda} \times$ coſ. $(D - \frac{\omega}{\lambda})$, et
$\partial \partial z = \frac{b \partial \omega^2}{\lambda \lambda} \times$ ſin. $(D - \frac{\omega}{\lambda})$.
En faiſant $\partial z = 0$, on a coſ. $(D - \frac{\omega}{\lambda}) = 0$, ce qui donne $D - \frac{\omega}{\lambda} = (2n + 1) 90°$, en entendant par $n$ un nombre quelconque entier), ou $\omega = \lambda D - \lambda (2n + 1) 90°$; ainſi on trouvera toutes les plus grandes & plus petites ordonnées $z$, en ſubſtituant ſucceſſivement pour $n$, 0 & les nombres entiers 1, 2, 3, &c. ou — 1, — 2, — 3, &c.

§. 24. Puisque ſin. $(D - \frac{\omega}{\lambda})$ ne peut devenir plus grand que $+ 1$, ni plus petit que $- 1$, les plus grandes ordonnées $z$ ſeront $= f + b$, & les plus petites $=$

$$f - b = \frac{M c^2 \theta}{P a} - \sqrt{\frac{M^2 c^4 \theta^2}{P^2 a a} + \frac{2 M C C \theta^2}{P a a}}.$$

Si donc la conſtante $C C = 0$, la plus petite ordonnée ſera auſſi $= 0$; elle ſera affirmative, ſi $C C$ eſt négative; mais ſi $C C$ étoit affirmatiue, $z$ deviendroit négative, lequel cas ne peut pas être compris dans notre calcul, puisque nous avons exprimé généralement la force élaſtique du fil par $\frac{z}{\theta} . P$, ce qui n'a lieu qu'autant que $z$ n'eſt pas négative, puisqu'alors la force élaſtique eſt toujours $= 0$.

§. 25. Puisque $v = \frac{c \partial z}{a \partial \omega}$, cette viteſſe ſelon la direction du fil ſera nulle aux points des plus grandes & des plus petites ordonnées. Et comme $\partial v = \frac{c \partial \partial z}{a \partial \omega}$, on aura les plus grandes viteſſes (alternativement affirmatives & négatives), en faiſant $\partial \partial z = 0$, ce qui donne par le §. 23., ſin. $(D - \frac{\omega}{\lambda}) = 0$, ou $D - \frac{\omega}{\lambda} = 2n 90°$ (où $n$ ſignifie encore un nombre quelconque

que entier), par-conſéquent $\omega = \lambda D - 2\lambda n 90°$. Mettant donc dans la valeur de

$$v = \frac{c \partial z}{a \partial \omega} = \frac{c b}{a \lambda} \text{coſ.} \left(D - \frac{\omega}{\lambda}\right),$$

$2 n 90°$ au lieu de $D - \frac{\omega}{\lambda}$, on a la plus grande viteſſe

$$= \frac{c b}{a \lambda} \text{coſ.} \, 2 n 90° = \pm \frac{b}{\lambda a} \times c.$$

§. 26. Subſtituons dans l'expreſſion du rayon oſculateur $R = \frac{a a \partial \omega^2}{a \partial \omega^2 - \partial \partial z}$ la valeur de $\partial \partial z$, on aura

$$R = \frac{a a \partial \omega^2}{a \partial \omega^2 - \frac{b \partial \omega^2}{\lambda \lambda} . \text{ſin.} \left(D - \frac{\omega}{\lambda}\right)} = \frac{\lambda^2 a^2}{\lambda^2 a - b \, \text{ſin.} \left(D - \frac{\omega}{\lambda}\right)}.$$

Ses limites ſeront donc

$$\frac{\lambda^2 a^2}{\lambda^2 a \mp b} = \frac{a^2}{a \mp \frac{b}{\lambda \lambda}} = \frac{a a}{a \mp \frac{P a^2}{2 M C^2 \theta} \sqrt{\left(\frac{M^2 C^4 \theta^2}{P^2 a^2} + \frac{2 M C^2 \theta^2}{P a^2}\right)}} =$$

$$\frac{a}{1 \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{P C C}{2 M C^4}\right)}}.$$

Or comme nous avons déja vu, qu'on ne peut pas prendre C C affirmatif, nous voyons ici, que $- C C$ ne peut pas être $> \frac{M C^4}{2 P}$, parce qu'autrement R deviendroit imaginaire. Mais ſi $C C = - \frac{M C^4}{2 P}$, on aura R généralement $= a$, ce qui marque une epicycloïde, allongée au point de devenir un cercle parfait, lequel cas peut arriver, quand au commencement du mouvement le fil a déja une telle tenſion, & le corps une telle viteſſe, que la force centrifuge ſoit parfaitement en équilibre avec la force reſſerrante du fil.

§. 27. R ne peut donc jamais avoir des limites plus étendues, que quand $C C = 0$, alors elles deviennent $\begin{matrix} + 2 a \\ + \frac{2}{3} a \end{matrix}$.

Com-

Comme ces valeurs des limites ſont toutes deux poſitives, on voit que la courbe, quoiqu'une epicycloïde *allongée*, n'a pas de point d'infléxion, et que toute la concavité eſt tournée vers le cercle immobile.

§. 28. Déterminons donc maintenant enfin les conſtantes C C et D, ce que j'ai renvoyé jusqu'à la fin, pour donner plus de généralité aux réfléxions précédentes, qui cependant nous ont déja fait voir, que toute autre ſuppoſition, que celle qui donne C C ou négatif, ou $=0$, ne pourra pas convenir. Suppoſons donc que lorsque le corps a commencé à ſe mouvoir, & que par-conſéquent $\omega = 0$, $z$ ait auſſi été $= 0$, de même que la petite viteſſe du corps ſelon la direction du fil, on aura d'abord par le §. 14., $\frac{Mcc\theta}{Pa} - b.\,\text{ſin}.\,D = 0$, ou $D = A.\,\text{ſin}.\,\frac{Mcc\theta}{Pba}$; & par le §. 15., $\frac{cb}{a\lambda}\,\text{coſ}.\,D = 0$. Or $b$ ne peut pas être $= 0$, parcequ'autrement $\frac{Mc^2\theta}{Pba}$ donneroit un ſinus infini, ce qui eſt abſurde; il faut donc, que $\text{coſ}.\,D = 0$, ou $D = (2n+1)\,90^\circ$. On a par cela même auſſi $\frac{Mcc\theta}{Pba} = 1$, ou

$$b = \sqrt{\left(\frac{M^2c^4\theta^2}{P^2aa} + \frac{2MCC\theta^2}{Paa}\right)} = \frac{Mcc\theta}{Pa}, \text{ et } C = 0.$$

On voit donc que la ſuppoſition que nous venons de faire, quadre parfaitement avec notre théorie.

L'équation de la courbe

$$z = \frac{Mc^2\theta}{Pa} - b\,\text{ſin}.\left(D - \frac{\omega}{\lambda}\right)$$

ſe changera, en mettant pour C et D les valeurs que nous venons de trouver, en celle-ci

$$z = \frac{Mc^2\theta}{Pa} - \frac{Mc^2\theta}{Pa}\,\text{ſin}.\left[(2n+1)\,90^\circ - \omega\sqrt{\frac{Pca}{2Mcc\theta}}\right] = \frac{Mc^2\theta}{Pa}\left(1 \mp \text{coſ}.\,\omega\sqrt{\frac{Pa^2}{2Mc^2\theta}}\right).$$

Quant à l'équation du §. 15., elle ſe changera en celle-ci

$$v = \sqrt{\frac{M c^4 \theta}{2 P a^2}} \times \text{coſ.} \left[ (2n + 1) 90° - \omega \sqrt{\frac{P a^2}{2 c^2 M \theta}} \right] = \sqrt{\frac{M c^4 \theta}{P a^2}} \times \mp \text{ſin.}\ \omega \sqrt{\frac{P a^2}{2 c^2 M \theta}}.$$

Comme on peut donner une infinité de valeurs à la conſtante D, le ſigne — dans ces dernieres équations aura lieu, quand $n = 0$ ou à un nombre pair, & le ſigne +, quand $n =$ à un nombre impair.

§. 29. Appliquons maintenant ceci à un exemple: & quoique dans l'état phyſique des choſes il n'y ait pas des quantités vraiment infiniment-petites, on pourra toûjours ſe fier ſuffiſamment à nos réſultats, pourvu qu'on prenne $\theta$ très petite en comparaiſon de $a$.

Soyent donc en meſures de France, $a = 3$ pieds, la viteſſe gyratoire du corps $= 10$ pieds par ſeconde, ce qui donne $c = \sqrt{\frac{100}{30}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $\theta = 1$ pouce $= \frac{1}{12}$ pied, $P = 5$ ℔, $M = 1$ ℔; on aura $z = \frac{\theta}{9} \times \left(1 \mp \text{coſ.}\ \omega \sqrt{\frac{27}{4\theta}}\right)$, & la plus grande excurſion ne ſeroit que $\frac{2}{9}\theta$ ou $2\frac{2}{3}$ lignes; & comme alors $\omega \sqrt{\frac{27}{4\theta}} = 180°$ ou $= 0$, on a $\omega = 0$ ou

$$= 180° \sqrt{\frac{4\theta}{27}} = 180° \sqrt{\frac{1}{81}} = 20°.$$

§. 30. Chacune de nos petites epicycloïdes aura donc pour baſe un arc de 20 degrés d'un cercle, dont le rayon $= 3$ pieds, ce qui fait à-peu-près $1\frac{1}{21}$ pieds. D'un autre coté $b$, ou le rayon du cercle mobile, devenant égal à $\frac{1}{9}\theta = \frac{1}{108}$ pied, la circonference elle même ſera $= \frac{44}{7} \cdot \frac{1}{108} = \frac{11}{189}$ pied; or $1\frac{1}{21}$ eſt dans un très grand rapport avec $\frac{11}{189}$, ce qui marque une epicycloïde extrêmement allongée, & répond à ce que nous avons trouvé plus haut au §. 20.

§. 31.

§. 31. La viteſſe $v$ deviendra $= \sqrt{\tfrac{5}{485}} \times \mp$ ſin. $\omega \sqrt{81}$, ce qui fait une viteſſe de $\sqrt{\tfrac{150}{485}} \times \mp$ ſin. $9\,\omega$ pieds per ſeconde: la plus grande viteſſe ſera donc de $\mp \sqrt{\tfrac{150}{485}}$ pieds, ou 0, 5555 pieds par ſeconde.

§. 32. Si, au lieu de faire $z$ & $v = 0$, quand $\omega = 0$, on vouloit que $z$ fut alors $= \zeta$, & $v = u$, on auroit encore par le §. 14.

$$\zeta = \frac{M c c \theta}{P a} - b \text{ ſin. D},$$

ce qui donne

$$D = \text{A. ſin.} \left(\frac{M c c \theta}{P b a} - \frac{\zeta}{b}\right);$$

& par le §. 15., $u = \frac{c b}{a \lambda} \text{ coſ. D}$, ou

$$D = \text{A. coſ.} \frac{\lambda a u}{c b} = \text{A. ſin.} \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2 a^2 u^2}{c^2 b^2}\right)} =$$

$$\text{A. ſin.} \left(\frac{M c c \theta}{P b a} - \frac{\zeta}{b}\right); \text{ donc}$$

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\lambda^2 a^2 u^2}{c^2 b^2}\right)} = \frac{1}{b}\left(\frac{M c c \theta}{P a} - \zeta\right), \text{ ou}$$

$$\left(\frac{M c^2 \theta}{P a} - \zeta\right)^2 = b b - \frac{\lambda^2 a^2 u^2}{c^2}; \text{ donc}$$

$$b b = \frac{M^2 c^4 \theta^2}{P^2 a^2} + \frac{2 M c c \theta^2}{P a a} = \left(\frac{M c^2 \theta}{P a} - \zeta\right)^2 + \frac{\lambda^2 a^2 u^2}{c^2},$$

par-conſéquent

$$C C = \left[\left(\frac{M c^2 \theta}{P a} - \zeta\right)^2 + \frac{\lambda^2 a^2 u^2}{c^2} - \frac{M^2 c^4 \theta^2}{P^2 a^2}\right] \times \frac{P a^2}{2 M \theta^2}.$$

Mais nous avons vu plus haut, que C C ne peut pas être affirmatif; on n'eſt donc maitre de déterminer $\zeta$ et $u$ que de maniére, que C C obtienne une valeur négative, (pas plus grande que $\frac{M c^4}{2 P}$ d'après §. 26.), ou devienne $= 0$. Voilà donc C C et $b$ exprimés en quantités connues; D ſera auſſi déterminé, & il ne reſtera plus qu'à ſubſtituer ces valeurs trouvées, dans nos équations de ci-deſſus.

# PHYSICA.

# DE ORDINE FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS Diſſertatio V.

## DE ACTIONE FIBRARVM EXTERNARVM VENTRICVLI SINISTRI. (*)

Auctore
C. F. WOLFF.

*Conuent. exhib. d. 19 Dec. 1785.*

### *De actione harum fibrarum in vniuerſum.*

Vti adeo in vniuerſum fibras ventriculi ſiniſtri externas oblique procedere vidimus ſuper ventriculum, vt longitudinali fere quam transuerſali ductui ſint propiores; manifeſtum eſt, ita fieri contractionem ventriculi his fibris externis, vt quoad latitudinem non modo ſed etiam ſecundum longitudinem ille conſtringatur (vid. not. adiect.). Maxime haec longitudinalis conſtrictio in funium

(*) Recte SENNACVS et pulchre monuit, nihil minus opus eſſe ad determinandam actionem fibrarum cordis, quam videre huius motum ipſum in viuo animali. Dummodo enim principium fibrae alicuius muſcularis, eius-

nium directione apparet, qui in facie ventriculi inferiore a poſtrema parte marginis, ſiue a baſis parte ſiniſtra, ad apicem ventriculi vsque et ad finem ſtriae decurrunt, quibus ergo fieri non

---

eiusque progreſſus et inſertio, cognita ſunt, nullum dubium de actione huius fibrae, aut quam partem, & ſecundum quam directionem eam, fibra contracta moueat, eſſe poteſt. Nec quidquam certius in vniuerſa anatomia aut phyſiologia eſt, quam actio muſculi, cuius ortus, directio fibrarum, et inſertio, datae ſint. Neque etiam cuiquam homini vnquam in mentem venit maſſateris v. gr. aut pſoae, aut deltoidei muſculi motum in vivo animali inſpicere velle, vt actiones horum muſculorum determinentur, cum facile tamen illi detegi et obſeruari poſſint. Quo magis ergo mirum eſt, ſi in ipſo corde, in eoque quidem ſolo, hac methodo vti auatomici voluerunt, quod obſeruatu ſcilicet omnium difficillimum eſt, aut potius in quo ſolo haec methodus invtilis adhiberi non poteſt; cum fibrae illius etiam in cadauere ita praeparari non potuerint, vt diſtincte obſeruentur; cumque in momentaneo eius ſaltu nihil niſi hoc vnum, ſalire cor, obſeruari et diſtingui poſſit?

Siue ex motu vero cordis obſeruato, ſiue ex directione fibrarum, de actione earum iudicatum fuerit, ſolae duae actiones, aut potius duo eiusdem actionis effectus ſimultanei fibris promiſcue omnibus cordis adſcriptae ſunt, quorum altero ſecundum longitudinem iſtae ventriculos contraherent, altero quoad latitudinem ſimul conſtringerent eosdem. Et ſolus quidem hic poſterior effectus, conſtrictio lateralis, certus conſiſtit, communi conſenſu receptus. Prior, contractio longitudinalis, dubioſus fere relictus, a WINSLOWO haud obſcure, ab aliis, qui ſolum cordis motum in viuo animali conſiderauerant, omnino, et adeo vsque, negatus, vt potius contrarium, elongari ventriculos ſimul, dum quoad latitudinem conſtringerentur, ſtatuerent.

Vti fibras vero ventriculi ſiniſtri externas minime vna eademque directione procedere omnes, minime omnes oriri ab vno eodemque principio communi, nec inſeri in partem eandem; vti in varios illas ordines potius diuiſas eſſe, vidimus in praecedenti diſſertatione quarta, ſicuti et dextri ventriculi fibras in faſcias diſtinctas eſſe, in tertia demonſtratum erat diſſertatione, principio, directione, et inſertione diuerſas; quoad longitudinem non modo et latitudinem contrahi ventriculos, ſed, quot ordines fibrarum diuerſi, tot diuerſos harum fibrarum actiones quoque, ſingularumque actionum varios porro effectus eſſe, qui nunquam in viuo animali obſeruari poſſunt, in hac diſſertatione patebit.

non poteſt, quin apex ille ventriculi verſus baſin retrahatur. Videtur quidem longitudinali directioni ſeptum obſtare, cui per totam longitudinem ventriculus adnatus eſt; verum & prominet ventriculus apice ſuo prae ſepto, quo contrahi ergo poteſt ſepto immoto, et contrahitur omnino etiam ſeptum actione cordis ſecundum longitudinem; cum fibris illud longitudinalibus, qua parte in cauitatem ventriculorum reſpicit, inſtructum eſt. Quantum ergo prominet ventriculus prae ſepto, et quantum porro ſeptum ipſum in cordis actione ſecundum longitudinem contrahitur, ventriculus in ſyſtole cordis breuior quam in diaſtole erit. Haud minor tamen transuerſalis etiam ventriculi conſtrictio eſt, quatenus his ipſis fibris externis efficitur; cum nulla fibrarum ordinis ſecundi, tertii et quarti, ad longitudinem ventriculum contrahere poſſit, quin margo in ſuperiori ſuperficie verſus crenam ſimul, in inferiori verſus ſtriam, adducatur. Maxime notabilem autem in apicis regione transuerſalem conſtrictionem eſſe oportet ob fibras radiatas ſuperiores, quae multo poſterioribus fibris propiores ductui transuerſo ſunt, et hanc ventriculi partem, magis intus vacuam papillis et columnis carneis, quibus reliqua pars repleta eſt, proxime ad ſeptum pro ſua directione adducere poſſunt.

### *De diuerſitate fibrarum cordis, et ordinum diuerſorum fibrarum ventriculi ſiniſtri.*

In fibris ventriculorum, quarum pleraeque vel a crena oriuntur, flexaeque circa marginem in ſtriam redeunt, vel ortae a ſtria flexaeque circa marginem redeunt in crenam, duplici ratione fixa ſedes, vel punctum fixum, et mobilis eſſe poteſt; quemadmodum in diſſertatione de dextri ventriculi fibris externis iam monitum eſt. Vel enim ad alteram fibrarum extremitatem fixa ſedes, mobilis ad alteram erit, ſicuti in pleriſque muſculis res ſe habet; vel erit ſedes fixa ad

vtramque extremitatem, mobilis in parte media fibrarum, qua circa marginem flexae verſus eandem regionem, vnde venerant, regrediuntur. Cum adeo iam fibrae externae ventriculi ſiniſtri, earumque diuerſi ordines, in quas fibras diſtinxi, quoad ortum non modo et finem ſed quoad longitudinem et ſitum fibrarum ipſarum, tum etiam quoad extremitatum, ortus et finis, ſitum et reſpectum erga ſe inuicem differant; ſinguli ordines ſeorſim conſiderandi, de ſingulisque ſedes fixae et mobiles, actionesque eruendae.

*Actio fibrarum ordinis primi. Sedes fixa in iis et mobilis.*

Fibrae ordinis primi, a filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro ortae, inſertae in ſtriam, cuius maximam partem poſteriorem ſua inſertione occupant, oblique ſuper faciem hanc inferiorem planam ad ſuam inſertionis ſedem decurrunt, marginem ventriculi non tangunt, nec vlla ratione a proxima via, vel plano, ab ortu ad finem ducente, recedunt. Non poſſunt ergo mobilem ſedem in parte media habere, qua propius ad lineam rectam, ab ortu ad finem ductam, accederent, cauitatemque contentam anguſtarent, cum ipſae iam in ſitu naturali hanc lineam emetiantur. Neceſſe eſt ergo, vt ſedem fixam in alterutra extremitate, mobilem in altera, habeant. Iam fieri non poſſe videtur vlla ratione, vt ſtria, marginis ſepti inferioris ſedes, retrorſum oblique et ſiniſtrorſum trahatur ad filum cartilagineum poſterius. Fibrae non modo externae ventriculi dextri, a ſtria ortae, in quam illae inſeruntur, oblique dextrorſum ad marginem decurrentes, ſtriam eandem, quantum illae ſiniſtrorſum retrorſum oblique, dextrorſum antrorſum trahere conantur; proinde accurate actioni illarum reſiſtunt; ſed adeo fixa etiam ſua propria vi haec ſepti ſedes, et vniuerſum ſeptum, eſſe videtur, vt modo non fixiſſima ſit,

ſiqui-

ſiquidem non eſt, inter omnes partes et regiones cordis. Septum enim tot ſtratis fibrarum conſtat, quot ipſe ventriculus ſiniſter, cuius diuerſa ſtrata per ſeptum continuant, excepto externo, cuius loco ſe medium ventriculi dextri ſepto addit. His omnibus fibris coniunctis ſeptum quoad ſui latitudinem, ſeu craſſitiem cordis, ſe contrahit vt inferior margo ad ſuperiorem, ſuperior ad inferiorem, appropinquet. Haec valida actio immotas ſedes crenae et ſtriae reſpectu motuum tenet, qui dextrorſum vel ſiniſtrorſum vel retrorſum vel antrorſum has ſedes trahere conarentur. Immutato ergo inalteratoque motu ſurſum ſtria ad crenam, deorſum crena ad ſtriam cordis actione ducitur. Nec patitur eadem ergo, vt tantillum vel ſiniſtrorſum vel retrorſum ſtria actione fibrarum externarum ordinis primi ventriculi ſiniſtri cedat. Mollis contra et extenſilis ſinus ſiniſter eſt, cuius parieti poſteriori ad baſin ope fili cartilaginei poſterioris ſiniſtri hae fibrae alteris ſuis extremitatibus anrectuntur. Et molles porro extenſilesque, quibus ſinus ſuſpenſus tenetur, venae ſunt pulmonales et caua inferior. Nullum ergo dubium eſt, quin fixa ſedes fibrarum ordinis primi ad ſtriam ſit, mobilis ad filum cartilagineum poſterius ſiniſtrum, ſeu baſin parietis poſterioris ſinus ſiniſtri.

*Actio et vſus fibrarum ordinis primi.*

Is paries ergo poſterior ſinus ſiniſtri, vna cum baſi ventriculi in hac facie inferiori, vnaque cum parte poſteriori orificii venoſi intus, valuulaeque venoſae ventriculi ſiniſtri, oblique, ſtriam et apicem verſus, dum fibrae ordinis primi ſe contrahunt, ducuntur. Quantum ad apicem hae partes ſimul, baſis cordis et ſinus et valuulae pars inferior, promouentur, tantum actione harum fibrarum breuior ventriculus in inferiori ſuperficie ſyſtoles tempore efficitur. Quantum ad ſtriam vero, pro obliquitate fibrarum, tantum et ventriculus in parte, baſi

propiore, et orificium ſimul venoſum anguſtiora contractione redduntur. Valuulae pars, pariter plicata contra ſanguinem ventriculi, quo is repletus eſt, mota, et contra ab eo repulſa, obturat orificium venoſum. Qui omnes effectus, etiamſi a multis aliarum fibrarum actionibus maximopere adaugeantur, ſemper tamen quoad aliquam ſui partem ab his fibris quoque ordinis primi pendent. Non videtur autem, dum orificii pars poſterior cum ſua valuulae parte et paries ſinus poſterior verſus apicem et ſeptum mouentur, et anterior ſimul orificii pars tota conſequi cum ſua valuulae parte et cum ſinus pariete anteriori, quo totum orificium totusque ſinus verſus apicem et ſeptum mouerentur. Inſident hae partes, paries ſinus anterior, orificii et valuulae pars anterior, parti poſteriori baſis aortae et filo cartilagineo poſteriori ſiniſtro, quae nimis firmae ſedes tractioni partis poſterioris ſinus et orificii haud cedunt. Figuram igitur ſuam ſitumque ſinus et orificium aliquomodo mutabunt. Antrorſum, apicem verſus paries poſterior et pars obturati orificii poſterior protrahentur, immotis partibus anterioribus; et orificium ergo non recta apicem verſus, ſed oblique verſus ſuperiora, ſyſtoles tempore ſpectabit, ſanguinemque ſuo motu verſus aortae orificium pellet. Sic pariter et ventriculi ipſius figura mutabitur, dum baſis in inferiori ſuperficie apicem verſus mouetur, in ſuperiori immota conſtat, ſitumque obliquum nanciſcitur, dumque inferior ſuperficies ſuperiore minor in ſyſtole euadit. Multa ergo ſunt, quae his fibris ordinis primi earumque actione efficiuntur: Ventriculi contractio quoad longitudinem et latitudinem, anguſtatio orificii venoſi, valvulaeque repulſio et obturatio orificii illius; tum porro obliqua obturati orificii directio verſus ſuperiora et ſanguinis in orificium arterioſum impulſio; denique mutata ventriculi figura.

*Actio*

*Actio fibrarum ordinis ſecundi. Sedes fixiores et mobiles.*

Fibrae ordinis ſecundi, ſeu funes, primariae eſſe videntur inter omnes externas ventriculi ſiniſtri, roboris non modo reſpectu, quo pollent, ſed natura actionis quoque et vſu. Ortae a toto cartilagineo ſilo anteriori ſiniſtro oblique ad marginem diuergendo decurrunt. Flexae circa marginem apicem verſus porro, denuoque conuergendo, deſcendunt, anguſtioresque in finem ſtriae focumque inferiorem inſeruntur; vt anguſtior faſcia principio et fine mediam partem longe latiſſimam habeat, eaque totam dimidiam poſteriorem marginis partem complectatur atque inuoluat. Aliter ergo cum his atque cum primi ordinis fibris comparatum eſt. In media hac parte ſui, qua, flexae circa marginem, dextrorſum, vnde venerant, redeunt, ſedem mobiliorem, fixiores ſedes in principio ad filum cartilagineum ſiniſtrum anterius, aortaeque radicem, et in fine ad focum inferiorem, habent.

*Actio prima. Conſtrictio ventriculi transuerſalis.*

Prima ergo actio fibrarum ordinis ſecundi conſtrictio ventriculi transuerſalis eſt, quam communem ſcilicet cum caeteris fere omnibus huius ventriculi fibris habent, quamque efficiunt, dum marginis partem dimidiam poſteriorem, quam complectuntur, transuerſim ad ſeptum adducunt. Neque enim ad baſin oblique retrorſum, vnde fibrae in marginem deſcendunt, neque antrorſum ad apicem; quorſum progrediuntur, dimidia haec marginis pars poſterior, ſed recta transuerſim ad ſeptum, ſeu lineam, ab ortu fibrarum recta ad finem ductam, ſepto parallelam, his fibris obliquis ſiue ſpiralibus mouetur, quae aeque retrorſum quippe et dextrorſum a media ſui, ad marginem poſita, parte verſus principium, ac antrorſum dextrorſum ad finem decurrunt; proinde quoad motum verſus baſin

ſin et apicem, ſibi ipſis repugnant, in ſolo transuerſo ad ſeptum conſpirant. Apprime autem huic actioni ea fibrarum diſpoſitio conuenit, qua diuergendo primo ad marginem vsque, poſt haec conuergendo, in ſuo decurſu progrediuntur, partemque ſic producunt ſui mediam, multo principio ac fine latiorem, qua totam dimidiam poſteriorem, mouendam, partem marginis complectuntur, eamque eo facilius firmiusque contractam verſus ſeptum adducunt.

*Altera actio. Marginis ventriculi quoad longitudinem contractio.*

Tum alia atque diuerſa harum fibrarum actio eſt marginis huius eiusdem dimidii poſterioris, ſimul dum verſus ſeptum mouetur, quoad longitudinem quoque contractio. Ad ſeptum ille adducitur quatenus a baſi ſiniſtrorſum fibrae in ſuperiori ſuperficie, in inferiori dextrorſum progrediuntur. Quatenus antrorſum ſimul in ſuperficie vtraque obliquo ſuo ductu procedunt, longitudinemque in ipſo imprimis margine, ſequuntur, quoad longitudinem margo contrahitur, breuiorque efficitur. Hic arcum ſcilicet conuexus notabilem ſua figura format. Contractus ergo in rectam lineam, rectae, ab ortu ad finem fibrarum ductae, aequalem, mutatur, et multo ergo ſic breuior is margo quidem efficitur. Ventriculi tamen ipſius longitudo hac marginis contractione nullo modo imminuitur, ſiquidem conſtantes, eius limites poſterius ad baſin pariter atque anterius ad apicem manent, quamuis ſuam figuram ſuamque propriam longitudinem margo mutauerit.

*Actio porro alia. Ventriculi ipſius contractio longitudinalis, ob tuberis et apicis prominentiam.*

Verum ob alias cauſas varias tamen vera longitudinalis contractio ventriculi eadem hac fibrarum ordinis ſecundi actione

tione efficitur. Primo quidem ventriculus poſterius ad baſin, propeque marginem, aliqua ſui parte qua tuber producit, prae filo retrorſum cartilagineo, et pariter anterius apice ſuo prae extremitate ſtriae, prominet. Hae ſolae partes autem, filum et ſtria, fixiores ſedes efficiunt. Quo vsque ergo tuber poſterius prae filo, anterius apex prae ſtria, prominent, fixioribus ſuis ambo ſedibus minime innituntur, et tuber ergo antrorſum fibrarum contractione, apex retrorſum, promoueri poteſt. Sic ventriculus ipſe et cauitas ventriculi aliqua ſuae longitudinis parte omnino imminuuntur. Tuber nimirum totum et pariter apex, quo vsque prominet, actione ventriculi euaneſcunt, eiusque longitudinem ea ratione imminuunt. Sicuti tuber poſteriorem quoque, apex anteriorem, extremitatem marginis ventriculi efficit, patet tempore actionis totum conuexum et prominentem marginem euaneſcere. Quatenus extremitates eius, tuber poſterius, et anterius apex verſus ſe mutuo actione fibrarum mouentur, breuior ventriculus, quatenus pars media conuexa earundem fibrarum actione contrahitur, anguſtior ille efficitur.

*Ob ſedem porro fixiorem ad baſin, actioni fibrarum aliquatenus cedentem.*

Quamuis fixiores autem ſedes harum fibrarum ordinis ſecundi in principio earum ad filum cartilagineum anterius et interſtitium inter bina fila ſiniſtra, et in fine ad extremitatem ſtriae, mobilior in media earundem parte ad marginem ſint ſitae; non eo tamen vsque ideo fixae ſunt priores, vt nulla ratione motui et contractioni fibrarum cedere poſſint. Nec niſi eatenus fixae hae ſedes cenſeri poſſunt, quatenus multo mobilior pars media eſt, quae nullo obſtaculo, quin ilico motui cedat, tenetur, quaeque quo vsque cedit, vires motricium

cium fibrarum abſumit, nec ſinit moueri ſedes fixiores. Vbi vero abſolutus eſt motus partis mediae, dum ſcilicet in lineam rectam margo convexus mutatus eſt, tum etiam, ſi porro fibrae ſe contrahere pergant, ſedes illae fixiores, niſi omnino immobiles ſunt, motui fibrarum cedere incipiunt. Nullo modo autem immobiles illas eſſe facile patet. Filum enim cartilagineum poſterius ſiniſtrum actioni fibrarum ordinis primi cedit ob fixitatem ſtriae, quemadmodum in ſuperioribus apparuit. Jam illud, quod proxime ſequitur, interſtitium inter anterius et poſterius filum, celluloſa repletum, haud firmius ſane, quin mollius potius extenſiliusque eſt filo poſteriori ſiniſtro; et primae fibrae ordinis ſecundi, ab eo interſtitio ortae, ſtriae quoque extremitati ipſi inſeruntur; et continuo poſt primi ordinis fibras ſequuntur; vt tanquam continuationes earum conſiderari poſſint. Nullum dubium ergo eſt, quin pariter et interſtitium illud, immo et finis fili cartilaginei ſiniſtri anterioris, vna cum filo ſiniſtro poſteriori motui fibrarum cedat, et vna cum eo his fibris, quae ab eo interſtitio et fine fili anterioris oriuntur, quaeque in ſtriae finem inſeruntur, oblique antrorſum, apicem et ſtriam verſus, trahatur. Quo ergo neceſſe eſt, vt ventriculus aliqua rurſus ſuae longitudinis parte imminuatur.

*Ob finem ſtriae cedentem.*

Striae vero extremitas anterior, in quam primae fibrae ordinis ſecundi, ab interſtitio ortae, inſeruntur, haud magis fixa et conſtans in actione cordis eſſe videtur. Septum enim quibus partibus in cauitates ventriculorum ſpectat longitudinalibus vtrinque fibris obductum eſt. His quoad longitudinem ſeptum, caeteris omnibus transuerſim conſtrictum, contrahitur. Quamuis id parum ſit forte, aliqua tamen parte ſeptum brevius inde fit, extremitasque ſtriae verſus baſin retrahitur. Qua parte

parte ergo ſtriae extremitas retrorſum cedit, ea etiam magis ventriculi apex retrorſum his primis ordinis ſecundi fibris promoueri, et margo, pariter ac totus ventriculus, breuior fieri poteſt.

*Quibus cauſis ergo concurrentibus vera ventriculi contractio longitudinalis his fibris efficiatur.*

Sic multa ergo ſunt, quae concurrunt ad contractionem ventriculi longitudinalem, tum fibris generatim externis, tum imprimis his funibus, efficiendam, quae ſingula ſcilicet aliquantum ad eam contractionem augendam addunt. Primo quidem margo et pars poſterior exteriorque, funibus occupata, ſuperficiei conuexae adeo contrahitur, vt ille in rectam lineam haec in planam mutetur ſuperficiem. Marginis contractione parum quidem et vix quidquam longitudo ventriculi, ſolus potius margo longitudine, imminuitur. Conſtrictione ſuperficiei conuexae amplitudo potius quam longitudo ventriculi decreſcit. Tum vero quo prominet poſterius prae filo ventriculus tubere, quod contractione funium prorſus euaneſcere videtur, hoc breuior ventriculus, dimidio circiter pollice, efficitur. Porro et apice ſuo idem ſeu foco inferiori, fibris praecipue vltimis funium, fibrisque ordinis tertii, moto, qui anterius prae fine ſtriae prominet, et quae pariter protuberantia in ſyſtole cordis diſparere videtur, alio fere, vt opinor, ſemipollice longitudine imminuitur. Tertium imminutae longitudinis ventriculi momentum interſtitium addit dimidium anterius inter fila cartilaginea ſiniſtra, cedendo tractioni fibrarum primarum ordinis ſecundi, vna cum interſtitio dimidio poſteriori, dum hoc ſuas primi ordinis vltimas fibras trahentes ſequitur. Quo ſcilicet momento, poſtquam tubere minutus ventriculus eſt, hic porro aliqua ſuae longitudinis parte alia immi-

nuitur. Quartum denique ſepti quoad longitudinem contractio momentum prioribus addit, qua finis ſtriae verſus baſin retractus locum fibris concedit, tum primis ordinis ſecundi, in ipſum finem ſtriae inſertis, tum caeteris ad focum ſuperiorem vsque omnibus, hanc ſedem inſertionis, focum inferiorem totum, porro baſin verſus retrahendi.

*Quibus proprietatibus imprimis fibrae ordinis ſecundi ad eam actionem efficiendam aptae ſint.*

Eo magis vero contractio haec ventriculi longitudinalis, quae his fibris ordinis ſecundi, quibus tamen adiutrices fibrae ordinis tertii accenſendae ſunt, efficitur, notari meretur, cum propria earum actio ſit, cumque praeter ſolas internas, quae longitudinem ſequuntur, nullae aliae in ventriculo ſiniſtro dentur, quae ad eam actionem aliquid contribuere poſſint; mediaeque omnes, quarum plurima ſtrata ſunt, maxime transuerſim ventriculum conſtringant. Neque obſcure in his fibris diſpoſitio ſingularis ad eam actionem efficiendam elucet. Propiores non modo vbique longitudini, quam ductui transverſali, propioresque externis ventriculi dextri eſſe, ſed adeo quoque ad marginem imprimis tum ordinis ſecundi fibras, de quibus ſermo eſt, tum et tertii et plurimas quarti ordinis, longitudinales procedere notatum eſt, vt omnino longitudinem in ea quidem regione ſequantur, et tanquam verae longitudinales prope conſiderari poſſint. Vti hae ſolae quoque externae, imprimis ordinis ſecundi, fibrae ad longitudinalem contractionem efficiendam aptae inueniuntur; atque craſſities vero carnis maxima in dimidia parte poſteriori ventriculi, longe minor in anteriori, et ad apicem, eſt; adeo, vt, ſi tenuiores, aut caeteris ventriculi ſiniſtri aequales ſimilesque, hae fibrae eſſent, craſſiſſima illae media ſtrata in poſteriori regione vix

ſane

ſane comprimere, reſiſtentiamque eorum vincere, poſſent; in funes propterea craſſos fortesque has ordinis ſecundi fibras collectas vidimus, quales in nulla alia regione, ſiue ſiniſtri ventriculi, ſiue cordis vniuerſi, reperiuntur.

*Actio fibrarum tertii ordinis.*

Fibrae ordinis tertii tanquam acceſſoriae funium conſiderari poſſunt, ſiquidem et ſimili illorum actione gaudent, et id fere, quod efficiendum illi relinquunt, efficiunt. Ortae a parte poſtrema crenae oblique ſuper faciem conuexam, tanquam anguſtior faſcia, decurrunt ad marginem. In eo, apicem verſus flexae, ad ſuam inſertionis ſedem, poſtremam partem foci inferioris, prope ſuperiorem, deſcendunt, vt ſuperficiem inferiorem vix tangant. In alterutra ergo extremitatum ſedem fixam hae fibrae, in altera mobilem, habent. Et cum fixiſſima crena ſit, mobilior multo ventriculi margo et focus inferior; fixa ſedes in principio, mobilis in fine, erit. Qua parte ergo ſuper faciem ventriculi conuexam ad marginem tranſeunt fibrae ordinis tertii, ea verſus ſeptum marginem adducunt, adeoque transuerſim ventriculum conſtringunt. Qua parte in margine ad focum vsque inferiorem continuant, marginis hanc partem anteriorem, apicique propiorem, quoad longitudinem contrahunt. In his actionibus ergo ſimiles ſunt fibris ordinis ſecundi. Vti haud totum marginem ad focum vsque funes percurrunt, ſed, flexi dum tranſeunt in inferiorem ſuperficiem, aliquam eius, apici propiorem, partem relinquunt. Hanc fibrae tertii ordinis ſuo decurſu longitudinali occupant, eandemque contrahunt, quo defectum ergo fibrarum ordinis ſecundi ſupplent. Denique vti apicem ventriculi ſiniſtri focumque inferiorem actioni fibrarum ordinis ſecundi pauliſper cedere in ſuperioribus vidimus, quo longitudinem

 hae

hae fibrae ventriculi imminuant; in hac re quoque, in vera nempe ventriculi quoad longitudinem contractione, fibrae tertii ordinis fibras iuuant ordinis ſecundi, earumque actionem augent.

*Actio fibrarum ordinis quarti. Conſtrictio transuerſalis, ſolito efficacior.*

Similes fere quarti etiam ordinis fibrae effectus exſerunt, transuerſalem ſcilicet ventriculi et longitudinalem contractionem promouendo; ea tamen differentia, vt minus notabile momentum ſit, quod ad longitudinalem, eo maius, quod ad transuerſalem hae fibrae contractionem conferunt. Deinde vero ſingulari quoque praeterea, quam continuo dicam, et propria actione gaudent. Oriuntur a tota fere crena, a ponte ad apicem, ſeu crenae finem, vsque. Concurrunt inde radiatim ad focum ſuperiorem, in quem inſeruntur. Vt ſic et obliquae ſolita ratione poſteriores baſique propiores, mediae propioresque apici, et proximae eidem, transuerſae et fere retrogradae, in ſuperiori ſuperficie ventriculi procedant, et ſola in hac ſuperiori ſuperficie maneant hae fibrae ordinis quarti, inferioremque non tangant. Pariter ergo ac fibrae ordinis tertii fixam ſedem in crena, mobilem in foco ſuperiori habent. Vti focum ergo hunc ſuperiorem, in quem inſeruntur, transuerſim ad crenam, quatenus ad transuerſalem accedunt ductum, adducunt, retrorſum contra ad baſin eundem trahunt, quatenus ad longitudinalem ductum vergunt; apparet, multo magis transuerſim ventriculum his fibris ordinis quarti, multoque minus quoad longitudinem, quam fibris contrahi ordinis ſecundi tertiique.

*Quo ventriculi per totam longitudinem transuerſa conſtrictio aequalis efficitur.*

Quum ſolam hae fibrae anteriorem, propiorem apici, partem ventriculi in ſuperiori ſuperficie occupent, et illae imprimis

primis earum, quae omnino tranſuerſim, et retrorſum paulisper ad baſin, progrediuntur, proximae apici ſint; ſola haec pars anterior quoque ventriculi, apici propinqua, tantum maiori illa et ſingulari vi tranſuerſim ad ſeptum adſtringitur; adeo vt, niſi aliis fibris defectus conſtrictionis in parte ventriculi poſteriori ſuppletur, inaequaliter ventriculus, minus in parte poſteriori, magis anterius circa apicem, ſyſtole conſtringatur. Verum id ipſum fibris mediis efficitur, quemadmodum in ſequentibus apparebit. Copioſiores illae multo, frequentioresque et fortiores tranſuerſae in parte ventriculi poſteriori, rariores in anteriori, reperiuntur, vt ipſa illa externarum fibrarum ſucceſſiua verſus apicem reſpectu directionis mutatio, qua ſenſim in tranſuerſales ex obliquis tranſeunt, tanquam compenſatio defectus mediarum tranſuerſalium in parte anteriori conſiderari poſſit, et eum ergo in finem potius fibrae ordinis quarti in ductum ſenſim tranſuerſum mutentur, vt aequali iure vbique ſecundum totam longitudinem ventriculus tranſuerſim conſtringatur.

*Longitudinalis contractio partis anterioris marginis.*

Dum fibrae vero a crena ad focum progrediuntur, ſiue poſteriores magis obliquae, ſiue tranſuerſae hac fuerint anteriores; marginem verſus primo, oblique vel tranſuerſim, tendunt. Ad eum demum curuatae verſus focum, in margine ſitum, flectuntur, eamque ſic marginis partem, quae reliqua eſt, ad focum vsque percurrunt. In eo itinere ſe adiungunt fibris tertii ordinis, et in focum ſuperiorem, proxime iuxta priores, inſeruntur. Conferunt ergo aliquid ad contractionem longitudinalem partis anterioris marginis, et conſpirant in ea actione cum fibris ordinis tertii, quibuscum vnam eandemque marginis partem contrahunt, tum quoque eatenus cum fibris ordinis ſecundi, quae poſteriorem craſſioremque marginis partem conſtringunt, vt partem ab illis relictam conſtringant.

*Singularis foci ſuperioris motus. Rotatio circa axin ventriculi.*

Denique vt fibrae ordinis quarti in ſola ſuperiori ſuperficie verſantur, marginem non tranſeunt, inferiorem ſuperficiem minime tangunt; nec aeque in inferiorem ergo atque in ſuperiorem ſuperficiem ſuam inſertionis ſedem, in margine poſitam, trahunt; quemadmodum in actione fibrarum ordinis ſecundi fieri vidimus, quae ideo fibrae ſuam ſedem mobilem maxime in margine, ſiue media ſui parte, poſitam habebant; vti porro nec aliis fibris, his ordinis quarti oppoſitis, in inferiorem decurrentibus ſuperficiem, ſedes illarum mobilis, focus ſuperior ſcilicet, in inferiorem pariter ac ſuperiorem ſuperficiem trahitur; veluti ſane fieret, ſi veram vnam ſtellam ad mentem Ioweri atque Sennaci radiatae fibrae formarent: cum baſin verſus retrorſum et marginem verſus oblique potius radiatae inferiores ex foco ſuo inferiori aſſurgant; ſatis manifeſto ex his omnibus conſideratis apparet, minime fieri poſſe, vt ſedes mobilis harum fibrarum, focus ſuperior, immotus in ſuo inter caeteras partes cordis vicinas ſitu, atque in ea quam tempore quietis occupat, regione, in margine ſcilicet, permaneat; ſed neceſſe eſſe, vt in ſuperiorem ſuperficiem crenam verſus trahatur, margine viciſſim partibus occupato, ex inferiori ſuperficie attractis. Vt marginis ergo ea pars, quam focus occupat tempore quietis ſuperior, circa axin cordis quoad aliquam partem, a marginis ſcilicet regione ad crenam fere vsque, rotetur.

*Eius occuratior deſcriptio.*

Fibrae nimirum radiatae ſuperiores verſus crenam focum attrahunt, inferioribus minime aeque ad ſtriam evndem, ſed finem potius ſtriae, partemque inter evm et focum contentam marginis anteriorem baſin oblique et partem poſteriorem

rem marginis verſus, ducentibus, motuique ergo omnino cedentibus radiatarum ſuperiorum. Sic proximae apici, transverſim a crena ad focum tranſeuntes, recta ad crenam focum, quae inde retrorſim ſequuntur, oblique paulisper eundem crenam et baſin verſus, maxima pars tandem poſterior fibrarum, a pontis regione deducta oblique baſin pariter atque crenam verſus focum trahunt; vt omnibus his ſimul agentibus oblique focus retrorſum ad crenam in ſyſtole cordis ducatur.

*Recenſio et ordinatio effectuum omnium fibrarum externarum.*

In vniuerſum ergo ſequentes actione fibrarum externarum ventriculi ſiniſtri effectus in eum exſeruntur: 1.) Contractio eius aeque longitudinalis atque transuerſa, quae quidem ambae communes actiones ſunt omnium fibrarum externarum. Plurimum tamen ad longitudinalem contractionem fibrae faciunt ordinis ſecundi ſeu funes, qui et quantum tuber ad baſin, ventriculique apex anterius, prominet, et quantum ſeptum porro fibris ſuis contrahitur, quantumque ad baſin filum cartilagineum poſterius, et interſtitium inter bina fila ſiniſtra cedunt, ventriculum longitudine imminuunt. 2.) Tum fibris iisdem maxime margo ventriculi in rectam lineam contrahitur et tuber ad baſin, quo margo retrorſum prominet, euaneſcit et apex ventriculi, quo vsque prae crenae et ſtriae prominet finibus, diſparet. 3.) Deinde baſis ventriculi in inferiori ſuperficie ad finem fili cartilaginei anterioris vsque apicem verſus trahitur fibris ordinis primi, immota eadem in ſuperiori permanente; quo et breuior ſuperiori inferior ſuperficies redditur, et baſis ventriculi obliquam ad axin cordis poſitionem acquirit. 4.) Denique focus ſuperior et proxima ei vtrinque pars marginis ventriculi, in quo ille ſitus eſt, oblique crenam et baſin verſus circa ventriculi axin voluitur; quo focus ſuperior prope crenam in ſuperiorem transponitur, et margo contra fibris radia-

diatis inferioribus longitudinalibus occupatur. Haec ſunt effectus et phaenomena externa, quae exterius et in parietibus ventriculi actione fibrarum externarum contingunt. Sunt quaedam praeterea, quae 5.) intus in cauitate ventriculi eadem harum fibrarum, praecipue illarum primi ordinis, actione efficiuntur: Anguſtatio orificii venoſi, fibris effecta ordinis primi, quatenus ad ſtriam vna cum baſi orificii partem inferiorem trahunt; quamuis multo validius idem fibris mediis efficiatur. Eiusdem porro partis orificii verſus apicem protractio, quo valuula ſimul promota, contra ſanguinem ventriculi preſſa, repellitur, et orificium obturat. Denique orificii obturati motus contra ſanguinem evndem, eiusdemque obliqua poſitio, quo verſus orificium arterioſum ſanguis propellitur.

*His effectibus quo miro modo ventriculi figura mutetur. Ventriculi tortura diagonalis.*

Dum ea ratione parietes ventriculi contrahuntur, anguſtior ille non modo breuiorque inde redditur, ſed aliam quoque figuram induit. Diſparet poſterius ad baſin tuber illud, quo retrorſum ventriculus prominet, et prominens pariter anterius ventriculi apex euaneſcit, et margo arcuatus in rectam lineam abit. Sic triangularem rectilineam ſeu conoideam ventriculus figuram loco oualis, qua praeditus erat, acquirit. Deinde baſis ventriculi obliquam poſitionem nanciſcitur. Pars eius inferior antrorſum, ſiniſterior, dum tuber diſparet, antrorſum et deorſum oblique, ſoci contra ſuperioris regio retrorſum oblique et ſurſum ad crenam trahitur. Vnde voluta ventriculi parte anteriori, et ſoci regione, dextrorſum ad crenam, et retrorſum oblique, marginis contra parte poſteriori ſiniſtrorſum et antrorſum, totus ventriculus aliqua ratione torquetur. Tota nimirum baſis cordis in inferiori ſuperficie vna cum baſi ſinus ſiniſtri et marginis praeterea pars poſtrema, qua tuber in quiete

cordis

cordis efficitur, oblique antrorſum ad apicem et dextrorſum ad ſtriam ducuntur, dum ſimul totus, quo vsque prominet, ventriculi apex in eadem ſuperficie inferiori retrorſum oblique ad baſin et ſiniſtrorſum ad marginem, focus vero ſuperior, proximaque, quae eum circumdat, regio in ſuperiori ſuperficie dextrorſum ad crenam et retrorſum ad baſin mouentur. Quibus motibus ergo omnino tortura ventriculi obliqua, ſiue diagonalis, efficitur. Faciliorem tibi ſimpliocioremque hunc motum repraeſentaueris ad ſolam marginis ventriculi poſtremam partem protuberantem, cui interſtitium inter bina fila cartilaginea ſiniſtra reſpondet, attendendo, et ad apicem ventriculi, quo vsque prae ſtria et crena prominet. Tota protuberans pars poſterior, ſiue *angulum* eam vocaueris *ventriculi ſiniſtri*, tum quoad ad inferiorem ſuperficiem, tum etiam quovsque ad ſuperiorem pertinet, recta ad finem ſtriae, adeoque deorſum et antrorſum, protrahitur. Totus contra apex ventriculi cum foco vtroque, quatenus prae crenae et ſtriae finibus prominet, ſiue ad ſuperiorem ſiue ad inferiorem ſpectat ſuperficiem, retrorſum et furſum oblique ad baſin aortae mouetur; vt dimidia obliqua inferior pars ventriculi ergo antrorſum, ſuperior retrorſum ſecundum ſectionem ventriculi diagonalem trahatur, et tortura ſic totius ventriculi diagonalis efficiatur.

*Dimidia obliqua pars inferior ventriculi ipſa eiusdem pars venoſa eſt.*

Iam ipſa haec dimidia obliqua pars ventriculi inferior, quae filo poſterius cartilagineo poſteriori ſiniſtro et interſtitio toto inter bina fila ſiniſtra terminatur, quae, angulum ventriculi ſiniſtri, ſeu tuber, totum complexa, ſectione ſiniſterius diagonali, ſeu linea, a fine fili cartilaginei anterioris oblique ſuper marginem ad finem ſtriae ducta, dexterius ipſa ſtria, limitata eſt, partem exacte continet ventriculi venoſam. Orificium

 enim

enim complectitur valuulamque venoſam, quo vsque illud, liberum ab aorta et parte arterioſa, proprio ambitu circumſcribitur, valuula ipſam hanc dictam partem ambitus occupat; eo vsque contra orificium excludit, quo vsque cum arterioſo contingit orificio, et cum parte arterioſa, valuulam, quo venoſum ab arterioſo diſtinguit, et ſeptum quaſi inter bina orificia commune efficit. Complectitur praeterea omnem eam cauitatis ventriculi partem, quae orificio venoſo reſpondet, quaeque ex eo recta continuat, quae nimirum inferior, ſuperficiei ventriculi planae et diaphragmati propinqua pars eſt, ad apicem vsque.

*Dimidia ſuperior arterioſa.*

Superior contra dimidia ventriculi pars obliqua, filo poſterius cartilagineo anteriori et aorta, dexterius crena, ſiniſterius inferiusque deſcripta diagonali linea, qua tuber, a ſuperiori parte ſeparatum, inferiori, apex ventriculi totus, ab inferiori ſeiunctus, ſuperiori additur, terminata, ipſam efficit arterioſam ventriculi partem. Complectitur enim, quo vsque hoc ad externam ſuperficiem tangit, orificium arterioſum, ſeu lumen ipſum profundioris baſis aortae; reliqua huius, aut orificii arterioſi, parte ſepto occupata, quod pariter ad arterioſam partem ventriculi pertinet. Vti anguſtius autem nimium orificium arterioſum eſt, multumque abeſt, vt alteram dimidiam baſis ventriculi partem occuparet, altera venoſo relicta orificio parte dimidia; etiam eam ventriculi partem ad baſin praeter orificium pars arterioſa complectitur, quam filum cartilagineum anterius terminat, et valuulae portio, quae intus ei filo annexa eſt, ad ſeptum contribuit efficiendum commune inter binas ventriculi, arterioſam et venoſam, partes. Tum porro vero reliquam omnem cauitatis ventriculi partem efficit ſuperior illa obliqua pars ventriculi, quae arterioſo orificio reſpondet, et quae recta ab apice vsque in orificium et in aortam continuat.

Vt

Vt ergo omnino haec pars ſuperior obliqua pro ipſa ventriculi parte arterioſa ſit habenda.

*Pars ergo venoſa ventriculi ad arterioſum, arterioſa ad aortam producitur.*

Sic patet ergo, ipſam partem ventriculi venoſam eſſe eam, quae ſcilicet filo poſterius ad baſin cartilagineo poſteriori ſiniſtro et interſtitio toto inter bina fila ſiniſtra, ſiniſterius diagonali, ſeu ea, linea, quae a fine fili anterioris ad finem ſtriae ducitur, marginem oblique ſecando, dexterius ipſa ſtria terminatur, quaeque poſterius angulum ventriculi complectitur, apicem anterius excludit, quam vidimus in ſuperioribus moueri totam oblique, ſiue ſecundum diagonalem, a baſi verſus ſtriam et ſtriae finem; et arterioſam contra ventriculi partem eſſe, quae ſcilicet aorta poſterius et filo ſolo anteriori, dexterius crena, diagonali ſiniſterius, terminatur, quaeque apicem totum et focum vtrumque anterius complectitur, poſterius tuber excludit, quam conſtitit totam moueri oblique pariter et ſecundum deſcriptam diagonalem in ſenſum contrarium, ab apice, ſiue a fine ſtriae, verſus aortam.

*Effectus in ſanguinem.*

Si nunc orificium venoſum apicem verſus mouetur, ſanguinemque, quo plenus et extenſus ventriculus eſt, premit; valuula a ſanguine repulſa orificium obturat, et obturatum ergo clauſumque orificium ſanguinem verſus apicem compellit. Eodem vero tempore, dum hoc fit, ſuis ſimul pars arterioſa fibris mouetur, et apex totus focusque vterque verſus aortam, et orificium verſus arterioſum, ducitur, vt ſanguis in apicem impingere vel niti in eum nequeat, quin is et propior iam ſit orificio arterioſo, et viribus aequalibus vires motusque partis

 veno-

venoſae dirigat ad idem orificium arterioſum; vnde effectus actionis totius idem erit, ac ſi continuo et recta via a venoſo orificio ſanguis in arterioſum pelleretur. Accedit ad efficiendam hanc ſanguinis directionem obliqua baſis ventriculi tempore actionis poſitio, qua latus orificii inferius et ſiniſterius, antrorſum protractum, verſus ſuperiora, adeoque in partem ventriculi arterioſam, proprio partis venoſae motu ſanguinem compellit; quo facto eo facilius ille fibris radiatis ſuperioribus funibusque in aortam, quorſum hae fibrae ſimul ſumtae apicem ducunt, promoueri poſſit.

*De natura ventriculi ſiniſtri, natura motus.*

Apparet in hoc motu ventriculi aliquid motus vermicularis, quo contenta in canalibus animalium fere promoueri ſolent, et qui inſitus quaſi et primus ſubſtantiae animalis motus eſſe videtur, dum orificium ſcilicet venoſum ad apicem primo, dein apex porro ad arterioſum orificium adducitur. Certum eſt, neque obſeruari et diſtingui poſſe in corde hunc motum vermicularem, quo prius venoſum orificium ad apicem, tum apex porro ad arterioſum adduceretur orificium, neque omnino fieri, cum bini iſti motus minime ſucceſſiue, ſed eodem potius tempore, vt monui, efficiantur. At exiſtunt tamen hi bini motus in motu ventriculi, diſtinctique diverſarum partium motus ſunt, quamuis eodem tempore fiant; et indicant ergo omnino, ex communi illo vermiculari motu motum cordis ortum eſſe. Ventriculi nimirum primaeua figura canalis contorti fuit, quae et in adulti corde haud obſcure apparet. Deſcendit enim canalis per orificium venoſum ad ductum fibrarum partis venoſae oblique antrorſum dextrorſum ad apicem vsque; inde curuatus ſiniſtrorſum et ſurſum, redit indicatu fibrarum partis arterioſae dextrorſum oblique et retrorſum ſuper partem ſui deſcendentem, quam ſecat, tranſit-

que

que in aortam, laqueum ſic formando haud abſimilem illi, quem ventriculus in embryone, cum ſolus exiſteret, repraeſentabat. Deſcendens ergo, ſiue venoſa, pars canalis ad curvaturam in corculo pulſante, et curuatura porro ad aortam, retrahebatur. Vti certum quoque in embryone gallinaceo cor poſt viginti quatuor horas incubationis immotum aeque et album obſeruaui, viſum eſt ſaepius etiam, paulo ante quam ſanguinis inducta rubedo, irritabilitatem perfectam ſubortam eſſe, indicaret, corculum, globulis albis repletum, lento vermiculari motu agitari, qui ergo, ſuborta demum rubedine et irritabilitate perfecta, in pulſatorium motum abiret. Quicquid autem de motu hoc vermiculari, in corculo embryonis obſervato, ſit, hoc certum eſt tamen, hunc motum in ſolito ventriculi motu exiſtere, ea ratione modificatum, vt et celerior ſit et cum impetu fiat, et vno temporis momento ambo duarum partium diſtincti motus efficiantur.

*Differentiae inter ventriculum vtrumque inſignes.*

Si quae hactenus de vtroque, dextro et ſiniſtro, ventriculo obſeruata ſunt, inter ſe comparentur, mirum eſſe patebit, quantum alter ab altero differat. Figura, ſedes et applicatio, conditio fibrarum, earum diſpoſitio, tota interna externaque ſtructura, et modus agendi, efficiendique expulſionem ſanguinis, adeo vsque differunt, vt plane aliam dextro, aliam ſiniſtro, naturam eſſe, haud immerito dixeris. Nihili puto, quod dexter triangularis fere ſit et planior, ſiniſter oualis et craſſus, quod debilis ille et tenuis, hic fortis et validus, quod paucis tenuibus ſtratis fibrarum dexter, ſiniſter pluribus longe craſſioribusque, conſtet. Ea autem ſiniſtro ventriculo figura eſt, vt facile primaeuam canalis contorti formam, parum mutatam, in eo recognoſcas. Dilatata et in longitudinem etiam extenſa eſſe videtur inferior pars canalis, qua curuatus iſte

 crucia-

cruciatim ſuper deſcendentem partem retrograditur. Et ſaccum nunc oblongum, ſubrotundum, ventriculus repraeſentat, in quem dextrorſum oblique vena, ſiniſtrorſum arteria, inſeratur, arteria venam tegat. Quamuis etiam in dextro eadem canalis curuati primaeua figura exiſtat, quemadmodum in Diſſertatione I. demonſtratum eſt, vix tamen ea recognoſci poteſt, adeo mutatus ſcilicet ventriculus et transformatus eſt receſſibus illis praecipue, angulo et apice acuto, quos impetus ſanguinis in debilioribus parietibus produxit, tum margine baſilari et parte baſilari, quibus mollior nimiumque dilatatus ventriculus in plicas compoſitus eſt, denique parte arterioſa infundibuliformi, quae hanc ſuam figuram a cauſis plane alienis nacta eſſe videtur. Ad ſedem ſi animum attenderis et modum, quo iuxta ſe mutuo collocati ſunt ventriculi, ſe ipſo conſtare patet ſiniſtrum ſine vllo dextri adminiculo, aut quauis, quam in ſiniſtrum ille ob vicinitatem effecerit, mutatione. Integra enim originali ſua immutataque figura ouali, aequaliter inflata, ſiniſter ventriculus praeditus eſſe cernitur, quando a dextro ſeparatur, nec aliam prae ſe ferre poſſet faciem, etiamſi ſolus ſine dextro exiſteret. Aliter autem cum dextro comparatum eſt ventriculo. Hic, dum ſeparatur a ſiniſtro, vti externas tres facies, ſuperiorem inferioremque planas, tertiam concauam baſilarem, ſic quartam interiorem ſiniſtram, ſiniſtro obuerſam ventriculo, concauam pariter, faciem habet, marginibus vtrinque, ſuperius inferiusque, acutis tenuibus terminatam. Hac ſua concauitate adeo exacte conuexitati lateris dextri ſiniſtri ventriculi reſpondet, margine acuto altero ſuperiori, altero inferiori, ventriculi ſiniſtri ſuperficiei applicato, vt facile appareat, ab ipſa hac dextri ventriculi ad ſiniſtrum applicatione, faciem eius concauam ſiniſtram et margines acutos tenuesque et totam ſingularem illam tri-

que-

quetram figuram ſubortam eſſe; quemadmodum in ſequentibus Diſſertationibus accuratius dicetur.

*Cauſae harum differentiarum, vnde natura ventriculi vtriusque apparet.*

Sic dexter ergo totus ad ſiniſtrum plane ventriculum accommodatus eſt et conformatus; ſiniſter, originali ſua figura praeditus, nullam, ne minimam quidem, paſſus a dextro mutationem. Vt, etiamſi id minime ex *Halleri* de ouo incubato obſeruationibus iam conſtitiſſet, ex ſola figura et fabrica vtriusque ventriculi comparata coniecturam facere poſſes: ſiniſtrum primogenitum ventriculum eſſe, eumque ſolum aliquando exſtitiſſe, dextrum poſtea illi eſſe aduatum. Nimirum videntur ſub initio embryonis formandi vires formatrices maximae eſſe, fieri inde continuo minores. Quae primo omnium enim partes producuntur, cerebrum et medulla ſpinalis, fundamentum ſunt totius corporis, omnemque ei animalitatem largiuntur. Huic cor continuo pro nutritione additur, ſimplex nimirum, quod vna arteria ramificata ſanguinem ſingulis partibus diſtribuat, vna vena ab iis recipiat. Quae tum producuntur partes minoris momenti et efficaciae ſunt, extremitates et viſcera. Minimi, quae poſthaec ſequuntur, quaeque vltimae fere ſunt, digiti et internae productarem partium organiſationes. Quando viſcera et pulmones producuntur, nouum cor pro iis, nouumque ſyſtema vaſorum, additur. Id viribus ergo efficitur minoribus. Verum cum primum cor produceretur, nihil aut impedimenti etiam erat huius formationi, aut quod turbare eam, vel vllo modo modificare, potuiſſet. Naturalem ergo hoc ſuam figuram acquiſiuit et conſeruauit. Cor contra ſecundum cum efficiendum eſſet pro pulmonibus, atque applicandum priori; non vti ſua natura formari cor oportebat, ſed

ita

ita, vt fieri id poterat his poſitis circumſtantiis, formatum eſt illud, et applicatum cordi priori. Sic viribus ergo minoribus non modo ventriculus dexter, ſed pluribus etiam concurrentibus cauſis, eius formationem modificantibus, productus eſt. Atque iis rationibus maxime attribuendum eſſe cenſeo, ſi debilior ventriculus dexter ſiniſtro, ſi figura ille fere irregulari praeditus, reperitur, ſi tam manifeſtae in eo correctiones deprehenduntur, ſi tam diuerſus iſte a ſiniſtro naturali obſervatur.

*His cauſis iisdem caeterae omnes ſingularitates cordis reſpectu ſtructurae deberi videntur.*

His ergo iisdem rationibus, vti, quae hactenus dictae, differentiae, varia illa diſpoſitio fibrarum quoque, quae faſciatim in dextro ventriculo, funiculatim fere in ſiniſtro, collectae ſtrata, imprimis externa, efficiunt, debentur. Et ipſum illum obliquum cordis ſingularumque eius partium ſitum, maxime irregularem et inexplicabilem, ab his diuerſis vtriusque ventriculi cauſis efficientibus pendere arbitror. Aut mirum tamen non eſt, ſi diuerſis temporibus diuerſae partes conſtructae, alteraque prius tanquam integrum viscus formata, altera poſt addita cauſis diuerſis priori, et formae cordis perfecti, et ſitui, maxime irregulatibus, anſam praebuere.

*Et alia porro inſignis in ordine diſpoſitionis fibrarum inter vtrumque ventriculum differentia.*

Denique etiam haec, quam continuo dicam, vtriusque ventriculi differentia effectibus cauſarum illarum accenſenda eſſe videtur. Apparuit in Diſſertatione III. fibras ventriculi dextri externas obliquas quidem eſſe, ſi ad axin cordis aut ventriculi referuntur, adeoque tanquam horum fibrae conſiderantur.

Quodſi

Quodſi vero ſingulas faſcias earum ad eas partes diuerſas refers, quas faſciae efficiunt, et ad quas proprie fibrae pertinent, transuerſae ſunt omnes. Sic fibrae coni arterioſi, ſic infundibuli magni fibrae partisque totius arterioſae et partis venoſae tandem, ſingulae ſuarum partium fibrae transuerſae ſunt, easque exacte transuerſim conſtringunt. In ventriculo ſiniſtro alias, niſi arterioſam et venoſam, partes diſtinguere non licet, oblongas vtrasque, ea ratione coniunctas, vt arterioſa, ſuperiorem occupando ventriculi regionem, a baſi aortae poſterius dexterius incipiat, indeque ſecundum ſuperiorem conuexum parietem oblique antrorſum ſiniſtrorſum ad apicem ventriculi, ſeu focum vsque ſuperiorem, ſe extendat, venoſa contra, regionem occupando ventriculi inferiorem, ab orificio venoſo, poſterius ſiniſterius, incipiat, et ad finem ſtriae vsque dextrorſum antrorſum ſecundum inferiorem ventriculi parietem ſe extendat, et pars ergo vtraque, ſuperior arterioſa inferiorque venoſa, ſe mutuo decuſſet. Vti in vniuerſum nunc, pariter atque in dextro, obliquae ſunt fibrae externae ventriculi ſiniſtri, modo vt ductui propiores ſint longitudinali; cum transverſo propiores eſſent in dextro; longitudinales omnino funes ſunt fibraeque ordinis tertii et quarti, ſi ad partem referuntur ad quam proprie pertinent, ventriculi arterioſam. A regione enim baſis aortae recta ad focum ſuperiorem, aut parellelae huic ductui, antrorſum nempe oblique et ſiniſtrorſum, vt pars arterioſa oblonga ipſa, proinde longitudinales pro hac parte, progrediuntur. Nimirum fibrae ordinis quarti totae ab initio ad finem vsque ad hunc ductum procedunt; funes fibraeque tertii ordinis, quo vsque in ſuperiori verſantur ventriculi ſuperficie, eundem ductum ſequuntur; flexae vero in inferiorem dextrorſum potius oblique continuant; ſeorſim a partis arterioſae ductu. Verum nec pertinent ad partem arterioſam ventriculi, ſuperiorem huius regionem occupantem, hae fibrae omnes,

nes, niſi quo vsque in ſuperiori ſuperficie verſantur; quam primum inferiorem flexae ingrediuntur venoſam efficere incipiunt, inferiori parieti contiguam. Fibrae ordinis primi, portionesque fibrarum ſecundi et tertii ordinis, quae inferiorem occupant ventriculi ſuperficiem, quaeque venoſam eius partem efficiunt, longitudinales ſunt parti venoſae. Pariter enim vt haec pars ipſa ab orificio venoſo ad finem ſtriae, aut parallelae huic ductui, incedunt. Vt ergo dextri ventriculi fibrae externae, ſi ad ſuas ſingulae faſciae, aut ordines, partes referuntur, transuerſae exacte ſunt; accurate longitudinales ſiniſtri ſunt ventriculi fibrae, ſi ad ſuas hae pariter, ad quas pertinent, aut quas efficiunt, partes referuntur. Atque haec ergo pariter, quae inter vtrumque ventriculum intercedit, differentia, qua proprietatibus plane oppoſitis ventriculi praediti eſſe videntur, non mirum eſſe opinor, quod inueniatur in ventriculis, quorum alter requiſitis plenisque viribus, nullis limitatus aut impeditus circumſtantiis, productus, alter viribus deficientibus, accommodatus ad priorem, et ita tandem, vt potuit fieri, formatus eſt.

*Et quae in ipſo denique ventriculorum motu diuerſa natura obtinere videtur.*

Neque haec motus vermicularis ſpecies ergo, aut veſtigium eius, ſicut in ſiniſtri ventriculi motu illud obſeruatum eſt, in dextro locum habere poteſt ventriculo, cum fibris iſte longitudinalibus externis, velut ſiniſter, non ſit praeditus. Internae tamen dextri ventriculi fibrae, quo vsque ad partem arterioſam pertinent, longitudinales ſunt pro hac parte, et aliquam ergo, ſed multo debiliorem non modo, verum et imperfectiorem contractionem longitudinalem primaeui canalis curuati efficiunt. Non modo enim ſolae internae in dextro ventriculo fibrae longitudinales ſunt, cum internae pariter ac

exter-

externae in ſiniſtro ventriculo hunc ductum ſequantur; ſed neque in parte venoſa etiam ſecundum eandem directionem fibrae internae ventriculi dextri progrediuntur. Et videtur ergo, ſi quem vnquam ventriculus iſte exercuit motum vermicularem, is ſucceſſiua potius transuerſalium fibrarum actione, partiumque variarum curuati canalis conſtrictione ſucceſſiua, quam adductione poſteriorum canalis partium ad anteriores factus, et alia proinde ſpecies vermicularis motus, fuiſſe.

*Ventriculi definiti.*

Sic patet ergo, aliam dextro, aliam ſiniſtro, ventriculo naturam eſſe. Nimirum ſiniſter, cor primum, cerebri medullaeque ſpinalis et neruorum, ſeu capitis trunci et artuum, cor, omnino perfectum eſt. Dexter, ſecundum, pro ſolis pulmonibus factum, imperfectius multo. Et mea ſane ſententia, ſentiant alii aliter, vena portarum tertium cor eſt, imperfectiſſimum, pro hepate imprimis et tubo cibario.

# EXPLICATIO TRIVM TABVLARVM ANATOMICARVM, ad quinque priores Diſſertationes: DE ORDINE FIBRARVM CORDIS, (QVIBVS DE FIBRIS TRACTATVR VENTRICVLORVM EXTERNIS), PERTINENTIVM.

Auctore
*C. F. WOLFF.*

*Conuent. exhib. d.* 3. *Ian.* 1787.

Ventriculorum non modo, ſed ſinuum quoque et auricularum fibrae externae in tribus his tabulis repraeſentantur, quae caeterum ex uno eodemque corde ſumtae ſunt.

## TAB. I.

### Cordis ſuperficies ſuperior. Vaſorum magnorum et ſinuum facies anterior.

*A. C. D.* Ventriculus dexter.

*B. C. D.* Ventriculus ſiniſter.

*C. D.* Crena.

*C.* Extremitas poſterior crenae, ſeu marginis ſepti ſuperioris.

*D.*

*D.* Extremitas crenae anterior, ſeu apex communis cordis.

*E.* Apex ventriculi ſiniſtri, in quem fibrae radiatim concurrunt (centrum focorum commune.)

*F.* Apex ventriculi dextri, ſuper quem fibrae tranſeunt.

*G. H. I. C.* Pars arterioſa ventriculi dextri.

*H. G. M. F.* Pars venoſa ventriculi dextri.

*I. K. L. C.* Conus arterioſus, a partibus retro eum ſitis ſeparatus, vt vna cum arteria apicem verſus reflecti poſſit. In aliis cordibus maior et ſpecioſior hic conus inueniri ſolet.

*I. K. G.* Margo baſilaris, quo pars ventriculi baſilaris (*O.*) a ſuperficie ſuperiori ventriculi diſtinguitur.

*K.* Terminus ad quem vsque in latere dextro conus cum arteria eleuari et reflecti poteſt.

*L.* Terminus quo vsque hoc in ſiniſtro fieri poteſt.

*M. G.* Angulus ventriculi dextri, intus cauernoſus, quo ſanguis, copioſius irrumpens, perque foramina annuli venoſi expreſſus, recipitur.

*M. N.* Pars ventricoſa marginis anterioris, quae ampliſſimam partem cauitatis, minusque repletam columnis, partis venoſae ventriculi continet.

*N. D.* Pars anterior et ſiniſterior ventriculi, columnis repleta et fibris, ad apicem pertinens. Haec inferius, angulus ſuperius, receptaculum cauernoſum eſt pro ſanguine vberius irrumpente.

*O.* Portio partis baſilaris ventriculi dextri, margine (*K.*) a ſuperficie ventriculi ſuperiori diſtincta.

*P.* Truncus arteriae pulmonalis.

*Q.* Eius ramus ſiniſter, amplior breuiorque.

*R.* Eius ramus dexter, longior et anguſtior.

*S.* Sinus valuulae ſemilunaris anterioris, qui in hac ſede ſua, dum a pleura et celluloſa ſatis depurata arteria eſt, inflatus apparet.

*T.* Dimidia pars ſinus valuulae dextrae. Huic dimidia poſterior pars ſinus eiusdem, ſinui anteriori poſterior ſinus, in pariete arteriae pulmonalis poſteriori reſpondet.

*V.* Arcus aortae.

*W.* Arteria innominata.

*X.* Carotis dextra.

*Z.* Carotis ſiniſtra.

*a.* Aorta deſcendens.

*b.* Arteriae coronariae dextrae pars emergens, reſecta vbi flecti et progredi verſus marginem ventriculi incipit, quo et craſſities adipis in hac ſede, et quo vsque a carne cordis ſerpens arteria diſtet, appareat.

*c.* Arteria coronaria ſiniſtra, ex aorta nata, ſola adipe hactenus et membrana externa tecta.

*d.* Eius primus ramus reſectus.

*e.* Truncus continuatus, ſub carnem cordis nunc, quae pontem efficit, ſe recipiens.

*f.* Is truncus, vbi ſecundum ramum editurus eſt, ſub ponte prodiens.

*g.* Truncus continuatus immergens ſe rurſus carni cordis, poſtquam ramum dedit.

*h.* Ramus, quem dat, reſectus.

*i.* Faſcia coronalis, quae baſin ſinuum communem ambit.

*k.* Pars auriculae ſiniſtrae, ſurſum reflexae.

*l.* Col-

*l.* Collum auriculae dextrae, eadem faſcia coronali conſtrictum.

*m.* Superficies ſinuum anterior communis, plana erecta.

*n.* Appendix auriculae, quae eleuari et reflecti poteſt, longe diſtans in corde nudo a margine coronali cordis, quem, dum craſſo adipe ſuo inueſtitus ſuper ſinum ſe extendit, auricula tegit.

*o.* Ad hunc terminum vsque appendix ſeparatus eleuari et reflecti inferius poteſt; inde dextrorſum pars parietis ſinus dextri eſt.

*p.* Capitulum ſeu tuberculum perforatum auriculae. Ad hunc terminum ſuperius vsque appendix eleuari poteſt; dimidia pars ſiniſterior vna reflectitur, dexterior pars parietis ſinus eſt.

*q.* Capitulum auriculae tendinoſum. Hoc minus conſtans eſſe videtur.

*r.* Dorſum auriculae.

*s.* Superficies auriculae conuexa anterior. Concaua facies externa in appendice reflexo apparet.

*t.* Pars muſculoſa venae cauae ſuperioris.

*u.* Pars fibris muſcularibus expers.

*v.* Filum cartilagineum anterius dextrum.

*w.* Filum cartilagineum anterius ſiniſtrum.

*x.* Fibrae circumflexae ſiniſtrae, quae, ortae ſiniſterius a baſi arteriae pulmonalis, transuerſim circa latus ſiniſtrum coni arterioſi flectuntur, et in ſupremam partem crenae inſeruntur. Hae fibrae in aliis cordibus multo notabiliores apparuerunt.

*y. z.* 1. 2. 3. Fibrae pulmonales anteriores, ortae a media parte anteriori baſis arteriae pulmonalis, inſertae in pontem.

*y.* Fi-

*y*. Fibra latior huius faſciae, quae vna cum caeteris pontem efficit.

*z*. Vbi haec fibra ſuper crenam tranſit, et ſuper arteriam coronariam, pontem efficiendo, fibrisque ſe immiſcet ventriculi ſiniſtri.

1. Fibrae mediae in latiorem fibram (2.) pennatim inſertae.

2. Fibra altera latior et longa huius faſciae, quae receptis breuioribus (1.) cum altera (*y*.) coniuncta dimidiam partem pontis in hoc corde efficit.

3. Vbi haec fibra ſuper crenam tranſit, partim interrupta, fibrisque ſe addit ventriculi ſiniſtri.

4. Fibrae circumflexae dextrae ſuperiores ſiue pulmonales poſteriores, quae ortae a latere poſteriori baſis arteriae pulmonalis circa dextrum latus coni flectuntur et in longam pulmonalium anteriorum fibram (2.) ſe inſerunt.

5. 6. Fibrae circumflexae dextrae inferiores ſiue aorticae, quae ortae a facie anteriori baſis aortae circa conum flectuntur, in eandemque fibram partim pulmonalem, partim in interiectas aut faſciae infundibuli fibras ſe inſerunt.

6. Fines fibrarum huius faſciae, quae ex angulo inter aortam et filum cartilagineum dextrum oriuntur.

7. Fibrae interiectae, admodum variabiles.

8. 11. 13. 14. 15. 16. 18. 19. 20. Faſcia magna infundibuli, cuius fibrae ortae a filo cartilagineo anteriori (*v*.) curuatim ſuper partem baſilarem tranſeunt (*O*.) et ſuper marginem baſilarem, quo facto in ſuperiori ſuperficie ventriculi ad crenam vsque progrediuntur.

8. 8. Prima harum fibrarum lata et longa, ad crenam vsque continuata, vicinis fibris vbique per fibrillas annexa.

9. 10. Duae fibrae in quas illa ( 8. 8.) ſe diuidit, crenam aliquatenus interruptae tranſeuntes, fibrisque ſe addentes ventriculi ſiniſtri.

11. Secunda harum magnarum fibrarum, fibrillis, in quas reſoluitur, in praecedentem fibram inſerta.

12. Fibra pariter reſoluta in crenam inſerta.

13. Fibra tertia varie reſoluta in alias tranſiens fibras.

14. 14. 14. 14. Loca, vbi fibras latas a ſe inuicem remoui, vt fibrillae appareant, quae ortae ex altera, tranſeuntes in alteram fibrarum vicinarum, eas fibras connectunt.

15. Locus ſimilis vbi ſeparatis fibris fibrillae apparent, fibras connectentes.

16. Alius locus, vbi ſimpliciter fibrillae, mediae inter binas fibras magnas, ex inferiori oblique in ſuperiorem tranſeunt, non tamen vti in prioribus exemplis ex longitudinalibus fibrarum fibrillis continuant.

17. 17. 17. Fines fibrarum (13. 14. 15.) ſerratim cum oppoſitis fibris ventriculi ſiniſtri in crenam inſerti, carni ſubiectae adhaerendo.

18. Alia ratio nexus, vbi tota fibra lata inferior, reſoluta in fibrillas, in ſuperiorem inſeritur, totaque ſic conſumitur.

19. Terminus huius faſciae magnae ad baſin ventriculi.

20. Terminus eiusdem ad crenam.

21. Pars fibrarum vltimarum faſciae crenam tranſiens, pontem efficiendo ſub quo ramus arteriae ex carne cordis exit.

22. Pars alia harum fibrarum in crenam inſerta.

23. Foramen quo ramus arteriae exit.

24. 24. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 29. 30. 31. Faſcia angularis ſeu fibrae angulares, quae ortae a filo cartilagineo poſteriori dextro circa angulum flectuntur, eumque inuoluunt, et fine anguſto in crenam inſeruntur, pennatim maximam partem inter ſe concurrendo.

24. Prima huius faſciae fibra ad baſin cordis, quae ex fine fili cartilaginei poſterioris oritur.

24. 24. Vltima eiusdem fibra, ex principio fili emergentis orta.

25. Pars faſciae baſi propior, cuius fibrae fere parallelae per ſedes (26. 27.) continuant. Portio longior.

25. 24. 24. Pars inferior, cuius fibrae pennatim ſe ad priores applicant. Portio breuior.

26. 27. Continuatio portionis longae.

28. Inſertio huius portionis in crenam.

29. 29. Fibrae portionis breuis latae longaeque ad priorem partem ſe applicantes.

30. Fibrae partis eiusdem tenuiores, ſub prioribus quaſi emergentes, parallelae iisdem continuatae.

31. Fibrae eaedem in portionem longam inſertae.

M. A. N. D. 34. 57. Fibrae ventrales, tenues, ortae a ſtria, dum circa marginem ventriculi flectuntur diuiſae in faſciolas minores.

32. 24. 24. 33. Prima harum fibrarum faſciola, fere triangularis, quae plane transuerſim, et fere adſcendendo, verſus crenam progreditur, cuius fibrae dum adſcendunt, ſub fibris faſciae praecedentis maximam partem ſe ſubducunt,

ducunt, exceptis inferioribus, quae apicem verſus flexae in duas quaſi caudas (34. 35.) diſcedunt, in crenam inſertas.

33. Quo vsque prioribus iſtae fibris ſe ſubducunt; vbi ſimul flexae in duas abire caudas incipiunt.

34. Cauda ſuperior.

35. Cauda inferior; ambae in crenam inſertae.

36. 32. 37. 38. Anguſta faſciola pariter fere fibris ſuis adſcendens, cuius fibrae inferiores omnes in ſuperiorem inſeruntur.

36. Terminus faſciae inferior.

37. Fibra ſuperior craſſa.

39. 36. 40. 41. 42. Faſcia latior fibris pariter adſcendentibus.

39. Terminus huius faſciae inferior.

40. In hac ſede ſuperiores huius faſciolae fibrae verſus apicem flexae in caudam inferiorem (33. 35.) deſcendendo inſeruntur.

41. Inferiores faſciae fibrae, quae ſimili priorum ſerpentino ductu pariter in caudam (35.) inſeruntur.

42. Infimae faſciolae fibrae, quae ad crenam vsque perueniunt, in eamque inſeruntur.

43. 39. 44. 45. 46. Ad crenam vsque continuata fibris pariter et tenuibus et fere adſcendentibus.

44. Fibrae eius faſciolae mediae, ſub ſuperiores ſeu poſteriores ſe ſubducentes.

45. Superiores in crenam deſcendendo inſertae.

46. Infimae fibrae pariter deſcendendo in crenam inſertae.

47. N. 48. 49. Faſciola alia ſuperioribus fibris in faſciam praecedentem, inferioribus in crenam inſerta.

47. Terminus faſciolae inferior.
48. Fibrae ſuperiores ſub praecedentem faſciolam ſe recipientes.
49. Inferiores, quae deſcendendo in crenam tranſeunt.
50. 51. Faſciola anguſta tota adſcendens totaque ſuis fibris ſub priorem faſciolam ſe recipiens.
50. Terminus inferior.
51. Fibrae ſub faſciam praecedentem ſe recipientes.
52. 53. Anguſtiſſima faſciola adſcendens fibrisque ſe ſub priorem faſciolam prope crenam recipiens.
54. 55. 56. Faſcia latior triangularis fibris transuerſis ſub priori faſciola emergentibus in crenam inſertis.
54. Terminus inferior.
55. Fibrae poſteriores breuiſſimae, ſicut mediae ſub priori faſciola emergentes, in crenam inſertae.
56. Fibrae inferiores a margine ventriculi ortae in crenam tranſientes.
57. 54. 58. Vltima faſcia, a ſtria orta in crenam inſerta, fibris conſtans transuerſalibus.
57. Terminus inferior.
58. Fibrarum partim in priorem faſciam, partim in crenam, inſertio.

Omnes hae faſciolae ventrales variabiles ſunt. Exemplum tantummodo indicatione earum exhibui modi, quo fere diſtribui et diuidi fibrae ventrales in vniuerſum ſolent. Sola pars proxima apici (50. 51. 57.) conſtans eſſe videtur, quam ideo a praecedentibus faſciolis, ventralem faſciam efficientibus, nomine faſciae apicis diſtinguere poſſes.

59. etc. — 85. Fibrarum ventriculi ſiniſtri ordo ſecundus, ſeu funes, qui orti a filo cartilagineo anteriori ſiniſtro,

lati

lati craſſique, in ramos diuiſi, fibrillis coniuncti, ſuper dimidiam fere poſteriorem ſiniſteriorem que partem ſuperficiei ſuperioris ventriculi oblique deſcendendo ad marginem vsque, tum porro ſuper marginem in inferiorem tranſeunt ſuperficiem, cuius quaſi dimidiam partem anteriorem ſiniſterioremque occupant, in maximam partem poſteriorem ſtriae inſerti.

59. Prima minimaque fibrarum huius ordinis, ab interſtitio inter bina fila ſiniſtra orta, continuo in inferiorem deſcendens ſuperficiem.

60. Fibra ſecunda, pariter oblique ſiniſtrorſum arcuatim deſcendens, ſuperque marginem in ſuperficiem inferiorem tranſiens.

61. Tertia fibra, cuius maior pars in ſuperiori ſuperficie apparet.

62. Quarta fibra lata craſſa, eoque longior, quo anterior et propior principio fili cartilaginei oritur.

63. Interſtitium fibrillis obliquis occupatum, quibus funes maiores connectuntur.

64. Funis anguſtiori compreſſo principio carneo a filo cartilagineo ortus, oblique inde ad marginem deſcendens, vbi reſolutus in fibras ad inferiorem ſuperficiem tranſit.

65. Interſtitium, fibrillis repletum, funes (64 et 67.) connectentibus.

66. Fibra tenuior ex interſtitio (65.) emergens, ſuper marginem in inferiorem ſuperficiem continuata.

67. Alter funis magnus, qui in plures ramos in ſuperficie inferiori diuiditur.

68. Magnum et latum interſtitium inter fibras (67 et 71), fibrillis, ab altero fune ad alterum transſeuntibus, eosque funes connectentibus, repletum.

69. Funiculus ex interſtitio emergens.

70. Tertius magnus funis ramificatus, anguſtiori parte ex filo cartilagineo ortus, deinde in duos magnos ramos diuergentes diuiſus.

71. Alter horum ramorum, qui haud obſcure porro in duos ſibi parallelos ramos ſatis craſſos diuiſus eſt.

72. Alter illius funis ramus, pariter craſſus, qui ſe ad fibras (82. 83. 84.) applicat cum iisque latam faſciam efficit, ad marginem vsque continuatam (85. 86.)

73. Tertius eius funis ramus qui inter priores emergere videtur, quique ipſe bifurcatus tenuioribus longis fibris in ſuperficiem inferiorem tranſit.

74. Interſtitium inter eos ramos, fibrillis nectentibus repletum.

75. Fibra in hoc interſtitio ſub fibrillis obliquis emergens ad marginem cordis continuata.

76. Altera eiusmodi fibra emergens.

77. Aliud magnum inter ramos (72. 73.) interſtitium, inſignibus fibrillis occupatum, quae manifeſto ex ramo (72.) continuantur, ſuperius in ramum (73.) tranſeunt inferius quaſi nouos ramos efficiunt.

78. Duae fibrae in quas fibrillae continuant.

79. Profunda foſſa pro ramo arterioſo, in cuius parte profunda pariter fibrillae obliquae, vicinas fibras connectentes, apparent.

80. Solum exemplum (niſi error ſubeſt) interſtitii, in quo fibrillae a ſiniſtris verſus dextra deſcendunt.

81. Quartus magnus funis, continuo in duos funiculos diviſus, qui ſe ſub illos (82. 83.) ſubducunt.

82.

82. Quartus funis, ab arteria coronaria tectus.

83. 84. Tres fibrae cohaerentes, laminamque efficientes carneam, in quas funis ille (82.) expanditur. Haec lamina confluit ſiniſterius cum ramo (72.) dexterius cum lamina carnea (87.) qua arteria tegitur, cum eaque mox vnam continuam laminam efficit, tum ſubiectae carni adhaerentem, tum connexam ope rami (72.) cum funibus ſuperioribus, adeoque cum caeteris fibris ventriculi ſiniſtri confuſam. Sic nimirum variis rationibus fibrae ventriculi ſiniſtri externae inter ſe connexae eſſe ſolent.

85. Terminus inferior regionis funium ſeu fibrarum ordinis ſecundi, quae ſua diſtributione partem poſteriorem ſiniſterioremque ventriculi ſiniſtri occupant. Lamina tamen (87.) plurimum confert ad eas fibras, quae ad hunc terminum vsque ventriculum tegunt.

86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. Fibrae ordinis tertii.

86. 85. Faſcia fibrarum a lamina (87.) a fibris (83. 84.) a ramo (72.) et fibris (78. 79.), inter ſe confluentibus effecta.

87. Lamina carnea ex fibris partim ventriculi dextri (z. 9. 10.) continuata, partim ex interruptis his fibris quaſi orta, quae pontis inſtar ſuper arteriam coronariam tranſit, eamque tegit.

88. In hac ſede fibrae laminae, arteriam tegentis, maximam partem ſub fibris (82. 83. 84.) receptae diſparent.

89. 89. 90. 91. Secunda, quae aliquatenus diſtingui poteſt, fibrarum faſcia, cuius fibrae ita ad apicem ventriculi radiatim concurrunt, vt aliae continuo ad alias ſe applicent, adeoque in itinere euaneſcant.

89.

89. 89. Fibrae, ſerratim inſertis ventriculi dextri fibris (17. 17. 17.) interpoſitae, ortae a crena.

90. Fibrae parum a ſe mutuo diſtinctae.

91. Fibrae in ipſo ventriculi margine verſus apicem flexae, aliaeque ſub alias ſe inſinuantes.

92. Quaedam fibrae ex ventriculo dextro continuatae tranſientes ſuper crenam in ſiniſtrum.

93. Vti ſe fibrae iſtae ſub ſequentes inſinuant.

94. Fibrae aliae acutis finibus a crena ortae.

95. Quae vti ſe ad ſequentes applicant.

96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. Ordo fibrarum ventriculi ſiniſtri quartus; ſeu fibrae radiatae.

96. Fibrae ex ventriculo dextro continuatae (quae procurrentem funiculum breuem in hoc corde efficere videntur.)

97. Fibrae, manifeſto ex crena ortae.

98. Fibrae, prope marginem ventriculi curuatae, verſus apicem (*E.*) concurrentes.

99. 100. Fibrae ad praecedentes applicatae.

101. 102. 103. Quae recta fere in apicem ventriculi incurrunt.

104. Vltimae radiatae fibrae, verſus apicem pariter progredientes.

105. Fibrae, quae fasciam coronalem ſinuum communem efficiunt, baſin ſinuum amborum cingentem. Sunt tenues fibrae, quae quouis minimo longitudinis interuallo lateribus inter ſe cohaerent, ſic rete formant areolis frequentiſſimis minimis, aequalibus, oblongis ſiue rhomboideis.

106.

106. Ortus harum fibrarum ex filis cartilagineis ſub angulis acutiſſimis, vt plane filis parallelae transuerſim in faſciis progredi videantur.

107. In hac ſede etiam diſtinctius hic ortus fibrarum apparuit.

108. Fibrae ſimiles coronalibus ductu et natura, quae ſaciem ſinuum communem anteriorem efficiunt, continuatae ex fibris faciei concauae appendicis auriculae.

109. Fibrae coronales ſinus ſiniſtri, ſimili modo retiformes, ſed paulo in hac ſede craſſiores diſtinctioresque.

110. Ortus earum ex filo cartilagineo.

111. Faſcia *baſilaris*, vel *terminalis auriculae dextrae*, quae parallela faſciae coronali ſinuum communi (105.) poſterius in ipſo ſinus ſiniſtro latere incipit, inde totum ſinum, diſtinguendo ſuperiorem cancellatam auriculae partem ab inferiori faſciata, ambit, in ſuperficie anteriori in appendicem auriculae et ad perforatum apicem eius vsque in hoc corde continuat, in aliis tamen brevior citius deſinit. Notabilis et mira haec faſcia eſt, quae in ſequentibus de fibris ſinuum diſſertationibus explicabitur.

112. In hac ſede diuiſa in aliquot fibras haec faſcia partim ad ſuperficiem poſteriorem concauam appendicis tranſit, partim connexa cum parte appendicis perforata (*n.*) ad apicem eius vsque percurrit.

113. 113. Commune principium columnarum, quae reticulatum dorſum auriculae efficiunt, ex faſcia baſilari (111.)

114. Columna dorſalis media, quae marginem auriculae dextrum efficit, faciemque anteriorem a poſteriori diſtinguit, omnium longiſſima, in medium ſuperius capitulum (*q.*) inſerta.

115. Columna anterior ſecunda in idem inſerta capitulum.

116. Columna tertia anterior partim in idem dexterius ſubtendinoſum capitulum (*q.*) partim in illud (*p.*), perforatum, inſerta.

117. Trabecula oblique tranſuerſa.

118. Trabecula ſimilis, qua vtraque prima et ſecunda columna coniunguntur.

119. 120. Trabeculae oblique tranſuerſae inter columnam ſecundam et tertiam.

121. Similis trabecula inter tertiam et quartam columnam.

122. Quarta columna anterior, principio communi inferius ex faſcia baſilari orta, ſuperius in capitulum perforatum inſerta.

123. Trabecula oblique tranſuerſa inter quartam et quintam columnam.

124. Columna anterior quinta, communi principio inferius ex faſcia baſilari orta, ſuperius in capitulum perforatum inſerta.

125. 126. 127. Columnae ventrales auriculae, quae tamen non ſatis conſtantes.

125. Earum prima, quae ex capitulo perforato in appendicem auriculae deſcendit.

126. 127. Duae ſuperiores ventrales columnae, quibus appendix mobilis auriculae ſuperficiei anteriori ſinus adnectitur.

128. 129. Trabeculae oblique tranſuerſae quibus ventrales cum dorſalibus columnis coniunguntur, conformes ductu ſuis columnis.

130. Foraminula quamplurima, minora maioraque in ſuperficie auriculae conuexa, quae, ſicut rhomboidalia colum-

lumnarum interſtitia, ſolis membranis auriculae, externa et interna, clauduntur.

131. Interſtitium perforatum inter faſciam coronalem (105.) et baſilarem (111.), maxima parte in ſuperficie poſteriori ſitum.

132. 133. Fibrae venae cauae ſuperioris, quae in latere venae interno ex anteriori ſuperficie in poſteriorem continuant, eamque pariter obducunt, tum vero in vtraque ſuperficie ad latus venae externum flexae deſcendunt et in capitulum tendinoſum inſeruntur.

## TAB. II.

### Superficies cordis ſuperior, parte baſilari ventriculi dextri antrorſum reflexa. Sinuum et Venarum ſuperficies anterior, arteriis, pulmonali et aorta, prope baſin reſectis, auriculis, dextra dextrorſum, ſiniſtra ſiniſtrorſum, reflexis.

*A. B. D.* Ventriculus dexter, ſuis complexus parietibus carneis. A ſede (*B.*) linea terminalis inter ventriculum dextrum et ſiniſtrum porro ducitur per ſedes (*X. W. O. E.*)

*B. F. I. H. I.* Conus arterioſus, ſumma pars ventriculi dextri, antrorſum reflexus.

*B. I.* Latus ſiniſtrum coni arterioſi reflexi.

*B. I. L. K. F.* Superficies ſeu paries poſterior coni arterioſi reflexi. In hac ſcilicet ſumma et peculiari ſui parte ventriculus dexter a corde ſeparatus exiſtit, proprioque pariete poſteriori gaudet.

*B.* Pars ſiniſtra baſis parietis poſterioris coni arterioſi, et terminus, quo vsque ventriculus dexter ſepto adnatus

 eſt.

eſt. Reliqua pars (*B. G.*) reflexa, ſcilicet conus, ſeparata eſt.

*C. D. E.* Ventriculus ſiniſter quo vsque parietes carnei exterius ſe extendunt.

*D.* Terminus poſterior.

*E.* Extremitas crenae anterior.

*F. G. H. I. K. L. M.* Pars baſilaris ventriculi dextri, antrorſum reflexa, vel ſuperficies eius poſterior. Ad ſedem (*K.*) quidem vsque tantum haec pars ſurſum et deorſum flecti poteſt, dum pars (*M.*) cum fibris (18. 19.) ſuam conſtanter poſitionem tenet.

*F. I.* Baſis ſiue ſectio arteriae pulmonalis.

F. Eius latus dextrum *I.* ſiniſtrum.

*G.* Cauitas coni arterioſi, quae in cauitatem arteriae pulmonalis continuat.

*H.* 15. 15. 16. 16. 14. Quo vsque pars baſilaris proprie conus arterioſus dici poteſt.

*I.* Extremitas ſiniſterior ſuperior coni arterioſi et latus ſiniſtrum baſis arteriae pulmonalis.

*K.* Terminus ad quem pars baſilaris ſurſum, deorſum, flecti poteſt.

*L. K.* Extremitates, inter quas linea ducta eſt, ad quam pars baſilaris, dum ſurſum in ſtatu ſuo naturali flexa eſt, plicatur, adeo, vt ſuperficies haec poſterior partis baſilaris concaua ſit, et foſſam efficiat, cuius pars (*K. L. H.*) ſit inferior, ſurſum ſua ſuperficie ſpectans, (*K. L. F.*) autem ſuperior, deorſum oblique ſua ſuperficie reſpiciens.

*M.* Angulus ventriculi dextri.

*N. M.* 18. 19. Pars angularis ventriculi dextri, cuius fibrae a filo cartilagineo poſteriori oriuntur.

*O. N.*

*O. N. M. H. F. I. A.* Pars arterioſa ventriculi dextri.

*P. N. O. E.* Pars ventriculi eiusdem venoſa.

*P. N. O.* Pars eiusdem ventricoſa intus caua.

*P. E.* Pars anterior columnis repleta.

*O.* Orificium arterioſum ventriculi ſiniſtri ſeu baſis aortae.

*R.* Sectio.

*S.* Arteria coronaria ſiniſtra, ab aorta reſecta.

*T.* Eius ramus primus per ſuperficiem diſtributus.

*V.* Truncus continuatus, ſub pontem tranſiens.

*W.* Truncus ſub ponte emergens.

*X.* Idem porro ſub fibras ſerratas deſcendens.

*Y. Y.* Crena, qua baſis ſinuum communis a baſi cordis diſtinguitur.

*Z.* Alter arteriae ramus per ſuperficiem diſtributus.

*a.* Sinus pulmonalis: Superficiei anterioris pars ſuperior, aequalis, fibris conſtans transuerſalibus ſimplicibus. Haec venas dat vtrinque: Mediam partem ſuperius musculi transuerſales occupant, inferius faſcia lata fibrarum, auriculas vtrinque connectens, tranſeundo in earum ſuperficies planas. Denique pars inferior faſciis coronalibus conſtat, dextra anteriori et ſiniſtra, inter quas vortex continetur.

*b.* Vena pulmonalis dextra anterior.

*c.* Vena pulmonalis ſiniſtra poſterior.

*d.* Vena pulmonalis ſiniſtra anterior.

*e. f. g. h. i. k.* Auricula ſiniſtra reflexa.

*e.* Eius pars mobilis.

*f.* Eius apex, appendicula vermiformis.

*g.* Altera appendicula, quarum ſaepius plures in hac ſiniſtra auricula dantur.

*h. i.* Pediculi auriculae, quibus vtrinque ſinui in haeret.

*h.* Pediculus ſuperior, *i.* inferior.

*k.* Superficies auriculae plana, qua ſinui et baſi cordis flexa incumbit.

*l.* Vena caua ſuperior.

*m. n. o. p. q. r.* Auricula dextra.

*m.* Eius ſuperficies plana, qua ſinui et baſi cordis, dum cor ſcilicet adipe et membrana obuolutum eſt, incumbit. Corde nudato, quo magna pars, adipe conſtans, a baſi aufertur, hanc baſin cordis non tangit.

*n.* Apex, ſiue appendicula.

*o.* Dorſum auriculae columnis conſtans.

*p.* Capitulum ſubtendineum.

*q.* Capitulum perforatum, quod loco pediculi ſuperioris eſt, quo in hac ſede auricula mobilis firmatur.

*r.* Pediculus inferior.

*s.* Faſcia coronalis anterior dextra.

*t.* Faſcia coronalis anterior ſiniſtra.

*v. v. w. w.* Pons (Tab. I. 3. 9. 10.) Tota haec faſciola vna cum reflexo cono arterioſo depreſſa eſt.

*x.* Fibrae ponti accedentes.

*y.* Fibrae circumflexae ſiniſtrae, vna cum cono antrorſum reflexae.

*z.* Nodulus cartilagineus dexter.

1. Filum cartilagineum dextrum anterius.

2. Radix ramorum cartilagineorum poſteriorum dextra.

3. Nodulus cartilagineus ſiniſter, qui et alias craſſior eſſe ſolet.
4. Filum cartilagineum anterius ſiniſtrum.
5. Radix ramorum ſeu filorum poſteriorum ſiniſtra.
6. Principium trunci ramorum cartilagineorum poſteriorum. Hic truncus, breuiſſimus, ſub vorticem in ſpeluncam, quae in hac ſede datur, penetrat, et inter vtrumque ſinum tranſit, exitque in poſteriori ſuperficie ex ſimili ſpelunca, dum diuiſus continuo binos ramos, ſeu fila, cartilaginea poſteriora producit.
7. Columna carnea triangularis, quae ad ſeptum pertinet, qua parte hoc liberum eſt a ventriculo dextro, qui ſcilicet in hac ſede proprio pariete poſteriori inſtructus et partem ſupremam, ſeparatam mobilemque efficit, conum arterioſum, et ſeptum cordis liberum nudumque relinquit.
8. Foſſa triangularis, cono arterioſo in ſitu naturali tecta, ſimili ratione ad ſeptum cordis pertinens.
9. 9. 10. Fibrae circumflexae dextrae ſuperiores ſeu pulmonales poſteriores, qua parte in ſuperficie baſilari cordis ſitae ſunt (Tab. I. 4.)
9. 9. Portio longior, quae ſola circa conum circumflexa in ſuperiorem ſuperficiem tranſit, orta a baſi arteriae pulmonalis.
10. Portio breuior huius muſculi, quae orta ex foſſa triangulari (8.) ad aorticum minorem (12.) ſe applicat.
11. Rima, quae in hac ſede reperitur, vbi muſculi ſuis fibris inſeruntur.
12. 13. 14. 15. 16. Circumflexus muſculus dexter inferior, ſiue aorticus (Tab. I. 5.) ortus a latere dextro baſis aortae, circa conum flexus.

12\. Portio eius minor, ſiue aorticus minor, qui iuxta fibras pulmonales poſteriores ſe inſerit, nec in ſuperiori ſuperficie apparet.

13\. 13. 14. 15. 16. Aorticus maior, ſiue circumflexus dexter inferior, ex angulo inter aortam et filum cartilagineum anterius dextrum ortus, flexus circa conum, tranſiens in ſuperficiem cordis ſuperiorem (Tab. I. 5.).

17\. 17. 17. K. Faſcia infundibuli magna, qua parte per ſuperficiem baſilarem tranſit. Orta a filo cartilagineo anteriori dextro ſuper marginem baſilarem in ſuperficiem tranſit ventriculi ſuperiorem (Tab. I. K. G. 9. 10. 12. 17. 17. 17.)

18\. 19. 20. Faſcia angularis, a filo cartilagineo poſteriori orta (Tab. I. G. M. 27. 28.)

21\. 22. 23. 24. 25. 26. 28. 29. Funes ſeu fibrae ordinis ſecundi, reflexo cono arterioſo cum arteria pulmonali plane detectae.

21\. Idem funis, qui (Tab. I. 82. 83. 84.), retro arteriam coronariam dextram ortus, ſola diſtributione fibrarum apparet.

22\. Idem, qui (Tab. I. 81.) in duos diuiſus ramos ſimplex eſſe videtur. Compreſſi ſcilicet in ſitu naturali funes minus diſtincte apparent, niſi acu ſingulatim a ſe mutuo diſtinguuntur, ſicuti in hac tabula factum.

23\. Funis, qui (Tab. I. 70.).

24\. Ille, qui (Tab. I. 67.).

25\. Qui (Tab. I. 64.).

26\. Qui (Tab. I. 62.).

27\. Qui (Tab. I. 61.).

28\. Qui (Tab. I. 60.).

29. Qui (Tab. I. 59.).

30. Fibrae faſciae coronalis, ex ſuperficie poſteriori circa marginem flexae, in anteriorem prodientes.

31. 31. Fibrae, quae ex ramo cartilagineo anteriori oriuntur, et oblique ſiniſtrorſum adſcendunt, applicando ſe prioribus, quae ortae a filo cartilagineo poſteriori circa latus dextrum flectuntur. (30.)

32. Vti in hac ſede prope nodulum cartilagineum fibrae plane adſcendunt.

33. Spatiolum triangulare, in quo nulla fibra ex filo cartilagineo oritur.

34. Fibrarum (30. 31. 32.), compactarum in ſpatium anguſtius, continuatio, quae, magno arcu facto, ſuper verticem adſcendunt.

35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. Vortex, quem fibrae in hac ſede efficiunt.

35. Fibrae, ex nodo cartilagineo dextro et principio fili cartilaginei ad ſedem (33.) vsque ortae, retrogrado ductu oblique dextrorſum contra priores (31. 32.) adſcendentes.

36. Continuatio fibrarum (35 et 41.) arcu formato, fere concentrico illi (34.), ab eoque incluſo.

37. Crena profunda, ex ſpelunca (40.) continuata, circa quam vorticis fibrae ducuntur.

38. Continuatio fibrarum earundem (35. 36. 41.), qua arcu facto verſus ramos cartilagineos deſcendunt.

39. Fibrae continuatae (36.), ad ſe ipſas applicatae, et in eandem crenam (37.), vnde emerſerant (40.), deſcendentes.

40. Profunda ſpelunca, in quam ſi ſtylum caute vrgeas, is exit in ſuperficie ſinuum poſteriori, ſinibus illaeſis, qui propriis in hac ſede parietibus gaudent, celluloſa connexis. Ex hac ſpelunca fibrae (41.) exeunt, ortae ſcilicet a trunco filorum cartilagineorum poſteriorum (6.), dum inter ſeparatos in hac ſede ſinus ex anteriori ſinuum ſuperficie in poſteriorem tranſit, binaque fila dat poſteriora. In eandemque ſpeluncam fibrae eaedem redeunt (38. 39.), poſtquam vorticem formauere, inſertae in eundem truncum.

41. Fibrae, ex principio trunci filorum cartilagineorum poſteriorum, in ſpleluncam (40.) ſe immergentis, ortae, inde parallelae et conformes iis (35.) a dextris ad ſiniſtra oblique adſcendendo exeuntes, cum iisque per ſedes (36. 38. 39.) continuantes.

42. Continuatio fibrarum earundem (35. 41. 36. 38.) ad ſedem (39.) inflexarum.

43. 43. 43. Alia magis manifeſta fibrarum inflexio, ad eundem fere modum in lineam quaſi perpendicularem ducta, qua aliae fibrae recta ſuper lineam tranſeunt, aliae magis inflexae ſe immergere in eam videntur.

44. Continuatio fibrarum (42. 35. 36. 41.) quae deſcendentes ad radicem cartilagineam (5.), ei adhaerent, tum ſolito modo oblique inde ſiniſtrorſum adſcendunt faſciamque coronalem efficiunt.

45. Proximae fibrae, nunc porro ſolito modo a radice cartilaginea (5.), tanquam ramo inter nodos anaſtomotico, quo et fila coniunguntur, et corona perficitur, ortae.

46. Fibrae ſequentes faſciae coronalis, ex eadem radice cartilaginea ortae.

47. Fibrae ex nodo cartilagineo ſiniſtro et filo ſiniſtro anteriori ortae.

48. Fibrae ex eodem filo ſiniſtro ortae, in faſcia coronali ad ſuperficiem poſteriorem continuatae.

49. Fibrae partim ex fibris (44. 42. 38. 36.) partim ex illis (34.) et illis (46.) adeoque ex vortice, ex filo cartilagineo anteriori dextro et radice cartilaginea ſiniſtra ortae, et collectae in ſuperficiem planam auriculae ſiniſtrae continuatae. Quae fibrae ſub auriculam in ſequentem faſciae coronalis partem (*t.*) continuant a ſolo filo ſiniſtro oriuntur.

50. Fibrae a pediculo inferiori auriculae dextrae deriuatae.

51. Earum continuatio, qua arcum efficiunt, arcubus (34. et 36.) conformem.

52. Earundem continuatio, poſtquam ad lineam (43.) inflexae ſunt.

53. Earundem continuatio per ſuperficiem planam auriculae ſiniſtrae.

54. Fibrae quae videntur ex eodem pediculo auriculae dextrae, ſeu parte inferiori eiusdem, oriri.

55. Earundem per medium ſinum pulmonalem continuatio, qua per ſedem (53.) pariter coarcitae cum fibris (49.) in ſuperficiem planam auriculae ſiniſtrae tranſeunt.

56. Tranſuerſalis anterior, celluloſa tantum, imprimis in parte dexteriore (56. 57. 58. 59.), parieti anteriori ſinuum annexus.

57. Fibrae eius in ſuperficiem planam auriculae continuatae.

58. Alia ſimilis fibrarum faſcia.

59. Pars muſculi in crenam inter auriculam et ſinum inſerta.

60. Eius radix ſuperior, carni ſinus innata.

61. Radix inferior, a pediculo ſuperiore auriculae ſiniſtrae orta.

62. 63. Fibrae aliae ex ſuperficie poſteriori circa latus ſinus flexae, radicibus accedentes.

64. Fibrae ad baſin venae pulmonalis anterioris ſiniſtrae poſitae.

65. Fibrae transuerſae ad latus ſinus dextrum deſcendentes.

66. Transuerſalis poſterior.

67. Fibrae, ex poſteriori ſinus facie collectae, ad latus dextrum primo antrorſum flexae, tum deſcendentes (Tab. III. 102. 103. 104. 105.).

68. Fibrae, ex parte ſuperiori faciei anterioris ſinus collectae, ad latus dextrum ſinus deſcendentes.

69. Fibrae venae pulmonalis poſterioris ſiniſtrae.

70. Fibrae venae pulmonalis poſterioris dextrae.

71. Fibrae venae pulmonalis anterioris dextrae.

72. Fibrarum venae cauae ſuperioris portio ſuperior.

73. Earundem inferior portio.

## Tab. III.

### Cordis ſuperficies inferior; auricularum et vaſorum facies poſterior.

*A. B. C.* Ventriculus ſiniſter.

*A.* Poſtrema pars marginis ſiniſtri, vbi fibrae ex medio interſtitio inter bina fila cartilaginea ſiniſtra oriuntur.

*B.* Terminus ventriculi ad ſtriam, ſeu marginem inferiorem ſepti, vbi ſequentes fibrae, non ad ventriculum, ſed ad ſtriam pertinent.

*C.*

*C.* Finis ſtriae ad ventriculum ſiniſtrum.

*D. E. F.* Ventriculus dexter.

*D.* Angulus ventriculi inter baſin cordis et ſtriam.

*E.* Extremitas poſterior marginis dextri, vbi ſuperficies baſilaris cordis propria primum incipit, indeque ad conuexam cordis ſuperficiem, ab ea diſtincta, lateſcendo continuat; cum in plana cordis ſuperficie nulla ſuperficies baſilaris, a plana facie cordis diſtincta, exiſtat.

*F.* Apex ventriculi dextri.

*G. E. D.* Pars angularis ventriculi dextri.

*G.* Terminus inter partem angularem et ventralem.

*H.* Pars ventricoſa ventriculi, maximam continens cauitatem, minimeque columnis repleta. Caeterum quicquid in hac inferiori cordis ſuperficie apparet, ad partem venoſam pertinet.

*I.* Faſcia coronalis ſiniſtra poſterior.

*K.* Sedes venae coronariae magnae, in regione (*e.*) in auriculam dextram inſertae, et ad ſedes (*K.*) progredientis. Haec inflata, rarioribus tecta fibris, quae quaſi acceſſoriam faſciae coronali poſteriori ſiniſtrae faſciam efficiunt.

*L.* Faſcia coronalis poſterior dextra.

*M.* Collum auriculae dextrae, nempe pars prope baſin cordis conſtrictior per ipſam faſciam coronalem.

*N.* Dorſum auriculae perforatam, anguſtioribus minoribusque interſtitiis columnarum, frequentioribus trabeculis connexarum, in hac poſteriori quam in anteriori auriculae ſuperficie donatum.

*O.* Pars in ſuperficie poſteriori, faſciculis, a baſiliari faſcia ortis, occupata, integra.

*P. P.* Regio venae cauae inferioris, faſciculo (*Q.*) ab exteriori parte auriculae diſtincta, latis tenuiſſimis fibrarum faſciis, flammeis in hoc corde, in aliis ramificatis, tecta.

*Q.* Faſciculus, quo regio venae cauae ab exteriori auriculae parte diſtinguitur.

*R. R. S. T. V. X. Y.* Vena caua inferior, complicata et compreſſa, quo minus vicinas partes demonſtrandas tegat.

*R. R.* Eius paries dexter, valuula *Euſtachii* intus a cauitate auriculae diſtinctus.

*S.* Paries ſiniſter, *leuatore venae cauae inferioris* (quem muſculum, vti caeteros, hic nominatos, in ſequentibus diſſertationibus, de fibris auricularum et ſinuum, explicabo) a pariete poſteriori ſacci pulmonalis diſtinctus.

*T.* Membrana interna nuda.

*V.* Paries venae poſterior plicatus.

*X.* Cauitas partis ex hepate reſectae.

*Y.* Sectio venae ex hepate.

*Z.* Capitulum ſeu tuberculum auriculae tendineum, haud plane conſtans.

*a.* Interſtitium inter faſcias coronalem et baſilarem, perforatum.

*b.* Interſtitium inter easdem faſcias integrum, faſciis fibrarum obliquis, in corde alio fibris contiguis ſimplicibus, occupatum.

*c.* Faſcia baſilaris, quae, data columna (*Q.*), in ſuperficiem anteriorem auriculae continuat. Mira haec faſcia baſilaris ex ſuperficie interna ſinus pulmonalis per verum

rum foramen (*d.*) ex eo ſiniſtro ſinu exit (91. 92.) et applicat ſe ad externam ſuperficiem auriculae dextrae, quemadmodum in deſcriptione harum partium, iconibus, dudum iam paratis, demonſtrabo.

*d.* Foramen ſingulare, per quod faſcia baſilaris (*c.*) ex ſinu pulmonali exit, ſola interna tunica, eaque facile ſeparabili, et celluloſa repletum.

*e.* Sedes orificii venae coronariae magnae in auriculam dextram.

*f. g. h.* Vena caua ſuperior.

*f.* Eius pars infima, qua cum vena caua inferiori ſiniſterius, dexterius cum auricula dextra, minime cum ſinu pulmonali (*k. n. q.*), cohaeret, qui quippe (*k. n. q.*) immota vena (*f. g. h.*) reflecti poteſt.

*g.* Pars venae muſculoſa.

*h.* Suprema fibris priuata.

*i.* Nuda membrana interna auriculae, in venae cauae inferioris parietem poſteriorem (*V.*) continua, vitio ſculptoris lineis, quaſi fibris, notata, nec in icome ſatis recte expreſſa.

*k.* Paries poſterior ſinus ſiniſtri.

*l.* Vena pulmonalis ſiniſtra poſterior et inferior.

*m.* Vena pulmonalis ſiniſtra anterior ſuperiorque.

*n.* Vena pulmonalis dextra poſterior ſimulque inferior, lumine retrorſum ſpectante.

*o.* Vena pulmonalis dextra anterior ſimulque ſuperior.

*p. q.* Huius duo rami.

*r.* Arcus aortae.

*s.* Arteria innominata.

*t.* Ca-

*t.* Carotis ſiniſtra.

*v.* Subclauia ſiniſtra.

*w.* Lumen aortae dorſalis, neque collapſum, nec plane rotundum, ſed ouale, in quam formam etiam mutatum redit.

*x.* Crena poſterius inter ſinum ſiniſtrum et ventriculum ſiniſtrum.

*y.* Filum cartilagineum poſterius ſiniſtrum, partem crenae dexteriorem occupans.

*z.* Pars crenae, cartilagine vacua, celluloſa firma repleta.

1. Crena poſterius inter ſinum et ventriculum dextrum.

2. Filum cartilagineum poſterius dextrum, partem crenae ſiniſteriorem occupans.

3. Pars crenae, cartilagine vacua, celluloſa firma repleta.

4. Truncus horum binorum filorum communis, qui a nodo dextro cartilagineo aortae (Tab. II. *z.*) vna cum filo dextro anteriori (Tab. II. 1.) oritur. (Tab. II. *z.* 2. 6.).

Neque fila ſatis a vacuis partibus crenae diſtincta, neque etiam truncus filorum accurate ſatis, a ſculptore in hac icone expreſſa ſunt.

5. Spelunca poſterior ex qua hic truncus exit.

*6. 6.* Primae fibrae, quae a cartilagineo filo poſteriori ſiniſtro oriuntur, quae in ipſam ſtriae extremitatem poſteriorem inſertae ventriculum non tangunt, crenam potius efficiunt.

7. Fibrae mediae ab ipſa coniunctione filorum cartilagineorum ortae, in mediam ſtriam decurrentes.

8\. Quae primum fibrae a filo cartilagineo ſiniſtro ortae, oblique ſuper aliquam ventriculi partem deſcendendo in latus ſtriae ſiniſtrum inſeruntur; adeoque ad ventriculi fibras pertinent.

9\. 9. Fines harum fibrarum in latus ſtriae inſerti.

10\. 10. Proximae illis fibrae ex filo cartilagineo ortae.

11\. Eaedem in ſtriam inſertae.

12\. Fibrae poſt illas ſequentes, ex filo cartilagineo ortae.

13\. Earum in ſtriam inſertio.

14\. Fibrae ab extremitate fili cartilaginei poſterioris ortae.

15\. Earum ſuper ventriculum arcuatus progreſſus.

16\. Inſertio earundem in ſtriam.

17\. Fibrae, ex medio interſtitio inter bina fila cartilaginea ſiniſtra, anterius et poſterius, ortae, ipſam extremitatem poſteriorem marginis ſiniſtri, ſeu partem gibboſam, occupantes, tranſeundo oblique ad inferiorem ventriculi ſuperficiem, tum primum in hac ſede prodeuntes. Sunt illae eaedem duae (Tab. I. 59.) quarum nec ortus ſatis in hac citata tabula apparet, nec finis notabilem marginis cordis partem occupat.

18\. 18. Earum parum curuatus progreſſus.

19\. 19. Inſertio earum haud procul a fine ſtriae.

20\. 20. 20. Hae longae fibrae vbique velut in ſuperficie ſuperiori fibrillis connexae.

21\. Locus, vbi imprimis hae fibrae diſtinctae apparuere.

22\. 22. Fibrae ex vltima parte fili cartilaginei anterioris ſiniſtri ortae, ſuper marginem cordis flexae, hic prodeuntes.

23. Earum progreſſus, fere rectilineus.

24. 25. Earum inſertio in latus ſtriae, et decurſus iuxta hoc latus ad finem fere vsque.

26. 27. Pars fibrarum, quae videntur continuatae eſſe ex tribus ramis magni funis (Tab. I. 64.)

28. 29. 30. Earum progreſſus.

31. Inſertio in fibras priores, quibus in hac ſede lateraliter ſe applicant.

32. Vltimarum cum prioribus vna et cum illis (25.) concurſus ad finem ſtriae.

33. Quae videntur ex fibra (Tab. I. 66.) continuari.

34. Earum progreſſus.

35. Inſertio applicando ſe ad fibras (30.)

36. Vbi concurrunt cum fibris prioribus.

37. Fibrillae obliquae in hac inferiori ventriculi parte copioſae, longas fibras connectentes.

38. 39. Quae videntur fibrae a ramis (Tab. I. 69 et 71.) magni funis (Tab. I. 70.) oriri.

40. Harum fere parallelus et ſimplex progreſſus; vt iam progrediebantur in ſuperficie ſuperiori.

41. Continuatio inferioris harum fibrarum, quae fibrillis obliquis, traditis ad fibram (34. 35.), ſuperiorem intercludit.

42. Finis huius fibrae.

43. Fibrae breues obliquae, quibus fibrae longae connectuntur.

44. Vbi fibrae longae ad alias longas ſe applicant.

45. Quae videtur ex eodem fonte oriri.

46. Eius continuatio.

47. 47. Fibrae ſingulari directione a fine ſtriae decurrentes, in quas multae longarum (36. 42. 50.) inſeruntur. Videntur, quamuis non ſatis inquiſitae, fasciculi terminales eſſe, de quibus in ſequentibus diſſertationibus dicetur.

48. 48. Quae quaſi ex fibra (Tab. I. 86.) continuata eſſe videtur.

49. Eius continuatio.

50. Eiusdem inſertio in faſciculos (47.).

51. 52. Fibrae, quarum neque ortus, neque finis in hac ſuperficie cordis apparet. Incertum vnde continuatae fuerint. Hoc certum in margine ipſo earum partes medias ſitas fuiſſe, in inferiorem ſuperficiem prorſus non tranſiiſſe.

53. Primae fibrae ex principio fili cartilaginei poſterioris dextri ortae, quae aliquam partem ſtriae tegunt, at continuo dextrorſum flexae ex margine ſtriae exeunt, transverſim fere ſuper planam dextri ventriculi faciem tranſeunt, et angulares fibras a ventralibus diſtinguunt.

54. 54. Harum fibrarum continuatio ad marginem cordis vsque, circa quem flectuntur.

55. 56. 57. 58. 59. Fibrae angulares a filo cartilagineo poſteriori ortae, angulum cordis inuoluentes. (Tab. I. 24. 24. 25.)

55. 56. Primae harum fibrarum ex angulo inter filum cartilagineum et ſtriam ortae. (Tab. I. 24. 30.)

57. Fibrae ſequentes angulis acutiſſimis ſucceſſiue a filo ortae (Tab. I. 25.)

58. Sequentes fibrae angulares circa ſupremum angulum flexae.

59. Earum ſuper partem baſilarem in ſuperiorem ventriculi ſuperficiem continuatio. (Tab. I. 18. 19.)

60. 54. 54. 63. 64. 70. 72. 75. Fibrae ventrales ortae a margine dextro ſtriae flexae circa marginem cordis dextrum, inſertae in crenam. (Tab. I. M. A. F.)

60. 61. 62. Prima ventralium portio. (Tab. I. M. 32.)

60. 60. Vbi hae fibrae ex fibris ſtriae continuantur.

61. Vbi ſub iis prodeunt.

62. Vbi circa marginem flectuntur. (Tab. I. 32.)

63. Fibrae partim manifeſto ex fibris ſtriae longitudinalibus continuatae partim ſub iis prodeuntes.

64. Earum continuatio. (Tab. I. 39.)

65. Fibra craſſa ex fibris ſtriae longitudinalibus continuata, ex cuius latere aliae fibrae minores ſecedunt.

66. Earum continuatio. (Tab. I. 43.)

67. Alia fibra craſſa ſeparataque a ſtria continuata, ex cuius latere tenuiores fibrae ſecedunt.

68. Multae fibrae minores ex latere ſtriae exeuntes, quae pariter in ea ſede prodire videntur, tectae a fibris ſuperficialibus ſtriae.

69. Earum continuatio. (Tab. I. 50. 51.)

70. Tres magnae fibrae craſſae in hoc corde a fibris ſtriae continuatae, diſtinctae.

71. Earum continuatio. (Tab. I. 52. 54. 56.)

72. 72. Craſſus faſciculus fibrarum, in quem vti in craſſiores illas fibras (70. 75.) ſtria quaſi reſoluitur, ex ſine

ſine potius quam latere ſtriae continuatas. Huius continuatio. (Tab. I. 54. 58.)

73. Interſtitium inter magnas illas fibras, egregiis fibrillis obliquis connectentibus repletum.

74. Simile aliud interſtitium.

75. Vltimae fibrae ex fine ſtriae continuatae. (Tab. I. 58.)

76. Fibrae longitudinales ſtriae, ortae a principiis coniunctorum filorum cartilagineorum poſteriorum (4. B. D.) inde verſus apicem cordis progredientes variis modis flexae, ſaepe criſpae.

77. Loca, vbi fibrae criſpae flexuoſae variis modis connectuntur et diſcedunt a ſe inuicem.

78. Quaedam paſſim loca, vbi fibrae ſolutae a ſuperficie ſuper alias laterales ad ventriculum tranſire videntur.

79. 80. 81. 82. Faſcia coronalis poſterior ſiniſtra, cuius fibrae a filo cartilagineo ortae oblique dextrorſum et ſurſum adſcendunt, partimque in fibras continuant, quae venam coronariam tegunt, partim immerſae ſubiectis partibus ſe inſerunt.

79. Quae ex ſuperficie ſinus anteriori, ex filo anteriori ortae, in hanc ſuperficiem tranſeunt.

80. 80. Quae ex filo poſteriori in hac ſuperficie oriuntur.

81. Vbi partim in fibras (112.) tranſeunt partim ſe immergunt.

82. Vltima fibrarum pars, ex principio fili ſiniſtri orta, ſuper truncum filorum (5.) in coronalem faſciam dextram continuata.

83. Alia pars, illi (82.) praecedens, in tenues fibras longas continuata.

84. Harum continuatio altera in fibram obliquam (89.)

85. Altera continuatio in interſtitium perforatum. (*a.*)

86. Fibrae faſciae coronalis poſterioris dextrae, vti ex filo ſuo oriuntur.

87. 88. 89. Faſciae ſuperſtratae obliquae quibus baſilaris faſcia (90.) cum coronali connectitur.

90. Faſcia baſilaris vel ſuperſtrata transuerſalis.

91. Eius ortus ex ſuperficie interna parietis anterioris ſinus ſiniſtri, vti iam in ſuperioribus dictum.

92. Notabilis et praecipuus huius faſciae ramus, quo regio venae cauae inferioris a reliqua auricula diſtinguitur, et qui intus trunco carneo reſpondet ex quo fibrae cancellatae auriculae oriuntur.

93. Eius finis dentatus.

94. Aliae huic ſimiles faſciae, ſimili dentatione ſuperius finitae.

95. 95. 95. Columnae dorſi auriculae retiformes, quae fibras intus cancellatas efficiunt.

96. Harum columnarum ortus a faſcia baſilari.

97. Regio venae cauae inferioris, planis fibris contiguis, in varios proceſſus excurrentibus, occupata.

98. 99. 100. Proceſſus harum fibrarum ad venam cauam producti. Paulo aliter in aliis cordibus has fibras diſtributas eſſe vidi.

101. Leuator venae cauae inferioris maior, ſiue venarum cauarum conſtrictor communis. In ſequentibus diſſertationibus hunc muſculum, cuius etiam multo pulchriorem ſtructuram vidi et pinxi, explicabo.

102. Eius principium ſiniſtrum ex pariete ſinus ſiniſtri ortum.

103. 104. Eius principium dextrum ex trapezio auriculae.

105. Eius finis inferior.

106. Levator venae cauae inferioris minor.

107. Extremitas poſterior musculi transuerſalis ſinuum communis.

108. Quo vsque ſe illa extendit.

109. Trapezius musculus venae cauae ſuperioris.

110. Annularis venae eiusdem, qui tamen in hoc corde non vere annularis eſt, ſed ad capitulum tendineum (Z.) finitur.

111. Pars huius musculi ſuperior, vere annularis.

112. Fibrae rariores diſperſae, venam coronariam tegentes.

113. 114. 115. 116. 117. 118. Musculus terminalis ſinus ſiniſtri, quem pariter ſingularem musculum ſuis locis, iconibus penitius illuſtratum, et demonſtratum, dabo.

113. Fibrae, quae ex transuerſali anteriori oriuntur, circa marginem ſinus flexae in hunc musculum continuant.

114. Fibrae, quae a regione baſis oriuntur.

115. Earum continuatio.

116. Earum flexio et penetratio in eam partem venae cavae inferioris, quae ex ramo eius ſiniſtro, in ſinum ſiniſtrum inſerto, cum dictum ille foramen ouale efficeret, orta eſt.

117. Fibrae extremae, quae ſaepius ſolae exiſtunt.

118. Earum flexio et penetratio in eandem ſuperius dictam partem.

119. 120. 121. 122. Fibrae ex tota fere facie poſteriori ſinus collectae, ad latus dextrum ſinus deſcendentes.

119.

119. Quae a parte inferiori adſcendunt.

120. Quae ex facie anteriori circa latus ſiniſtrum flexae accurrunt, prioribus tectae.

121. Quae a parte ſuperiori adueniunt.

122. Earum continuatio.

123. Fibrae, ex interſtitio inter binas venas pulmonales dextras deriuatae, ad latus dextrum ſinus pariter ante priores deſcendentes.

124. Fibrae ad baſin venae ſiniſtrae poſteris applicatae, ad ſinum pertinentes.

125. Fibrae venae pulmonalis poſterioris ſiniſtrae.

126. Fibrae venae pulmonalis poſterioris dextrae.

127. Fibrae venae pulmonalis anterioris dextrae. Sic et portio fibrarum venae anterioris ſiniſtrae apparet. Vacuae venarum ſedes (*l. m. o. p.*) nudas, quo vsque fibrae carneae ſe non extendunt, partes venarum indicant.

# REFLEXIONS SUR L'ANCIENNETE RELATIVE DES ROCHES ET DES COUCHES TERREUSES QUI COMPOSENT LA CROUTE DU GLOBE TERRESTRE.

Par

*J. J. FERBER.*

## Seconde Section.

*Préſenté à la Conférence & lu le 16. Janvier 1786.*

§. 14.

Le globe ayant ſubi pluſieurs révolutions plus ou moins univerſelles qui ont beaucoup alteré ſa ſurface (§. §. 6. 7.) il faut bien diſtinguer les effets qui en dependent, de l'arrangement primitif des matieres, afin de ne pas juger de l'édifice d'aprés ſes ruines. Sans parler des cataſtrophes dont les ſecouſſes violentes ont tout bouleverſé, au point qu'il eſt presque impoſſible d'en debrouiller le cahos, nous nous arretérons aux operations de la nature plus paiſibles, mais non moins efficaces, telles que ſont la dégradation ordinaire des montagnes, et le transport de leurs débris fort loin leur lieu natal. On a de la peine à ſe former une idée de ce ſpectacle, ſi on

n'en a pas été temoin, quoique tous les auteurs qui ont viſité les hautes montagnes les dépeignent d'aſſez vives couleurs. Je ne citerai que les ouvrages de Meſſieurs de *Sauſſure*, de *Luc*, d'*Arcet*, de l'Abbé *Palaſſeau* et le Discours ſur l'hiſtoire naturelle de la Suiſſe placée à la tête des tableaux topographiques, pittoresques, & phyſiques de ce pays. L'auteur de ce discours intereſſant remarque „ qu'il arrive quelquefois que des maſſes „ d'une grandeur prodigieuſe qui deſcendent d'une hauteur fort „ eſcarpée, ſont transportées & elancées fort au loin, par la rapi„ dité qu'elles ont acquiſe (qui accroit en proportion de leur „ poids) & qu'elles ſont meme jettées ſur le revers des mon„ tagnes, qui ſont de l'autre coté d'un vallon étroit. Il ajoute „ que l'imagination ne peut ſe faire à de pareils transports " (aux quels les torrents, les avalanches contribuent ſouvent), „ mais qu'il faut en avoir vu des exemples & la poſſibilité „ pour y croire (1.) Les gazettes parlent ſouvent de telles deſtructions de montagnes, dont les décombres vont enſevelir des villages entiers, & qui ſont accompagnées de vent, de bruit, de ſecouſſes & d'une telle quantité de pouſſiere, qu'on croit ſentir un tremblement de terre ou les effets d'un volcan faiſant éruption dans ces lieux. Or, il eſt aiſé de juger, que lorsque les montagnes étoient plus hautes, & par conſéquent plus expoſées aux agents deſtructeurs de la nature, qu'elles ne le ſont aujourd'hui, alors leurs éboulements ont du étre plus conſidérables, les maſſes détachées, d'une grandeur plus enorme, leur chûte plus précipitée, & les diſtances de leur transport plus longues, qu'elles ne ſont dans l'état d'abaiſſement actuel de nos montagnes. Ces maſſes detachées, aprés avoir ralenti leur courſe, ſe ſont enfin arretées ſur quelque roche plus baſſe. Les débris ulterieurs des hauteurs voiſines, qui y ont été ammenés enſuite, ont

(1.) P. LXV. ſeconde colonne en bas de la page.

ont peu à peu entouré ces gros blocs; les ont enterré à moitié ſous les nouvelles couches qu'ils ont formées; & la ſuite du tems y a favoriſé la végétation des bois & des forêts; deſorte que ce ne ſont que les pics & les parties ſaillantes de ces groſſes maſſes qu'on voit maintenant à découvert. L'obſervateur moins exercé qui y arrive, ſans avoir connoiſſance de ces évenemens, ne les préſume pas, & ne fait nulle recherche pour reconnoitre s'ils ont eu lieu dans cet endroit. Il examine l'exterieur de ces roches, les pics élevés, & il juge que tout l'intérieur de la montagne eſt compoſé du meme rocher; ou bien, il voit que le pied eſt calcaire par exemple, & que les pics ſaillants ſont de granit: il en tire des concluſions qui naturellement deviennent contraires à ce qu'on voit par tout ailleurs, où ces roches ſe touchent & ſe trouvent encore dans leur diſpoſition primitive; mais „ il a mal vu, mal jugé, il „ s'eſt trompé, &, de la meilleure foi du monde, il induit les „ autres en erreur; car l'exterieur de la montagne lui en impoſe, „ & le granit ne s'y trouve placé ſur la roche calcaire qu'accidentellement, y ayant été précipité des ſommets. " Ce ſont les paroles de Mr. *la Borde* (Diſcours & page cité.) que je repéte parceque je ne ſaurois m'exprimer mieux qu'il l'a fait.

Appliquons ces mêmes réflexions à d'autres phénomènes qui ſont analogues à celui que nous avons expliqué. Si on ne veut pas forger des hypotheſes deſtituées de toute vraiſemblance, il n'y-a pas moien de ſe former d'autres idées ſur l'origine du ſchiſte primitif, qu'une de celles que je vais expoſer. 1.) Quelquesuns prétendent que le ſchiſte eſt formé en même tems & par le même évènement que le granit. Cela ne ſe peut pas, parceque le ſchiſte couvre le granit ou s'adoſſe ſur lui en pluſieurs endroits, & parcequ'il ſeroit incon-

cevable, que la meme maſſe eût formé ici de grandes chaines de granit, là des chaines également étendues de ſchiſte, c'eſt à dire de pluſieurs centaines de lieues, & enfin que la meme matiere liquide eût varié en compoſition & en cryſtalliſation en differents endroits. Il eſt bon de prévenir qu'il ne s'agit pas ici de quelque alteration locale du melange & du tiſſu, ſoit du granit, ſoit du ſchiſte, de peu de volume ou de peu de toiſes. Une telle alteration a trés bien pu avoir lieu, & nous verrons plus bas, qu'elle exiſte en effet dans l'intérieur de quelques roches de ces genres. Mais qu'une chaine de montagnes de pluſieurs centaines de lieues fût, dans la même ligne horizontale, mi-granitique, & mi-ſchiſteuſe, cela n'eſt ni concevable, ni prouvé. Il eſt au contraire vérifié par des obſervations nombreuſes, que le ſchiſte s'appuye & s'adoſſe régulierement au granit; d'où il ſuit qu'il eſt d'une formation poſtérieure à celle du granit. 2.) Cela poſé, il ſeroit poſſible que le ſchiſte eût été parfaitement liquide ou diſſous dans l'eau, lorsqu'il s'appliquoit au deſſus & autour des roches granitiques, c'eſt à dire: que l'eau du cahos auroit prémierement dépoſé le granit, & enſuite le ſchiſte comme un reſidu, une eau-mere de la cryſtalliſation. Quoique ce ſentiment manque de preuves, & ſoufre de grandes difficultés, nous l'admettrons pourtant, comme une hypothèſe qui ne repugne pas à l'objet dont il s'agit ici. Le 3$^{me}$.) ſentiment ſur l'origine du ſchiſte, qui me ſemble le plus probable, & qui convient à la marche ordinaire de la nature, eſt celui, que le ſchiſte eſt formé des débris des montagnes granitiques, décompoſés ou argilifiés plus ou moins, qui ſe delayoient dans l'eau de l'ancien Océan, où ils furent portés & entrainés aprés qu'ils s'etoient detachés, & qui s'y dépoſoient ſucceſſivement au fond, aux pieds, ſur les flancs &, en pluſieurs endroits au moins, ſur les cimes des montagnes granitiques. La dégradation

tion de ces montagnes n'ayant jamais pu discontinuer, parceque les cauſes dont elle dépend n'ont jamais ceſſé, & qu'elles ont plutot agi avec plus de force anciennement qu'à preſent, par des raiſons que nous avons deja alleguées; il n'-y-a aucun doute que pluſieurs maſſes des montagnes granitiques s'écrouloient & ſe précipitoient ſur leurs pentes, lorsque le ſchiſte ſe formoit autour d'elles. Suppoſant donc que la matière argilleuſe du ſchiſte fut alors liquide ou trop molle, pour réſiſter à ce poids, la maſſe de granit a du s'enfoncer & ſe loger dans ſon intérieur. La même choſe a du arriver, ſi le ſchiſte ſe formoit ſucceſſivement des débris des monts granitiques, avec la ſeule difference, qu'alors les depôts poſtérieurs ont enſeveli & recouvert les blocs deja tombés & couchés ſur les dépôts antérieurs ſchiſteux. Voila à ce qu'il me ſemble une explication fort ſimple & naturelle des maſſes de granit qu'on a trouvé dans l'intérieur du gneiſs & du ſchiſte. Quant à celles qu'on a vu adoſſées au gneiſs ou au ſchiſte; elles y ſont venues aprés qu'il étoit tout formé & avoit deja pris la conſiſtence qu'il a aujourd'hui. Un bloc, un pic ou toute une maſſe de granit détachée de la haute montagne & tombant vers le bas fond, s'arretoit enfin ſur le ſchiſte inferieur & en couvroit une partie. Les déblais, les pierres, les ſables & les détrimens ulterieurs des hauteurs granitiques, transportés dans le même endroit, pendant une longue ſuite de ſiecles, à l'aide de l'eau, des torrens &c.; le terreau dérivant de la végétation des mouſſes, des plantes & des bois, a enſuite recouvert & environné ce bloc de toute part; la ſuperficie du terrein s'eſt égaliſée inſenſiblement; & le tout a pris un air d'ancienneté qui cache la veritable ſituation de ce bloc & rend trés difficile de l'appercevoir. S'il ſe trouve effectivement au deſſus du ſchiſte: ce n'eſt pas là ſon lieu natal, ſa place originaire. Ce ſite ne prouve donc abſolument rien contre l'arrangement ordinaire & primitif des montagnes, tel

que nous l'avons indiqué §. 11.; n'étant qu'accidentel, ou une ſuite de la deſtruction des alpes granitiques.

Il eſt à préſumer qu'on trouvera pluſieurs granits paraſites dans l'intérieur & au-deſſus des montagnes ſchiſteuſes, qu'on n'a pas découverts jusqu'à préſent. Mr. *Schroeder*, auteur d'une excellente deſcription du mont *Brocken* au Hartz, vient de nous faire connoitre un nouvel exemple de ce phenomène, dont on trouve le détail dans ſon ouvrage p. 43, 44. Les montagnes gneiſſeuſes & ſchiſteuſes étant ſujettes aux memes viciſſitudes & injures de l'atmoſphére que les granitiques; les ayant également éprouvées avec plus d'effet qu'à preſent, lorsque leur hauteur ſurpaſſoit celle qui leur reſte actuellement: il n'y-a point de doute, que pluſieurs de leurs pics ou masſes, en ſe détachant anciennement, ſont tombés ſur les matieres calcaires inférieures & ont reſté enclavés dans leur ſein tandis que ces matières ſe dépoſoient, ou ſe ſont arreté ſur leur dos, quand elles étoient deja formées. Mr. *la Borde* (Discours cité p. LI.) fournit une preuve de la réalité de ce raiſonnement, lorsqu'il expoſe le rapport entre le *Wetterhorn* & le *Schejdeck* (deux montagnes en ſuiſſe) quant à la diſpoſition de leurs roches. Il prouve que le Wetterhorn, qui eſt une montagne calcaire, s'appuye effectivement ſur le Schejdeck, dont la roche eſt ſchiſteuſe ou argilleuſe, quoique l'apparence ſouvent trompeuſe, ſemble indiquer le contraire. L'illuſion ne vient que de la deſtruction de certaines roches operée par la nature dans cet endroit, de la meme maniere que par tout ailleurs. Il-y-a des roches ſaillantes d'une grandeur ſi démeſurée, qu'on a de la peine à ſe perſuader qu'elles ſoient detachées des montagnes ſupérieures. On eſt tenté de les prendre pour les pics des rochers attachés au ſol de toute antiquité; & pourtant elles ne s'y trouvent placées qu'accidentelle-

tellement, y ayant été précipitées des ſommets. Un fait qui en doit convaincre les plus incredules, c'eſt, que les ſchiſtes des ſommets ſont toûs horizontaux, tandis que ceux qui ſont plus bas s'inclinent en tout ſens: marque indubitable qu'ils ont été culbutés! Je ſoutiens par experience, que ſi on ſe donne la peine de bien voir, & d'examiner attentivement les lieux, où des roches argilleuſes ou ſchiſteuſes, de quelque volume conſidérable, ſe trouvent placées au deſſus & dans l'intérieur des roches calcaires, on verra que *la plus grande partie* de ces phénomènes ne dépend que de quelque déplacement des maſſes de montagnes. Il-y-a ſans doute des cas, où ce fait eſt produit par *d'autres cauſes*. Nous les examinerons plus bas; nous en indiquerons de telles, qui, à ce que je penſe, feront ſuffiſantes, & ne laiſſeront aucun doute, que les loix que la nature a ſuivi, en campoſant les montagnes, ont été les mêmes par tout. En attendant ne quittons pas l'explication que nous avons donnée, avant d'en avoir tiré parti en toutes les occaſions, aux quelles elle eſt appliquable.

Nous n'avons principalement parlé jusqu'à preſent que des gros blocs ou maſſes de montagnes, qui ſe détachent moyennant les fentes & les crevaſſes naturelles, que cauſe la gelée, qui par leur propre poids retombent ſur les pentes, & qui anciennement ſont venûs ſe nicher dans l'intérieur ou au dehors des roches inferieures, lorsqu'elles s'y formoient. Mais outre cette dégradition des montagnes plus forte, & qui n'arrive que de tems en tems, (quoique les intervalles dans toute une chaine ne ſoient pas de longue durée,) ces memes roches ſoufrent continuellement des diminutions plus lentes ou moins conſidérables, mais neanmoins fort réelles. Expoſées toujours à l'air, au ſoleil, à l'humidité & au froid, en un mot, à toutes les injures de l'atmoſphère, elles

elles tombent en défaillance à la ſurface; les parties perdent leur cohéſion; elles ſe diviſent, ſe fendillent & ſe reſolvent en grains, en gravier, en pouſſiere; & la plûie, les lavines, la neige fondûe, les torrents en entrainent, en charient des-cailloux, des ſables, des limons, vers les bas fonds, vers les rivières; & celles-ci les tranſportent jusqu'à la mer. Cette defaillence ſe fait par degrés. Le granit par exemple ſe disſout premiérement en gravier, dans lequel la cohéſion antérieure des parties intégrantes du quartz, du feldſpath & du mica eſt interrompûe & enfin totalement détruite. L'eau en lave & tranſporte dabord les parties les plus légères, celles du mica. Le quartz & le feldſpath ſe diviſe de nouveau, & forme, au lieu de gravier, un ſable plus fin, ou bien il perd ſon éclat, devient laiteux, enſuite farineux, au point qu'il ne preſente enfin qu'une poudre ſiliceuſe mêlée de terre argilleuſe. Le gneiſs & le ſchiſte, qui vraiſemblablement ne ſont formés que de pareils débris & molécûles de montagnes granitiques, réunis de nouveau, ſubiſſent à leur tour, à peu-prés les mêmes métamorphoſes. Les roches calcaires donnent par défaillance, ſuivant les circonſtances, ou une éſpece de gravier, ou une poudre calcaire, la quelle délayée & tranſportée par les eaux, forme enſuite des bancs de Craïe, des dépôts d'agaric mineral ou de farine celeſte, comme on l'appelle (*Lac lunae*) &c. Quelquefois l'eau ſe charge, moyennant l'acide aërien ſans doute, de particules calcaires, par une éſpèce de ſolution, & les dépoſe enſuite là où elle découle, en forme de Tuf ou d'incruſtation de mouſſes, d'oſtéocolle, &c. comme à Mathlock-Bath en Derbyſhire en Angleterre, en Thuringue, dans le pays de Wurtemberg &c. Mr. *Hacquet* a trouvé les montagnes calcaires autour *d'Auronzo* couvertes d'une poudre on farine calcaire qu'il a pris de loin

pour

pour de la neige. (2.) Ces differentes degrés & variétes de la deſtruction ou defaillance des roches, ne dépendent que du tems qu'elles y ſont expoſées, ou de leur qualité par rapport aux propriétés moins eſſentielles, telles que ſont la dureté, la cohéſion des parties plus ou moins grande &c. ou auſſi de quelque mélange accidentel de fer, de terre ſiliceuſe dans les marbres &c. &c. Certaines montagnes ne donnent par défaillance que des cailloux (ciottoloni des Italiens, Geſchiebe des Allemands); d'autres ſe réſolvent plus ou moins promtement en gravier, en pouſſiere, comme la variété finlandoiſe du granit, qui eſt ſujette à une réſolution très promte; au lieu que le granit oriental réſiſte aux ravages de pluſieurs ſiécles.

Or, pendant le tems que le ſchiſte ſe formoit antour des roches granitiques élevées, & ſe dépoſoit ſur leurs flancs & leurs racines, une lavange de granit détruit a pû découler de leurs cimes & former quelques amas ou toute une couche granitique dans l'intérieur du ſchiſte & même dans l'intérieur des roches calcaires. De la même maniere, les débris des montagnes ſchiſteuſes ſe ſont logés dans l'intérieur des roches calcaires, lorsqu'elles ſe formoient autour du ſchiſte. Tels éboulemens & mélanges de matieres ont néceſſairement dû avoir lieu, ſi le ſchiſte a été formé après le granit, & les roches calcaires aprés le ſchiſte. Si donc nos montagnes offrent de pareils phénomenes, ils ne ſont qu'une ſuite de leur formation ſucceſſive; & ſervent plutôt à la confirmer qu'à la refuter. En cas que l'intervalle entre la formation de chaque bande fût trez court, il ſe peut que l'eau même ait emporté

(2.) Jacquet Reiſe aus den Dinariſchen durch die Juliſchen, Carniſchen, Rhätiſchen in die Noriſchen Alpen. 1785. 1r Theil S. 101.

porté des parties du granit encore mou ou peu durci, & les ait dépoſé avec & dans la maſſe des ſchiſtes; comme à ſon tour quelques parties de celui-ci ont pû entrer dans l'intérieur des roches calcaires. Cette confuſion des matières eſt une ſuite néceſſaire de la dégradation & de la décompoſition des montagnes. L'une & l'autre s'opére encore de nos jours, & donne naiſſance à des collines & à des montagnes ſecondaires & tertiaires qui ſe forment aux pieds des plus anciennes, à leurs dépens. Les matieres entrainées par la fonte des neiges, ou par les torrents verſés des ſommets, ſe raſſemblent ſur les pentes & dans les vallons. Si les montagnes qui environnent ces vallons ſont d'un genre de pierre ou de roche qui differe l'une de l'autre, les collines & les monticules ſeront compoſées de différentes couches, adoſſées ſans ordre conſtant, parceque ce n'eſt que le haſard qui les y a fait arriver plûtot ou ou plus tard. Mais tous ces phénomenes, loin d'être incompatibles avec l'arrangement primitif des roches, tel que nous l'avons expoſé §. 11., ne ſervent qu'à le confirmer.

§. 15. Ayant vû que par une ſuite de la décompoſition & de la deſtruction des montagnes, les débris d'une roche plus ancienne, peuvent ſe trouver dans l'interiéur d'une autre, dont la formation eſt plus récente, faire corps avec elle & y exiſter depuis la formation de cette roche: il n'eſt pas difficile de comprendre que les filons métalliques, qui ne ſont que des fentes remplies de minerais, peuvent percer toute la maſſe de telles montagnes, & contenir par tout la même eſpece de minerais. Mais qu'un filon métallique contenû dans le gneiſs ou le ſchiſte adoſſé au granit qui lui ſert de baſe, continue encore dans cette roche inférieure, en certains endroits, comme Mr. *Charpentier* l'obſerve & comme je l'ai obſervé moi-même dans ma deſcription des mines de la Saxe, c'eſt un

un phénomène qui, au premier coup d'oeil, ſemble prouver la meme ancienneté tant du ſchiſte que du granit. Auſſi n'a-t-on pas manqué d'en tirer cette concluſion trop précipitée. La formation des filons étant ſans doute poſtérieure à celle des roches qui les enveloppent, elles ne dépendent pas des mêmes cauſes & n'ont aucun rapport abſolû entre elles. Quelle que ſoit l'origine des filons, les cauſes qui les ont produits dans le ſchiſte, peuvent également avoir operé ſur le granit; & ſi quelques filons, dont on n'a que fort peu d'exemples, continuent du ſchiſte dans le granit inferieur, cela eſt, ou un éffet du haſard, ou cela prouve que les mêmes cauſes ont opéré en même tems, & ſur le ſchiſte & ſur le granit. Si quelque tremblement de terre ou d'autres ſecouſſes, ou l'affaiſſement du terrein en quelque lieu, a cauſé des fentes de roches, conſolidées enſuite avec des matières pierreuſes ou métalliques qui forment la gangue, le phénomène dont il s'agit eſt fort facile à expliquer. Si la retraite des parties, pendant l'exſiccation des roches produites dans l'eau, lorsqu'elle les avoit abandonnées, a donné naiſſance aux filons, comme cela eſt très probable, malgré les objections qu'on a propoſées contre cette théorie, il n'y-a rien qui empêche d'admettre une pareille retraite des parties dans le granit, auſſi bien que dans le ſchiſte au deſſus, en meme tems & au même endroit; ſurtout quand les cas ſont très rares & peu nombreux, où cette continuation du filon a eu lieu. A peine en connoit-on deux ou trois exemples; tandis que presque tous les filons contenûs dans le gneiſs ou le ſchiſte, ſe retréciſſent ou s'évanouiſſent avant d'arriver au granit, ou bien ſont coupés par lui. De cette obſervation plus générale, on eſt fodé à conclure que la ſurface du granit avoit presque par tout pris conſiſtence, avant que le ſchiſte s'y fût adoſſé; & qu'il n'y avoit que peu d'endroits, où elle étoit moins dure, peut-étre deja decompoſée, en état

 de

de défaillance & ſujette à s'ammolir, où elle ait pù ſe mêler intimement avec le ſchiſte, faire corps avec lui, & ſe prêter enſuite aux mêmes retraites que le ſchiſte a eſſuyées. Il s'agit de ſavoir ſi la révolution même qui formoit le ſchiſte primitif, n'agiſſoit pas au commencement avec quelque violence ſur les couches ſupérieures du granit, au moins en certains endroits, où ſon tiſſu & la laiſon des parties intégrantes étoit moins forte, moins ſerrée; & ſi cette action, ce rongement n'y donnoit pas lieu à un mélange, à la combinaiſon plus étroite de ces deux roches. On voit réellement des marques de pareils rongemens & inſertions en pluſieurs endroits à la ſurface de la terre, où deux roches d'un genre de pierre different ſe touchent & s'avoiſinent lateralement. Mr. *Tilas* a deja remarqué que les deux roches ſemblent alors ſe confondre, ſe méler & ſe diſputer le terrein, ſouvent aſſés longtems ou par un éſpace conſidérable, avant que l'une ou l'autre domine (3.). Suppoſant quelque choſe de ſemblable en quelques endroits dans l'intérieur de la terre, où le ſchiſte s'appuye contre le granit, il eſt facile de concevoir qu'une fente du ſchiſte a pû s'étendre à quelque profondeur dans le granit inférieur, où ces roches ſont unies & cimentées enſemble de la maniere indiquée; mais il n'y-a ni apparence, ni obſervation faite, qu'un tel filon pouſſe en grande profondeur dans le granit. Trouvant le gneiſs & le ſchiſte, dont de vaſtes chaines de montagnes primitives ſont compoſées, partout adoſſé au granit, il eſt évident que ſon origine eſt plus récente que celle du granit;

(3.) Tilas Entwurf einer ſchwediſchen Mineralgeſchichte, S. 119. Ce ſont de tels endroits où les minéralogiſtes ont puiſé leurs idées de tranſition ou de paſſage d'une pierre au genre de l'autre p. ex. du ſchiſte à celui de granit &c., d'ou quelques uns parmi eux ont voulû tirer des preuves de la transmutation & de l'identité de toutes les pierres & roches.

nit; ſoit que les filons, dont la formation eſt poſtérieure à celle des roches contenantes, y perce ou non. Ce principe des ſuperpoſitions décide en général de l'ancienneté rélative des roches, excepté les endroits où elles ſont déplacées par la dégradation des montagnes, ou par quelque révolution. Examinant les montagnes ſecondaires, compoſées de pluſieurs couches d'une nature différente, dont la maniere de formation ne diffère pas eſſentiellement de celle des roches primitives, quant à l'élément où elles prirent naiſſance, & à la diſpoſition par lits, comme nous l'avons rémarqué au commencement de ce memoire: on-y voit des filons qui percent presque toutes ces couches, par ex: à Salfeld, à Camsdorf &c., & pourtant perſonne ne diſputera avec raiſon, que leurs couches inférieures ſoient plus anciennes que les ſupérieures.

On a obſervé que le ſchiſte ſurplombe quelquefois le granit, & une roche calcaire le ſchiſte: ou qu'une roche qui, ſuivant notre théorie, devoit être l'inférieure, devient la ſupérieure, le toit, la paroi pendante, pour me ſervir du terme des mineurs, de celle qui, réguliérement, eſt adoſſée ſur elle. Ces phénomènes ne ſe voient nulle part où les montagnes ont gardé leur première diſpoſition; mais ſouvent où elle ſe trouve altérée & dérangée par les volcans, les tremblemens de terre ou par d'autres révolutions; où auſſi par la deſtruction d'une partie des roches, culbutées ou inclinées à cauſe de l'affaiſſement, des crevaſſes & des fentes qu' y exiſtent. Dans les mines il arrive ſouvent que les veines métalliques changent leur direction, de façon que la partie de roche qui en étoit la paroi pendante, en devient la couchante, le pavé, le ſol. Ce changement dépend, dans les pays où on ne connoit ni volcans, ni tremblemens de terre, du dérangement des roches occaſionné anciennement, lorsque les filons s'y for-

 moient

moient; ou auſſi de la ſimple variation de la direction & ramification des filons principaux, qui ſe jettent tantôt d'un coté tantôt de l'autre, ſurtout quand pluſieurs filons ſubalternes s'y joignent (4.). Si le pays eſt volcanique ou expoſé à des tremblemens de terre, il n' y a rien de ſurprenant que ce phénomène ſe préſente fréquemment. Combien de rochers ne trouve'-t-on pas dans les Alpes, dont les maſſes enormes, travaillées par l'action de l'eau, de l'air &c. depuis tant de ſiecles, préſentent les formes les plus bizarres: des roches coupées à pic, inclinées vers les vallons, détruites vers leurs baſes, comme ſi on y avoit fait des excavations artificielles, & qui menacent à chaque inſtant de ſe précipiter dans les rivières qui baignent & qui rongent leur pied. S'il-y avoit de pareils rochers défigurés de granit lorsque le ſchiſte ſe formoit, il eſt clair que celui-ci s'appliquant à leurs maſſes, a dû prendre la forme intérieure que ce noyeau, ce moule lui donnoit. Il n'y a donc rien de ſingulier, ſi dans de tels endroits on trouve que le granit ſert de toit, & le ſchiſte de ſol à un filon qui y exiſte. Les roches calcaires s'appliquant au ſchiſte, y ont pû trouver de ſemblables excavations & moules, dont elles ont pris la forme. Mais toutes ces anomalies locales ne ſont que des exceptions apparentes de la régle générale; car l'enſemble ou toute la maſſe des roches calcaires repoſe pourtant ſur le ſchiſte, & celui-ci ſur le granit. Pour peu qu'on réflechiſſe ſur l'immenſité des ſiecles écoulés depuis la formation des montagnes, ſur les révolutions nombreuſes qui ont pû agir ſur leurs maſſes, pendant & après ce tems, & ſur les effets

(4.) Pro bono haberi ſolet indicio, dum venae ſaepius mutant ſuum pendens & iacens; huiusmodi namque variatio vel mutatio dependere ſolet ab aliarum venularum et fibrarum aſſociatione. *Wallerii Elementa Metallurgiae*, p. 78. §. XVII. Obſeru. 2.

effets qui ont dû en réſulter; on ne ſera pas ſurpris d'y remarquer pluſieurs dérangemens accidentels de la diſpoſition primitive, qui eſt encore la plus générale; & de voir que certaines roches ſont briſées, élevées, précipitées ou renverſées. De tels bouleverſemens ont pû arriver à pluſieurs repriſes ſur le même lieu, ou à peu de diſtance. Mais faut-il juger de la charpente du globe d'après ſes ruines? Ne vaut-il pas mieux s'en tenir aux obſervations faites en tels endroits où l'arrangement des matières conſerve encore la regularité que le Maitre de l'Univers lui imprimoit au commencement?

§. 16. Dans les montagnes ſecondaires, comme on les appelle, rien n'eſt plus ordinaire que de voir qu'une ou pluſieurs couches ſupérieures ſont tout à fait détruites en quelques endroits. Il eſt non ſeulement probable, mais décidé par pluſieurs obſervations, que pluſieurs montagnes granitiques qui ſe trouvent actuellement à nud, ont autrefois été couvertes de ſchiſte ou de pierre calcaire, ou de tous les deux à la fois, l'une ſur l'autre; & que ces bandes ſchiſteuſes & calcaires ſont détruites depuis; comme Mr. l'Abbé *Palaſſeau* le préſume des Pyrenées (5.) La dégradation univerſelle des montagnes en fait foi, & en pluſieurs endroits on a effectivement trouvé tantôt du ſchiſte, tantôt des couches calcaires ſur le granit, à de grandes élévations; tandis que les chaines inférieures en etoient privées. Il faut donc regarder ce ſchiſte & ces roches calcaires comme des reſtes d'anciennes couches qui convroient le granit par tout dans ces chaines. Mr. *Schroeder* (6.) rapporte pluſieurs faits trop frappants pour les paſſer

(5.) Minéralogie des monts Pyrenées, p. 154.

(6.) Schröders Abhandl. vom Brocken und dem übrigen alpiſchen Gebürge des Harzes. 1r Theil, Deſſau 1785, in 8vo.

paſſer ſous ſilence. Après avoir rejetté (p. 118.) le récit de ceux qui pretendent avoir trouvé du marbre, du Jaſpe &c., au ſommet du mont granitique de *Brocken*, il eſt confondû lui-même d'un phènomène inattendû & contraire à ſes ſentiment antérieurs, lorsqu'il trouve du ſchiſte aux ſommets de quelques boſſes de cette montagne, nommées *Wormsberg*, *Achtermannshoehe* & *Roſstrapp* (p. 200, 201, 210, 252.). Ce ſchiſte étoit briſé en pluſieurs blocs, dont pluſieurs étoient deja écroulés ſur la pente du Wormsberg. Comment ce ſchiſte ſeroit-il venû ſur ces hauteurs s'il n'eſt pas un reſte d'une ancienne bande ou couche ſchiſteuſe qui couvroit jadis tout le Brocken, & qui a été détruite par-tout ailleurs qu'à ces ſommets, où on ne le trouvera plus aprés quelques ſicles, continuant de s'écrouler comme il fait? Je ſerois ſans doute fondé à tirer pluſieurs conſéquences de pareilles obſervations; mais je me bornerai ici à en inférer qu'on auroit tort de nier l'exiſtence antérieure des bandes ſchiſteuſes & calcaires au deſſus des montagnes granitiques, uniquement par la raiſon qu'on ne les y trouve pas à préſent par-tout.

§. 17. En renverſant l'ordre de ce raiſonnement je ne balance pas à prononcer, qu'on a tort de nier l'exiſtence de la roche granitique au deſſous d'autres roches, quand celles-ci la cachent ſous leurs maſſes. Il-y-a pluſieurs pays où on ne trouve que des montagnes gneiſſeuſes, ſchiſteuſes ou calcaires, & où il n'y-a ni mines, ni vallons aſſez profonds pour examiner le fond & voir s'il-y-a du granit au deſſous d'elles ou non. Si ces pays ne fourniſſent guere occaſion d'appercevoir le raport entre le granit & le gneiſs, le ſchiſte & la roche calcaire &c., ils ne ſervent pas non plus à combattre l'ancienneté du granit. C'eſt pourtant dans de tels pays, où quelques auteurs ont puiſé les motifs de leurs doutes.

tes. Ne trouvant pas dans les provinces purement calcaires tous les objets, que d'autres chaines de montagnes plus hautes & plus variées, offrent aux yeux de l'obſervateur attentif, ils ne balancent pas à diſputer les faits qu'on y remarque. Cette methode de conclure *a particulari ad vniverſale* heurte ouvertement les principes de la Logique. Il faut abſolument combiner les faits, réunir & comparer pluſieurs obſervations, inſtituées en differents lieux; enfin enviſager les montagnes dans leur enſemble, ſi on veut en juger avec juſteſſe & ne pas s'expoſer frivolement à des erreurs qu'on auroit pû éviter, comme nous le prouverons par quelques exemples.

Meſſieurs *Arduini*, *Targioni Tozzetti* & d'autres ſavans, ayant parfaitement bien obſervé en Italie la ſuperpoſition des roches calcaires ſur le ſchiſte, n'ont pas pû remarquer le granit au deſſous de ce dernier, parcequ'il y eſt enfoncé trop profondément. Le *critique anonyme* de la Geogenie de Mr. *Silberſchlag* (7.) en conclud, qu'il n'y-a pas de granit au deſſous du ſchiſte, de la même façon qu'il a jugé des couches de Marly-la-ville, de Boſerup & d'Amſterdam, que le globe n'eſt compoſé que de terres déliées, jusqu' au centre, en pluſieurs endroits. Paſſant pourtant les Alpes pour aller d'Italie au Tyrol, on retrouve le granit en abondance, qui s'éléve au deſſus de ſa couverture ſchiſteuſe, dans les hautes montagnes de cette province autrichienne (8.). L'épaiſſeur des roches

(7.) Fragmente über die Geogenie ꝛc. S. 177.

(8.) Il eſt tems de répondre ici à une objection que l'auteur de la critique ſur la Geogénie de Mr. *Silberſchlag* n'a fait qu'indirectement, mais que Mr. *Charpentier* propoſe avec plus de clarté dans ſon excellent ouvrage ſur la minéralogie de la Saxe, lorsqu'il traite du rapport entre le Gneiſs & le

ches d'ancienne date eſt trop conſidérable pour les percer par tout

---

le granit. Je tacherai de l'expoſer dans toute ſa force avant d'y repondre. Soit, dira'-t-on que le granit s'enfouit ſous toutes les autres roches jusqu'à preſent connues, comment ſavés vous qu'il n'y-a pas de gneiſs, de ſchiſte ou de roche calcaire encore inférieure au granit? Si je Voulois imiter le raiſonnement que l'anonyme qui critique Mr. *Silberſchlag*, a employé à l'occaſion des couches de Marly-la ville, de Boſerup & d'Amſterdam, & lorsqu'il conclud (p. 177.) des obſervations de Mr. *Arduini* &c. qu'il n'y a point de Granit au deſſous du ſchiſte en Italie, parcequ'on ne l'a pas dècouvert, je me tirerois bientôt d'affaire en niant ſimplement, ſuivant ſon exemple, l'exiſtence d'aucune roche au deſſous du granit. Je le pourrois faire avec plus de fondement en verité, que l'anonyme n'a fait dans le cas dont il s'agit, parceque la profondeur, à laquelle on a percé & examiné les roches granitiques, ſurpaſſe infiniment celles des couches de Marly-la ville &c. Mais j'aime mieux ne rien décider ſur ce que j'ignore. Avouant donc franchement qu'il m'eſt abſolument inconnû, s'il-y-a quelque autre roche inferieure au vieux granit ou nón; ſuppoſant même qu'il y-en a de telle, antérieure à ſa formation, comme il eſt néceſſaire, ſi le granit ne continue pas jusqu'au centre de la terre, quéſtion encore plus au deſſus de nos recherches: je demande, quelle objection en pourroit-on tirer contre la theorie des montagnes que je cherche à confirmer? Je n'en vois aucune, en verité! Ce que nous ſommes en état de connoitre de la charpente du globe, ne regarde que ſon écorce. Tant que le puit de Mr. *de Maupertuis* ne ſera pas creuſé, cette entrepriſe étant impoſſible, nous ne ſaurons rien des entrailles de la terre, à la rigueur du mot. Mais cela n'empeche pas que nous ne tâchions d'en connoitre les enveloppes extérieures, la croute du globe; & à cette fin, le moyen le plus ſûr, eſt ſans doute, de conſulter & de ſuivre les bonnes obſervations qui ſont deja faites, dont il-y-a un aſſés grand nombre pour en tirer quelques concluſions. Si quelque roche ſe trouve réellement au deſſous du granit, nous ne la connoiſſons pas encore; elle ſera indubitablement plus ancienne que le granit: mais non obſtant cela, ce même granit doit être éſtimé plus ancien que toutes les roches adoſſées à lui, étant la plus intérieure, la plus profonde de toutes celles que nous connoiſſons jusqu'à preſent. Et voila tout ce qu'il nous intereſſe d'établir ici.

tout où on veut. Mais cela n'autoriſe pas à nier leur adoſſement régulier & viſible, par tout, où la ſituation du terrein le permet; & de verſer des doutes ſur toutes les découvertes qu'on a faites ſur l'arrangement primitif des roches, uniquement pour cette raiſon, qu'il eſt impoſſible de fouiller la terre à chaque point de ſa ſurface. Cela ne ſe fera jamais; & voudroit-on en attendant, pouſſer le ſcepticisme jusqu'à cette extravagance, de ne rien croire avant qu'on ait rempli de pareilles prétentions de preuves impoſſibles & ſuperflûes: il vaudroit autant renoncer à toute connoiſſance phyſique du globe, & employer ſon tems à d'autres recherches qu'à celles qui n'aboutiſſent à rien, ſi on demande des choſes impraticables & au deſſus des forces humaines. Pour chaque obſervation d'un phénomène naturel, il faut ſans doute choiſir les endroits les plus convenables, & ne pas chercher des pommes ſur le ſapin, ou des plantes alpines dans les marais; ne pas prétendre pêcher & prendre des baleines dans la Baltique à chaque moment, ou nier que de tels animaux exiſtent dans les mers. On peut ſe convaincre de l'ancienneté du granit, ſi on viſite les mines dans les pays convenables, où le travail du mineur eſt pouſſé à de grandes profondeurs, & les vallées les plus profondes de hautes montagnes; ou pluſieurs chaines, compoſees de differentes éſpeces de roc, ſe rencontrent, ſe confinent & plongent ſous terre. C'eſt là que l'oeil peut ſouvent pénétrer jusqu'à la roche inferieure & obſerver qu'elle ſert de baſe aux autres. Si l'on vouloit toujours reſter ſur les cimes des montagnes, on ſe priveroit à deſſein des moyens d'entrevoir le fait, comme cela eſt arrivé à Mr. *Hacquet*, Auteur d'un voyage aux Alpes juliennes, Rhétiennes &c. L'inclinaiſon des bancs ou lits de roches, & la forme du terrein qui en reſulte, ſur tout dans les hautes montagnes & leurs vallons, procure auſſi ſouvent l'occaſion de remarquer la liai-

 ſon,

ſon, l'adoſſement & l'enfoncement de deux roches voiſines, compoſées de pierres différentes. Il faut pourtant prendre garde de ne pas juger tout-de-ſuite, que toute couche trouvée au pied de quelque montagne plonge ſans exception au deſſous d'elle; car il arrive ſouvent, que loin de s'enfouir, elle ne fait que s'appuyer contre la montagne. Il eſt arrivé à Mr. *Fichtel* de conclure dans un pareil cas, que le ſel gemme ſert de baſe au granit en Tranſylvanie, tandis qu'il ne fait que l'entourer, & s'appuyer contre cette roche. Je ne déciderai pas, ſi deux autres ſavans reſpectables ne ſont pas tombés dans des erreurs à peu près ſemblables. Mr. le Comte *de Buffon* prétend que les roches calcaires, ſont, presque par tout, poſées ſur des glaiſes ou argiles qui leur ſervent de baſe (9.) et Mr. *de Schachmann* croit que le granit prés de Königshayn repoſe ſur de l'argile ou du limon melé de quartz & de mica (10.). L'un & l'autre ont apparamment, ou mal vû, ou précipité leurs concluſions, en cas que leurs aſſertions ne dépendent plutôt de quelque équivoque dans les expreſſions dont ils ſe ſont ſervis. Il eſt à préſumer que les glaiſes de Mr. le Comte *de Buffon* n'étoient qu'un ſchiſte tombé en défaillancie à l'extérieur, où l'air le touchoit, ou auſſi que les roches calcaires dont il parle, n'étoient que des couches de quelque colline tertiaire, compoſée de différentes terres ſtratifiées; & que l'argile melée de quartz & de mica, dont Mr. *de Schachmann* fait mention, n'étoit que le granit même en défaillance, tombé de la crête de ces montagnes à leur pied. Si les ſentimens de ces auteurs ne s'accordent pas avec cette explication (Mr. *de Schachmann* dit: *il paroit* que le granit répoſe ſur de l'argile &c.), je ne connois rien d'analogue dans la diſpoſition

(9.) Supplément à l'hiſt. natur. Tome 5*me* in 4*to*, à Paris 1778. p. 102, 465.

(10.) Beobachtungen über die Gebürge bei Königshain, S. 15.

poſition des montagnes. Il eſt même diffile de concevoir, comment des terres molles ou tendres, comprimées du poids immenſe de ces roches pendant pluſieurs milliers d'années, y auroient pû réſiſter, ſans s'échapper par les ouvertures à coté, ou manquer de ſe durcir, quand les roches qui y repoſent ont ſubi la lapidification. Ce qui me fait ſoupçonner quelque équivoque dans leurs expreſſions, qui s'y gliſſe facilement quand on a beaucoup à dire, c'eſt que Mr. *Paſumot* en donne la preuve, lorsqu'il parle des hautes montagnes des *Cevennes* (11.), compoſées de ſchiſte talqueux & de granit. Ce *ſchiſte*, dit il, *ſert de baſe aux granits, qui paroiſſent l'avoir percé, pour s'élever en pics, en ſe faiſant jour au travers.* Il eſt clair que Mr. *Paſumot* veut dire, que le granit eſt inferieur au ſchiſte, & que celui-ci repoſoit anciennement ſur lui, & y repoſe encore ſur ſes racines. La phraſe: *ſervir de baſe* ne doit ſignifier autre choſe, ſi-non, que le ſchiſte environne actuellement le granit, vers la baſe, aprés qu'il l'a percé. Mais on ſent bien que cette façon de parler pourroit donner lieu à un mèſentendû, ſi ce qu'il ajoute enſuite n'otoit pas toute ambiguité. Je ne relèverois ſurement pas une telle bagatelle ou faute d'expreſſion, ſi elle ne juſtifioit pas la ſuppoſition de pareilles inadvertances légères, échappées peut-etre à la plume de Meſſieurs de *Buffon* & de *Schachmann*; & ſi quelques lecteurs moins inſtruits, ou quelques auteurs moins delicats n'en pouvoient pas tirer de fauſſes conſéquences.

§. 18. Nous avons vu (§. 14.) que par une ſuite naturelle de la dégradation des montagnes, les débris des plus anciennes ſe trouvent quelquefois nichés dans l'intérieur de

 ro-

(11.) Mémoire ſur la liaiſon des volcans d'Auvergne avec ceux du Gévaudan, du Velay &c. *Journal de Phyſique*, Septembre 1782, p. 223.

roches d'un origine plus récente : comme les déblais de granit dans les ſchiſtes, dans les roches calcaires &c. Il eſt facile de s'imaginer que quelques déblais des montagnes primitives ont pu ſe précipiter dans une vaſe maritime inférieure, ſchiſteuſe ou calcaire, s y encaiſſer & ſe durcir avec elle. Si on y trouvoit même des coquilles pétrifiées, un tel granit ſubalterne ou ſecondaire ne prouveroit rien contre ce que nous ſoutenons ſur le granit primitif. Mais il-y-a des obſervateurs, qui prétendent avoir trouvé du granit en couches bien diſtinctes, très réguliéres, interceptées de couches calcaires; & des roches de granit, qui n'ont pas été déplacées, qui n'ont pas ſouffert quelque excavation antérieure (§. 15.), appuyées contre des roches calcaires. Je n'entreprendrai pas d'examiner ſi ces obſervations ſont parfaitement verifiées ou exemtes d'illuſion, & ſi elles ne dépendent pas de quelque bévue; quoique je n'aye jamais remarqué quelque choſe de ſemblable pendant les courſes que j'ai faites en pluſieurs montagnes. Fort éloigné de nier les obſervations d'autrui, parceque je ne les ai pas fait moi meme, je ſuppoſerai plutôt, qu'elles ſoient très juſtes & hors de doute! Dans ce cas, il faut naturellement conclure, ſuivant le principe des ſuperpoſitions, que le granit au deſſus de roches ou de couches calcaires, eſt plus récent que ces roches ou ces couches qui lui ſervent de baſe. Mais cela ne prouve rien non plus contre l'ancienneté plus avancée du granit des hautes chaines de montagnes, & de celui qui, par tout ailleurs, ſert de baſe au ſchiſte, au marbre &c. La ſeule concluſion qu'on en peut tirer, eſt celle, qu'il-y-a des granits de pluſieurs formations & de differents ages; & qu'il faut admettre pluſieurs époques d'origine de ce genre de pierre, auſſi bien que de tous les autres, comme nous l'avons dit au commencement de ce mémoire. Neglige-t-on cette diſtinction, les diſputes & les contradictions purement verbales ne finiront

ja-

jamais. L'un dira que le granit eſt au deſſous, l'autre au deſſus des roches calcaires; ayant raiſon l'un & l'autre, parcequ'ils ne parlent pas de la même roche, mais de deux differentes modifications de granit, dont l'une eſt trés ancienne ou primitive, l'autre plus récente ou ſecondaire. Il ne faut donc jamais rejetter une verité prouvée par pluſieurs obſervations bien faites, à cauſe de quelques anomalies qui lui ſemblent contraires au premier coup d'oeil, mais qui ne le ſont pas du tout, lorsqu'on les examine plus attentivement. S'il-y-a des granits à gluten calcaire qui ſont efferveſcence avec les acides & ſe trouvent diſpoſés par couches; ſi certains pouddings qui reſſemblent aux granits, peuvent ſe former de ſable & de morceaux ſeparés, qui s'uniſſent moyennant de l'eau acidule ou impregnée d'air fixe, il faut convenir avec Mr. *Faujas de St. Fond* (12.) „ que la nature a diverſes reſſources & differents „ moyens pour parvenir au même but, & qu'il faut étudier les „ montagnes avec la plus grande circonſpection, afin de ne „ pas s'expoſer à de mauvaiſes conjectures ſur leur antiquité & à „ former des raiſonnemens peut-etre apparents, mais qui portent ſur de faux principes. "

Ce que je viens de dire ſur les prétendues obſervations de roche calcaire ſervant de baſe au granit, ou de granit diſtribué par couches dans l'intérieur de roches calcaires, eſt également appliquable aux aſſertions modernes, qui enſeignent qu'on a trouvé du ſchiſte ſous le granit, & de la pierre calcaire au deſſous & dans le ſchiſte (13.). Il-y-a des ſchiſtes de ſeconde, troiſieme, & qui ſait de combien de formations. Le ſchi-

(12.) Recherches ſur les volcans éteints du Vivarais & du Velay, p. 309, 310.

(13.) V. les Ouvrages de Meſſieurs *d'Arcet* & *Palaſſeau* ſur les monts Pyrenées, &c.

ſchiſte par ex. qui forme le toit des charbons foſſiles ou de la houille, n'eſt pas le même que celui des hautes montagnes, lequel Mr. *Arduini*, moi-même, & tant d'autres minéralogiſtes, ont toujours trouvé inférieur aux roches calcaires des Alpes. Or, il eſt impoſſible que le ſchiſte des Alpes, s'il ſe prolonge ou s'il continue jusqu'aux endroits, où on a trouvé du ſchiſte au deſſus des roches calcaires, ſoit tantôt au deſſous, tantôt au deſſus des mêmes couches. Il faut donc que le ſchiſte des Pyrénées, dont parlent Mrs. *d'Arcet* & *Palaſſeau*, ſoit plus jeune que celui des Alpes, & qu'un autre ſchiſte dans les Pyrénées, lequel, de l'aveu de ces auteurs, y plonge ſous les roches calcaires.

On a trouvé des couches de marbre ſalin ou ſpatheux, aſſés épaiſes dans l'intérieur du gneiſs, à une profondeur de pluſieurs toiſes, à Braunsdorf & en pluſieurs endroits de la Saxe & d'autres pays. J'en ai vu moi-même, & Mr. *Charpentier* en parle dans ſa Geographie minéralogique de la Saxe électorale. Ce gneiſs, communément plus micacé qu'argilleux (ſi j'excepte celui de Braunsdorf réelement argilleux, melé de quartz) pourroit bien être d'une naiſſance poſtérieure à celle du gneiſs & du ſchiſte ordinaire, qui contient la plupart des mines de ce pays. Ce qui le fait préſumer, c'eſt que le gneiſs ou ſchiſte micacé contient, en pluſieurs endroits, de véritables couches de pyrite, ſulfureuſe ou vitriolique, & d'autres minerais propres aux montagnes ſecondaires. Il eſt vrai qu'on y trouve auſſi des filons de mine d'argent, par ex. à Braunsdorf; mais aujourd'hui on n'ignore pas, que, même les montagnes à couches, peuvent contenir des filons, ſoit d'argent, de Cobolt, ſoit d'autre métal. On conçoit aiſément qu'une ou pluſieurs révolutions ont pu détruire une partie des montagnes gneiſſeuſes & argilleuſes, & dépoſer enſuite ſur leurs reſtes, en forme

de

de ſchiſte micacé ou argileux, les débris qu'elles leur avoient derobés au-paravant. Pendant cet evénement, ou dans l'intervalle de la deſtruction & de la depoſition ſuccedante, les courrants d'eau, des alluvions ou d'autres moyens, par lesquels une partie des montagnes calcaires deja exiſtantes ont pu ſubir de pareilles deſtructions, pouvoient amener & dépoſer des couches de marbre ſalin ſur le ſchiſte primitif, qui enſuite fut recouvert de ſes propres débris, ſous la forme de ſchiſte micacé &c.; & de cette maniere des couches de marbre ſalin peuvent exiſter au milieu d'une montagne ſchiſteuſe ou dans ſon intérieur. Outre cela, Mr. *Charpentier* avoue lui même, que le terreau qui couvre ordinairement les carrieres de marbre ſalin, ſituées entre & dans les montagnes de gneiſs & de ſchiſte en Saxe, empêche, presque par-tout, d'entrevoir clairement la veritable poſition de ces marbres. Il préſume lui même qu'ils n'y occupent que de larges ravins, filons ou anciennes fentes, des excavations naturelles, des ſinuoſités, vallons & bas fonds entre les montagnes gneiſſeuſes (14.) qui ont pu y exiſter avant que la nouvelle couverture de couches terreuſes les eût entourré. Dans cet intervalle il-y-avoit aſſès de tems; & plus d'un evênement a pu transporter, dépoſer ou cryſtalliſer le detriment des montagnes calcaires plus hautes, dans ces ſinuoſités ou excavations du gneiſs & du ſchiſte. Il eſt fort probable que les carrières de marbre ſalin qu'on exploite à l'air libre en Saxe, à coté ou ſur les pentes de montagnes ſchiſteuſes, ont cette origine; ſurtout parcequ'elles s'étendent fort peu en largeur ou ligne horizontale (15.) Mr. *Raſpe* explique la formation des marbres ſalins par la me-

(14.) Charpentier mineralog. Geographie der Churſächſiſchen Lande S. 86, 87. ꝛc.
(15.) Ibidem p. 87.

même opération qui forme les ſtalactites, c'eſt à dire que l'eau chargée de terre calcaire l'a depoſée en ſtalactiſant ou cryſtalliſant à l'aide de l'acide aerien. On pourroit dire que certaines couches de ce marbre, dans l'interieur du gneiſs ou du ſchiſte, ſe ſont formées par l'infiltration d'une telle leſſive calcaire. Ce qui eſt certain, c'eſt que ces marbres de la Saxe reſſemblent parfaitement aux Cipolins de l'Iſtrie, de la Dalmatie, & à tous les marbres ſalins de l'Italie, dont pluſieurs ſont formés en ſtalactiſant. Tous ces marbres de l'un & de l'autre pays contiennent des couches trés minces de mica. Or les obſervations de Meſſieurs *Arduini*, *Targioni-Tozzetti*, *Feſtari*, *Fortis* &c. & celles que j'ai eu occaſion de faire moi-meme, prouvent que tous ces marbres d'Italie, d'Iſtrie & de la Dalmatie repoſent ſur le ſchiſte primitive. Pourquoi douter qu'il n'en ſoit de même en Saxe, quand on eſt hors d'état de montrer le contraire, ou d'entrevoir clairement leur ſituation, à cauſe du terreau & des pierrailles qui les couvrent. Je ne prétends pas nier l'exiſtence de toute terre calcaire au moment que le ſchiſte primitif ſe formoit. Les parties intégrantes du granit même en contiennent une portion; mais que toute terre à chaux, dont les montagnes & couches de ce genre ſe trouvent compoſées aujourd'hui, eut été melée, délayée ou diſſoute dans l'eau de l'ancien ocean, lorsque le granit & le ſchiſte s'y formoient, conjointement avec les autres eſpéces de terre qui entrent dans leur compoſition, voila ce qui me paroit inconcevable; car dans ce cas, les voies ordinaires & connues de la nature n'auroient pas ſuffi pour en faire la ſeparation réguliere qui ſe manifeſte dans toutes les grandes chaines de montagnes, comme nous l'avons remarqué §. 11.

DIS-

# DISQVISITIO CHEMICA SVBSTANTIAE CVIVSDAM SALINAE, QVAM RVSSI FABRICANTVR ET AVRIFABRIS SVB NOMINE *SALARKA* VENDVNT.

Auctore

*J. G. GEORGI.*

*Conuent. exhib. d.* 23. *Mart.* 1786.

§. 1.

Iam ineunte vere anni 1781 apud aurifabrum quendam Gallum ſubſtantiam quandam ſalinam ſingularem viderat Cel. *Pallas*, eandemque pro fuſione et ferruminatione metallorum adhiberi, atque ſub nomine *Salarici* in foro venundari audiuerat. Specimen huius ſubſtantiae cum accepta relatione vir amiciſſimus et ad omnia attentus mihi tunc ſtatim communicauerat, et ad diſquirendam eius indolem incitauerat. Neque diſtuli analyſin, eo magis quod de origine huius ſalis tunc nihil, et de vſu eius tantum haec reſcire potui, quod etiam argentifabris Ruſſis, quibus *Salarka* audit, frequenti in vſu ſit pro fundendis et ferruminandis metallis, pretioque vili vendatur. Experimenta tunc et analytica et ſynthetica inſtituens, ſimilem efſeci maſſam manipulatione facili et minime diſpendioſa. Varia dein negotia et praeſertim ſpes addiſcendi proceſſum quo vtuntur Ruſſi, in fabricando illo ſale occupati, experimentorum publicationem differre ſuadebant.

§. 2. Interim accidit menſe Martio 1785, vt D. Conſiliarius collegior. *Ladygin* ex Alba Ruſſia Academiae Imperiali Scientiarum aeque ac Societati Oeconomiae Petropolitanae mitteret ſpecimina ſalis albiſſimi, per fuſionem conſolidati, de quo nunciabat, a ſe inuentam methodum huiusmodi ſalem parandi e maſſis ſalinis, ſaponarior. in officinis ab exſtillante, laeſis ahenis et cum cineribus coaleſcente lixiuio ortis, quas Ruſſi *Wywarka* appellant. Ab Academia tunc pariter, atque Societate Oeconomica commiſſa mihi fuit Ladyginiani ſalis disquiſitio, qua didici, ſalem illum nihil eſſe, niſi *Salaricum* probe depuratum.

Quandoquidem vero ex allegatis relationibus ſimul patet: Salaricum in Ruſſia meridionali et orientali non magis quam in Europa innotuiſſe, et quum et itineratores noſtri, et exteri auctores de eo plane ſileant; vtile fore reor, ſi experimenta et obſeruationes meas circa hunc ſalem in fuſoria arte admodum vtilem publici iuris fecero. Experimenta quidem prius inſtitui, antequam de origine huius ſalis certior eſſem factus; malo autem, quae de praeparatione eius poſtea edidici, prius exponere, quum ſic experimenta aliqua ſuperflua omittere et breuior eſſe poſſum.

§. 3. Nomen Ruſſis vſitatum (*Salaricum* vel *Salarka*) videtur corruptione vocis *Sal Alcali* ortum debere; etenim aurifabri, quibus ruſſicus ille ſal nondum innotuit, pro fuſione limaturae metallorum *Sal Alcali* depuratum adhibere ſolent. *Salaricum*, vt hac appellatione interim vtar, quod vulgo proſtat, quodque teſtimonio ſeniorum aurifabrorum iam retro a triginta inde annis in vſu eſſe coepit, quantum ab amicis Moſcuae degentibus reſcire potui, a ruſticis in quibusdam circa Moſcuam ſitis pagis viuentibus praeparatur. Sunt autem hi ruſti-

ruſtici, omnes quidem inter ſe cognati, ſaponis confectores et ex alienis ſaponariis officinis, quibus ahena ferrea non ſatis ſolida in vſu ſunt, coemunt exſtillatum illud et concretum alcali ſale mixtum, quod maſſis aliquod pondo ruſſica aequantibus e cineribus foci eruitur. Modum praeparandi ſalaricum tanquam arcanum ſibi ſeruant, ideoque ſatis magnam eius quantitatem, pondus quadraginta librarum ſingulum pretio duo vel ſesquitrium Rublonum emporiis vendunt.

§. 4. *Salaricum* Moscuenſe affertur forma placentarum disciformium, fuſci coloris, e ſtratis plurimis, conglutinatis compoſitarum: Suntque hae placentae puritate non omnino aequales, ſed textura lamellari conueniunt omnes. Aëri etiam humido expoſitum ſalaricum foraneum non deliqueſcit.

## A. Experimenta analytica.

### Experimentum I.

§. 5. Salaricum Moscua allatum odorem habet nauſeoſum, putride vrinoſum; guſtu linguam afficit ſalino et lixivioſo. Prunis inſperſum parum decrepitat. Inſtillatum Oleum Vitrioli acidi Salis vaporem illico ex illo euoluit. Soluitur aqua facile et in filtro ſordes nigras relinquit tanta quantitate, vt decem vnciae ſalarici ſesquitres, imo ſesquiquatuor drachmas filtro amittant.

Hac ſordes igne vſtulatae fumant, et relinquunt puluerem cinereum, qui lotione in arenulas vitrescibiles et cineres calcareos ſecedit. Calcareae ſordes, arena et combuſtibilis materia aequale circiter pondus efficiunt. Interdum minus arenae et aliquantulum particularum martialium in reſiduo obſeruaui.

## Experimentum 2.

§. 6. Solutio (Exp. 1.) Salarici filtrata intenſe flaveſcens 1. cum acidis et chartis coloratis partem alcalinam liberam prodit.

2. Acido vitrioli et
3. Solutione ſalis alcali fixi non praecipitatur.
4. Mercurium, acido nitri ſolutum praecipitat et
5. Sachari ſaturni ſolutionem dealbat.
6. Puluere gallarum addito primum viret, dein nigreſcit.
7. Evaporata obtulit cryſtallos exiguas cubicas et tabellares, quae vsque ad plenariam exſiccationem eaedem fuerunt, alcalino ſuperſtito inquinatae.
8. Quinque vnciae Salarici ſolutae drachmas duas et dimidiam acidi vitriolici ad plenam ſaturationem requirunt.

## Experimentum 3.

§. 7. Decem vnciae Salarici ex retorta ad incandeſcentiam vsque deſtillati, praebuerunt primo phlegma flaueſcenti-albidum ad ſeptem drachmas, quod odore et ad reagentia alcali volatilis veſtigium prodidit. Collum retortae nigreſcebat ab adhaereſcente oleo empireumatico. Reſiduum nigricans aequabat octo vncias et 7 drachmas, deditque ſolutione, filtro et inſpiſſatione tractatum ſalem culinarem cum ſuperabundante alcali fixo.

## Experimentum 4.

§. 8. Quae Celeb. *Baumé* (chemiae experimentalis Vol. II. p. 156. verſ. german.) de productione Boracis per tractationem cum adipe prodidit, ſuſpicionem fecerunt, poſſe hic *Salem ſedatiuum* latere; deſtillaui ergo e retorta vitrea quin-

quinque vncias Salarici cum ſesquivncia olei Vitrioli; verum nihil obtinui.

### Experimentum 5.

Salaricum Moscuenſe ad decem vncias crucibulo ignito ingeſtum, fluxit facile et tenuiſſime. Exemptis per interualla ſpeciminibus apparuit ignitione primum fieri cinereum; elapſa vero ſesquihora caeruleſcenti-margaritaceo colore fuit; tumque effuſum praeſtitit maſſam denſam, quaſi vitream, ſeptem et dimidiae vnciarum pondere, quae in aëre non deliquescebat.

Fuſione depuratum facile aqua ſoluitur, ſolutione limpida, quae tamen in filtro vltra drachmam puluiſculi calcarei cinerei relinquit et euaporata praeſtat ſalem flaueſcentem, ſale muriatico et ſuperabendante alcali compoſitum. Aurifabri ſic vulgo per ſolam fuſionem Salaricum depurare ſolent.

## B. Experimenta ſynthetica.

### Experimentum 6.

§. 10. Odor Salarici vrinoſus (Exper. I.) & Alcali volatile, quod Exper. 3. prodiderat, vero ſimile reddebant illud a fabricatoribus cum vrina tractari. Itaque octo libris Salis muriatici infudi ſexaginta quatuor libras vrinae. Inſpisſatum inde magma ſalinum, bruneo fuit colore, penitusque exſiccatum nigreſcebat, pondere eovsque imminuto, vt modo ſeptem cum dimidia librae remanerent.

Cum hocce Sale ſequentia tentamina inſtitui:

1. Prunis inieci, vbi parum decrepitavit;
2. Cum alcali ſixo contritum Sal alcali volatile emiſit;

3. A-

3. Aqua diffuſum, ſolutionem praebuit flavam, quae in filtro lutum nigrum depoſuit, maximam partem tartarum vrinae;
4. Liquor filtro purificatus neutrae fuit indolis;
5. Mercurium ille acido nitri ſolutum albo praecipitauit colore;
6. Sal euaporatione inde concretus erat flauus, facileque igne fundebatur, maſſam ſiſtens quaſi vitream.

Viſum mihi ſalem muriaticum partem acidi proprii hac operatione amiſiſſe, in cuius locum acidum phoſphoricum vrinae ſuſceptum fuit.

## Experimentum 7.

Sal alcali vegetabile et Sal muriaticus vrina tractatus, aequali pondere vnius librae, per quindecim horas cum libra ſemis ſeui ouili et aqua coquebantur, et euaporatae loco aquae additum fuit lixivium debile e cineribus paratum.

Lixiuium illud refrigeratione ab adipe ſeparatum filtratione lutum ſeparauit vireſcens, quod aqua elutum, ſemunciae pondus edidit. Igne calcinatum vrebatur, dimidium ponderis amittens. E reſiduo terreo rubicundo magnete particulas aliquot ferreas ſelegi, reliquus puluiſculus in acidis ferueſcebat cum plenario fere ſolutione.

Lixiuium flauum:

1. Erat indolis alcalinae;
2. Cum ſolutione ſalis alcali fuſcum euaſit;
3. Mercurium acido nitri ſolutum praecipitem egit primum nigreſcente, at deinde, dum eius maior portio adderetur, fuluo colore.

4. Eua-

4. Euaporatione obtinetur inde ſal flauus, cui
5. Inſtillatum oleum vitrioli vaporem acidi muriatici extorſit.
6. Hic Sal facile fuſibilis eſt, fuſusque praebet maſſam bruneam, foetidam, isque
7. foetor hepatis ſulphuris aemulus per acida affuſa exaltatur.
8. Aqua ſoluitur promptiſſime et lutum putrilaginoſi odoris in filtro relinquit.
9. Iterata inſpiſſatione, ſolutione et filtratione, tandem emerſit ſolutio limpidiſſima, omni odore vacua.

Baſis huius ſalis eſt ſal muriaticus, cui acceſſerant portiunculae natri phoſphorati, aliquantum ſuperabundantis alcali vegetabilis et ſordes pinguinoſae plurimae, quibus odor hepatis ſulphuris tribui poſſe videtur. A Salarici natura omnino erat diuerſum.

## Experimentum 8.

Vulgare lixiuium ſaponariorum quum non eſſet in promptu, ſolui triginta vncias ſalis alcali depurati; lixiuium ope calcis viuae cauſticum reddidi, in eoque coxi vncias quindecim ſeui ouini, ad ſaponificationem vsque, horaque praeterlapſa lixiuium cum vnciis quindecim ſalis muriatici iterum coxi.

Lixiuium flauum ſub ſapone collectum in filtro reliquit lutum vireſcens, quod edulcoratum vnciali fuit pondere. Calcinatum vrebatur, vt tantum ſemuncia terrae calcareae ſupereſſet.

 Idem

Idem lixiuium ad ſiccitatem euaporatum vncias triginta ſex ſalis flaueſcentis dedit. Et huius ſolutio omnino, vt ſolutio ſalarici crudi (Exper. 2.), ſe geſſit.

Fluxit is ſal facillime in igne et maſſam effecit asſpectu vitream, brunei coloris, caeruleſcenti colore ſuperinductam, cuius ſolutio etiam hepatis ſulphuris odorem edidit. Sal e ſolutione euaporata paratus, Salarico depurato erat ſimillimus, praeterquam quod plus alcali expliciti habuit. Attamen non modo non deliqueſcebat, ſed potius ſoli expoſitus per ſuperficiem fatiſcebat in puluiſculum.

§. 13. Tentamina hactenus enarrata inſtituebam antequam modum Salaricum praeparandi penitius addidiceram. Sequentia duo pericula ideo feci, vt de veracitate relationum mihi communicatarum certior fierem.

## Experimentum 9.

Miſit amicus maſſam Salis e lixiuio, quod in coctrinis ſaponariorum in cineres exſtillat, concreti et cuius ſupra (§. 3.) ſub titulo *Wywarka* mentionem feci. Moles erat nigra, dura, carbonibus mixta, magis foetida, quam Salaricum Moſcuenſe (Exp. I.).

Quando aqua ſolui, dimidium ponderis ſordes admixtae effecere. Hae ſordes vſtae dimidium itidem amittunt, reſiduum autem cinereum calcareae indolis eſt.

Liquor filtro traiectus, inſpiſſatione perfectum Salaricum praebuit.

Expe-

## Experimentum 10.

§. 14. Exper. 8vo lixiuium filtro ſeparatum fuit. Vt vero productum Salarico vulgari ſimilius obtinerem, libras binas ſeui ouilli cum lixiuio cinerum coxi, quod teſtis oſtreorum calcinatis cauſticum reddideram; deinde cum adeps indolem ſaponis induere coepit, addidi tres libras ſalis muriatici impuri, quod ſaliendis Huſonibus inſeruierat, quale ſaponariis noſtris, propter vile pretium et pinguinoſitatem, in vſu eſſe ſolet.

Lixiuium, cui ſapo innatabat, lutum depoſuit fuſceſcens. Agitatione lutum miſcui cum lixiuio totumque, vt erat, impurum ſucceſſiue infudi ollae figulinae, quam fornaci vulgari ruſſico commiſi. Quoties exſiccaretur pars infuſa lixiuii, affudi nouam eiusdem portionem, donec omne ad ſiccitatem redactum eſſet. Fracta tunc olla obtinui placentam ſalinam ſtratificatam et colore ac adſpectu Salarico Moscuenſi ſimillimam, minus nauſeoſi tamen odoris.

Huius maſſae ſolutio fuſione, vt et cum reagentibus et in reliquis omnino ſe habuit, vt ſalaricum vulgare: minus tamen alcalina fuit, licet hoc nihil de vtilitate eius demat. Adeoque videbar mihi ſatis bene edoctus eſſe modum facilem et minime diſpenſioſum parandi Salaricum, vel ſimillimam illi materiam ita, vt ſi euaporatio in officinis ſaponariis igne ahenorum fieri poſſet, fere absque expenſis ex inutili lixiuio prodeat. Scilicet lixiuium pro ſapone adhibitum maiori proportione ſalis muriatici mixtum fuit; nihil requiritur, quam vt totum euaporatione ſiccetur. Si ſalis additi quantitas minor acceſſerit, addenda erit maior piſcium vel carnis ad requiſitam proportionem.

## C. Experimenta circa vſum Salarici inſtituta.

### Experimentum 11.

§. 15. Aurum et Argentum tractantes, limaturam et fragmenta metallorum cum aequali, vel et duplo pondere Salarici colliquare ſolent. Obſeruarunt, quod ſcorificationem ſordium promte operetur; quod fuſa metalla inhaerente ſua pinguedine et tecti inſtar a calcinatione praetereut; quodque particulas metallicas, propter tenuem maſſae fluxum, facile colligit et colliquat.

Dein ſordes officinarum eodem Salarico in regulum cogunt, cui operationi apprime vtile illud inuenerant.

Tandem vt Boracis carioris minorem quantitatem ferruminandis metallis impendant, Salaricum ſolent calcinatione diuturna purum et album reddere, eiusque duplum cum ſingulis partibus Boracis vſtulatae miſcent; mixtus enim hic Sal aeque efficax eſt ac Borax pura.

Accedit vtilitati, quod ſcoriae a fuſione metallorum reliquae iterum loco recentis Salarici ad nouam fuſionem adhiberi poſſunt, donec penitus conſumantur.

### Experimentum 12.

Vnciae duae limaturae aurichalci cum ferri limatura mixtae, vt vulgo in officinis colliguntur, cum aequali parte Salarici liquatae ſeſcunciam et drachmam aurichalci puri dederunt.

Aliae duae vnciae limaturae aurichalci cum vnica vncia Salarici fuſionem aeque perfectam ſubierunt.

Quatuor

Quatuor vnciae rafurae cupri cum duabus vnciis Salarici dederunt vncias tres et ſeptem drachmas cupri puri.

Limaturae aurichalci impurae vncia, cum ſemuncia ſalis fuſibilis cum vrina parati (Exp. 7.) drachmas quinque cum dimidia puri aurichalci praebuit.

Vncia limaturae aurichalci impurae, cum anatica quantitate Salis fuſibilis ſaponariorum (Exp. 8.), crucibulo commiſſa, drachmas ſex et dimidiam metalli puri edidit.

Vncia limaturae ſimilis cum ſemunia alcali depurati fuſa, tantum quinque drachmas puri reguli dedit.

Vncia eiusdem limaturae cum vncia Salarici noſtri (Exp. 10.) dedit ſex-drachmas et dimidiam aurichalci.

Vncia limaturae ſimilis cum vncia ſcoriarum Salarici Moſcuenſis a prioribus fuſionibus relictarum, ſex pariter cum dimidia drachmas dedit. Scoriae autem nigriores emerſerunt. Simili officio pares fuere ſcoriae Salarici a me parati (Exp. 10.)

## Experimentum 13.

§. 17. Scorias collectas ex fuſionibus cum Salarico Moſcuenſi inſtitutis aqua ſolui curaui. Transcolata ſolutio in filtro reliquit lutum foetidum. Liquor limpidus euaporatione dedit ſalem flauum, puriorem, minusque pinguedinoſum, quam ſalaricum crudum, cui alias erat ſimillimus. Pari depuratione Scoriae ſalarici a me parati (Exp. 10.) ſalem puriorem dederunt, qui aeque efficax fuit ad vlteriorem vſum ac crudum Salaricum.

## Experimentum 14.

§. 18. Experiri volui, annon Salaricum loco fluxus in mineris cupri explorandis cum fructu adhiberi poſſet; ideoque mineram cupri diuitem quartſoſam vſtulatam in puluerem redegi.

Huius minerae ſemunciam cum ſex drachmis fluoris nigri, duabus pulueris vitri, et drachma boracis, drachmaque colophonii, crucibulo commiſi. Prodiit regulus trium drachmarum pondere, ex eoque denuo cum boracis et tartari crudi anatica portione, regulinum metallum rubrum, fragile, pondere ſesquidrachmae; e quo per plumbum depurato cupri puri triginta quinque grana emerſerunt.

## Experimentum 15.

Minerae cupri eiusdem vſtulatae ſemunciam cum integra Salarici moſcuenſis vncia, drachmis duabus colophonii et drachma pulueris carbonum, crucibulo ingeſſi; regulum inde obtinui rubicundum didrachmalem, qui fuſus iterum cum ſalarici ſemuncia ſesquidrachmali pondere fuit. Puri cupri inde prodiit pondus triginta quinque granorum.

Idem experimentum, cum Salarico a me parato, dedit cupri puri triginta nouem grana cum dimidio. Vt plura in cupro inſtituta tentamina ſilentio tranſeam.

§. 21. Etiam circa ferri mineras varia cum Salarico Moscuenſi et a me parato tentamina inſtitui; quae vero omnia male ceſſerunt. Neque ad combinandum cum ferro ſtannum Salarico virtus fuit.

§. 22. Ex iſtis omnibus videor concludere mihi certo poſſe:

1. Ba-

1. Baſin Salarici moſcuenſis eſſe ſalem muriaticum.

In decem eius vnciis, ſaturatione cum oleo vitrioli in calculo adhibita (ſecundum Goetting. Chemiſch Taſchenbuch für 1783.) inſunt drachmae quinque alcali plantarum non ſaturati. In eodem quanto circiter drachma pinguinoſitatis, tantundem arenae vitreſcibilis et eadem quantitas cinerum calcareorum, cum indicio ferri, continetur (Exp. 2.).

2. Eſſe perquam vtilem ſubſtantiam, pro iis, qui metallis elaborandis, aut minerarum docimaſiae operam navant; praeſertim, quum vili pretio proſtet, et ad plenariam vsque conſumtionem iterum iterumque eidem ſcopo inſeruire poſſit (§. 15.).
3. Poſſe Salaricum vbique et ab omnibus parari; nihil enim aliud eſt, quam ad ſiccitatem inſpiſſatum lixiuium, quod a coctura ſaponis ſuperſtes manet (§. 14.).
4. Salaricum crudum aeque, ac fuſione metallorum iam ſcorificatum poſſe continuata fuſione in formam albi ſalis calcinari, multo vero perfectius depurari praeuia ſolutione in aqua, inſpiſſatione et dein diuturna inſtituta fuſione.

Quando haecce ſubſtantia ſalina magis innotuerit, vlteriores eius vſus forte inuenientur; forſan vitriariis vtilis, vel ad parandum alcali minerale purum apta inuenietur; et quae ſunt reliqua. Verum ſi indicato tantum officio interim ſuffecerit, inſigne mihi videtur pro iis, qui metalla tractant, adiumentum, et ad minuendam alcali vegetabilis, adeoque ſylvarum conſumtionem conducet.

NOVA

# NOVA SPECIES MENTHAE DESCRIPTA.

Auctore
*I. LEPECHIN.*

*Conuent. exhib. d.* 7 *Sept.* 1786.

Pulchra haec Mentae ſpecies, plantis aſiaticis annumeranda, prouenit circa Lacum Baical et in tractibus Dauuriae; eam circa Nertſchinſk quoque obſeruatam e litteris conſtat. Primus clariſſim: Patrin, diligentiſſimus botanophilus, iuris-conſultus et Academiae noſtrae correſpondens, in excurſionibus ſuis ſibiricis plantam hanc legit et ſemina matura communicauit; e quibus enatae plantae denominationem ſpecificam, vt debitas perſoluam grates, ab ipſius cognomine mutuari et Mentham Patrinii vocare placet. Quae hoc modo definiri poteſt.

Patrinii, Lepech. *Mentha floribus ſpicatis, ſpicis reclinatis ſecundis, ex dupla ſerie verticillorum derſorum conflatis; foliis lanceolatis, ſerratis, petiolatis, caule brachiato.*

## Deſcriptio.

RADIX annua; *caudex* breuis calami anſerini craſſitie, mox diuiſus in radiculas flexuoſas, deſcendentes, variae ſubdiuiſas, non raro decem vncias longas, fibrillisque ſetaceis atque capillaribus ramoſiſſimis vndique implexas, cortice tenui extus

extus fuſco, intus pallide flauo obductas, atque parenchymate lignoſo; ſat duro, flaueſcente inſtructas, ſaporis atque odoris expertes.

CAVLIS erectus, geniculatus, geniculis annularibus, e radice exeuns rotundatus, mox a geniculo tetragonus, glaber, lateribus canaliculatis, angulis obtuſis, in ſolo terrae enaſcens biulnaris, ſummitate florigera.

FOLIA caulina modo ad genicula reperiunda, oppoſita, petiolata, lanceolata, neruoſo ſubrugoſa, patentia, tres vncias et vltra longa, ſupra ſaturate, ſubtus dilute viridia, tomento tenui punctis que cauis adſperſa; margine ſerrato. *Petioli* foliis breuiores, hinc connexi inde plani, ſulcati, glabri.

*Ex geniculis*, atque adeo foliorum alis, exeunt *rami* alternatim oppoſiti, erecti, cauli, ratione ſtructarae atque foliorum ſitus, conformes. Ex horum geniculis protruduntur rami florigeri, exacte ramos, niſi omnia in illis ſint minora atque teneriora, referentes.

FLORES ſunt ſpicati; ſpicae ex alis exeuntes, earum, quae ſummitatem caulis atque ramorum obſident, ſunt ternae, media longiore, ad duas vncias et vltra excurrente. Ceterum omnes ſub angulo obtuſiſſimo recuruae, ſecundae; verticillis denſis, duplici ſerie diſpoſitis, conſtantes. *Bracteae* ex auerſa plaga vnicuique verticillo ſubnexae, rotundato-cordatae, ſeſſiles, reticulato-venoſae, ciliatae, acuminatae, ſubimbricatae, verticillis fere longiores.

FLOSCVLI pedunculati, *pedicelli* ſubdiuiſi, floribus breuiores, quorum vnusquisque ſurculus, proprium ſibi ſuſtinet florem.

CALYX monophyllus, perſiſtens, tubulatus, turbinatus, erectus, decemſtriatus, quinquefidus, laciniis ſubulatis, acutis, aequalibus, erectis, piloſo-ciliatis.

COROLLA monopetala, decidua. *Tubus* Cylindricus, pallidus, ſuperne latior, calyce longior. *Limbus* quadrifidus, dilute-violaceus, extus piloſus, laciniis ouatis, obtuſis, margine reuoluto, ſuprema paullo maiore, erecta.

STAMINA, *filamenta* 4. ſetacea, corollae concolora, longitudine laciniarum corollae, quorum duo altiora. *Anth.* ouatae, incumbentes, didymae.

PISTILLVM, *germen* viride, profunde quadrifidum, baſi perichaetio cinctum, glabrum; *Styl.* filiformis, longitudine ſtaminum altiorum, erectus. *Stigma* bifidum, patens, acutum.

Odor plantae fragrans, ſpirituoſus, ſubtilior magisque gratus quam menthae criſpae; ſapor calidus, aromaticus; *Maſticata* linguam ac fauces calefacit; hinc in noſtros hortos translata, vbi lete vegetat et faſcilime propagatur, non ſpernendum in rebus aeconomicis atque medicatis promittit vſum.

---

(*a.*) Flores, per lentem aucti.

(*b.*) Calyx, magnitudine naturali.

(*c.*) Calyx, per lentem adauctus.

(*d.*) Bractea, magnitudine naturali.

(*e.*) Semen, magnitudine naturali.

(*f.*) Semen, per lentem auctum.

LINA

# LINA HYBRIDA.

Auctore.

*I. T. KOELREVTER.*

*Conuent. exhib. d.* 13 *Nou.* 1786.

EXP. I.

Linum *perenne.* ♀.
Linum *auſtriacum.* ♂.
Anno 1769. d. 14 Iun. et ſeq. Flor. 60.
Vid. Exp. inuerſ. VIII.

## Deſcriptio.

Plantae anno 1770 inde prognatae plures. Floruerunt omnes ſub Maii finem anno 1771, mediae inter vtrumque parentem ſimilitudinis ac formae, nec omnino ſteriles: capſulae enim earum non raro vnum alterumue ſemen foecundum ſponte dabant. Magnitudine ac caulium luxuria, quorum primarii non raro 50 — 60 erant, vel ♀ longe ſuperabant; ceterum per plures annos vegetae, ac ſtolonum copia multiplicabiles.

EXP. II.

Linum *vſitatiſſ.* β. ♀.
Linum *narbonenſe.* ♂.
Anno 1772. d. 29 Iun. et ſeq. Flor. 10.
Vid. Exp. inuerſ. III.

## Deſcriptio.

Plantae, anno 1773. inde prognatae quatuor, eodemque etiam florentes, mediae inter ♀ et ♂ ſimilitudinis, ac ſatis foecundae.

EXP. III.

Linum *narbonenſe*. ♀.
Linum *vſitatiſſ*. β. ♂.
Anno 1772. d. 29 Iun. Flor. 4.
Vid. Exp. inuerſ. II.

## Deſcriptio.

Plantae, iis Exp. inuerſ. II. ſimillimae.

EXP. IV.

Linum *vſitatiſſ*. ζ. afr. ♀.
Linum *narbonenſe*. ♂.
Anno 1772. d. 10 Iul. Flor. 8.

## Deſcriptio.

Plantae, anno 1773. inde productae 2. ab iis Exp. II. non multum abludentes.

EXP. V.

Linum *vſitatiſſ*. β. ♀.
Linum *vſitatiſſ*. ζ. afr. ♂.
Anno 1770. d. 25 Iun. Flor. 9.

## Deſcriptio.

Plantae anno ſequenti inde prognatae plures, mediae inter vtramque ♀. et ♂ ſimilitudinis, ac in ſummo gradu foecundae.

cundae. Africanum ζ itaque pro mera ſatiui varietate maiore recte habetur.

EXP. VI.

Linum *perenne*. ♀.
Linum *auſtriae*. ♂.
Sem. anno 1771. ſponte nat.

## Deſcriptio.

Plantae inde procreatae ſunt plures, a priori ipſarum ſtatu hybrido plus minusue aberrantes.

EXP. VII.

Linum *vſitatiſſ*. ζ. afr. ♀.
Linum *narbonenſe*. ♂.
Sem. Anno 1773. ſponte nata.

## Deſcriptio.

Plantae inde prognatae a priori ipſarum ſtatu hybrido haud multum abludentes.

## Copulationes Linorum fruſtra huc vsque tentatae.

EXP. VIII.

Linum *auſtriac*. ♀.
Linum *perenne*. ♂.
Anno 1769. d. 8. Iul. et ſeq. Flor. 55.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.
Vid. Exp. inuerſ. I.

EXP. IX.

Linum *perenne.* ♀.
Linum *vſitatiſſ.* β. ♂.
Anno 1769. d. 4. et 5. Iul. Flor. 37.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. X.

EXP. X.

Linum *vſitatiſſ.* β. ♀.
Linum *perenne.* ♂.
Anno 1770. d. 15 et 27. Iun. Flor. 7.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. IX.

EXP. XI.

Linum *perenne.* ♀.
Linum *tenuifol.* ♂.
Anno 1770. d. 18. Iun. et ſeq. Flor. 16.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XII.

EXP. XII.

Linum *tenuifol.* ♀.
Linum *perenne.* ♂.
Anno 1770. d. 18. Iun. Flor. 4.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XI.

EXP. XIII.

Linum *perenne.* ♀.
Linum *narbon.* ♂.

Anno 1772. d. 21. Iun. Flor. 6.
Conceptio nulla.

EXP. XIV.

Linum *perenne.* ♀.
Linum *maritim.* ♂.
Anno 1770. d. 27. Iul. Flor. 8.
Conceptio nulla.

EXP. XV.

Linum *perenne.* ♀.
Linum *virgin.* ♂.
Anno 1770. d. 27. Iul. Flor. 3.
Item Anno 1772. d. 31. Iul. Flor. 9.
Conceptio nulla.

EXP. XVI.

Linum *narbon.* ♀.
Linum *virgin.* ♂.
Anno 1772. d. 29. Iun. Flor. 2.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XVII.

EXP. XVII.

Linum *virgin.* ♀.
Linum *narbon.* ♂.
Anno 1772. d. 3. Iul. Flor. 1.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XVI.

EXP. XVIII.

Linum *tenuifol.* ♀.

Linum *vſitatiſſ.* β. ♂.

Anno 1770. d. 28. Iun. Flor. 6.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. XIX.

EXP. XIX.

Linum *vſitatiſſ.* β. ♀.

Linum *tenuifol.* ♂.

Anno 1770. d. 23. Iun. et ſeq. Flor. 8.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. XVIII.

EXP. XX.

Linum *tenuifol.* ♀.

Linum *virgin.* ♂.

Anno 1770. d. 18. Iul. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. XXI.

Linum *auſtriae.* ♀.

Linum *vſitatiſſ.* β. ♂.

Anno 1769. d. 9. Iul. et ſeq. Flor. 23.

Conceptio nulla.

EXP. XXII.

Linum *vſitatiſſ.* ♀.

Linum *auſtriac.* ♂.

Anno 1770. d. 16. Iul. et ſeq. Flor. 14.

Conceptio nulla.

EXP. XXIII.

Linum *auſtriac.* ♀.

Linum *narbon.* ♂.

Anno 1772. d. 19. Iun. et ſeq. Flor. 18.

Conceptio nulla.

EXP. XXIV.

Linum *auſtriac.* ♀.

Linum *virgin.* ♂.

Anno 1772. d. 28. Iun. et ſeq. Flor. 11.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. imerſ. XXV.

EXP. XXV.

Linum *virgin.* ♀.

Linum *auſtriac.* ♂.

Anno 1770. d. 18. Iul. Flor. 4.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. XXIV.

EXP. XXVI.

Linum *vſitatiſſ.* ζ. ♀.

Linum *maritim.* ♂.

Anno 1770. d. 22. Iul. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. XXVII.

Linum *vſitatiſſ.* β. ♀.

Linum *virgin.* ♂.

Anno 1770. d. 12. Iul. et ſeq. Flor. 10.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerſ. XXVIII.

EXP. XXVIII.

Linum *virgin.* ♀.
Linum *vſitatiſſ.* β. ♂.
Anno 1770. d. 12. Iul. Flor. 2.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. XXVII.

*Nota.* Caſtrationis opus in hoc genere difficillimum, nec niſi ſummo mane peragendum.

PISCIVM

# PISCIVM
## NOVAE SPECIES DESCRIPTAE;

Auctore

*P. S. PALLAS.*

*Conuent. exhib. d.* 15. *Mart.* 1787.

Piſces Faunae Roſſicae, quam totam edere, dum alia negotia vltimam operi manum admouere impediunt, non propinqua ſpes eſt, interim nouos deſcribere aggredior, ne diutius lateant ſpecies noſtris regionibus peculiares. Seriem hic inceptam ſubinde continuaturus ordinem ſeruabo nullum, niſi quod ſpecies collectim proponam quae vnius generis ſunt. Initium faciat:

### I.
### Pleuronectes ſtellatus.

*Tab. IX. Fig.* 1.

Frequens circa oſtia riuulorum et fluuiorum ex inſulis Curilis in orientalem Oceanum profluentium occurrit, vnde mihi ſpecimina ſiccata, cum adnexo nomine Curilico *Tantikù*, adlata ſunt. Erant ſeſquipedalibus minora, quam ſolitam ſtaturam eſſe autumo. In manuſcriptis oculatiſſimi *Stelleri* ichthyologicis nullam huius Pleuronectis mentionem inuenio, ne-

 que

que apud *Kraſcheninikoſium* indicatur; vnde vero ſimile eſt circa Kamtſchatcam non dari.

*Magnitudo* et *forma* fere Plateſſae, nempe ſubrhomboideus, capite caudaque productioribus et oblongior Pleuronecte maximo.

*Os*, vt in congeneribus, oblique ſciſſum, maxilla inferiore longiore, vtraque dentibus lineari-acutiuſculis, antice maioribus, verſus angulos minimis pectinata.

*Oculi* a latere ſiniſtro fuſco. *Caput* ab eodem latere *jugo* ab interſtitio orbitarum retrorſum arcuato ſubcarinatum, totumque *tuberculis* orbiculatis, planis, muricatis, maxime circa carinam et verſus oculos confertiſſime obſitum, in operculo rarioribus. A latere *albo* caput prope pinnam dorſalem obtuſius carinatum: et ad carinam creberrimis, rarioribus per margines opercularium laminarum tuberculis muricatum, medio diſco planum, laeue. *Opercula* branchiarum poſtice angulo acuta. *Membr. branchioſtega* anguſtiſſima, radiis 3. longiſſimis, planis.

*Corpus* ouatum, in caudam productum, carina magis arcuata. *Linea* lateralis bilineata, dorſo propior, a capite arcuata, dein recta verſus caudam, inermis. *Tubercula* muricata vtrinque ſecundum lineam ſerie digeſta, confertoque ad vtrumque corporis marginem ordine pinnas vtrinque ſtipantia, totidem numero quot pinnarum radii; per reliquam laterum ſuperficiem ſpiſſa, maiora infra lineam lateralem, ſupra eam verſus dorſum ſenſim minora; crebriora a latere fuſco et circa medium vtriusque lateris, magis crebra inter pinnas pectoralem et ventriculum; creberrima ſed minora per totam caudam.

Pinna

*Pinna dorſi* radiorum 56. ad oculum incipiens, a cauda remotior, pone medium corporis latiſſima, vnde forma piſcis ſubrhombea. In quibusdam ſpeciminibus anterius puncta aliquot muricata per ipſam pinnam ſparſa.

*Pinna ani* vix magis, quam dorſalis verſus caudam extenſa, radiorum 37. Haec, aeque ac dorſalis, gryſeo-pallida, faſciis transuerſis fuſcis interſtincta.

*Pinna pectoralis* rad. 12. baſi tuberculis quatuor muricatis obſeſſa; *Ventrales* radior. 6. angulus gularis ante p. ventr. totus areis confertis muricatis aſperatus.

*Cauda* magna, aequalis, nigro longitudinaliter ſtriata, tuberculis muricatis per ipſam baſin pinnae ſparſis, ſenſim minoribus; radiorum 18.

*Longitudo* piſcis ſiccati tota 1′. 3″. 10‴. menſurae pariſinae; capitis ad mucronem operculorum 4″. 4‴. A ſummo ore ad p. dorſalis initium 1″. 3‴. ad initium p. ani 6″. 2‴. longitudo p. caudae 2″. 10‴. latitudo ſumma corporis ſine pinnis 7″. 1‴. longitudo pin. pectoralium 2″. ventralium 1″. 5‴.

*Tubercula* omnia centro glabrata, hinc radiatim muricata, extimo ſpinulis longioribus ſubradiantia.

## II.
## Callionymus baïcalenſis.
*Tab. IX. Fig. 2. 3.*

Piſcis huius apprime memorabilis mentionem feci in *Itinerarii Vol. III. p.* 290, et deſcriptionem ſuccinctam ſine

 icone

icone propoſui in *appendice* eiusd. *vol. p.* 707. Meretur autem vt icone quoque illuſtretur et accuratiore deſcriptione innoteſcat.

Accolae Lacus Baïcal perhibent: hunc piſcem tantum paucis ante 70$^{mum}$ huius ſaeculi annis apud eos innotuiſſe, forſitan quia vſus eorum prius negligebatur. Sunt enim neque homini eſculenti, neque a Loris et Coruis in littora egeſti deſiderantur, propter pinguedinis forte oleoſae abundantiam, qua toti ſcatent, et poſt mortem cito flacceſcunt, imo quaſi diffluunt. Eandem vero nunc excoquere et Sinis vendere didcerunt noſtri, et quandocunque magna horum piſcium copia tempeſtate egeritur, ahenis excoquunt in oleum balaenaceo ſubſimile, vt ſola fere oſſicula piſciculorum ſuperſint.

Mirum vero in hac ſpeſcie, quod nunquam in retia piſcatorum incidat viua, licet tempeſtatibus a ſeptentrionali littore lacum agitantibus, gregatim mortui ſaepe enatent, tanta quibusdam annis copia, vt magna ſpatia ſuperficiei lacus tegant, et in littus meridionale aceruatim egerantur. Veroſimile itaque eſt eos tantum in abyſſo profundiſſimi lacus verſari, eademque via vel caſu huc perlatos fuiſſe, qua Phocae, et Salmo Omül, ambo oceani incolae, in mediterraneum huncce lacum peruenere. Ruſſi, eadem opinione imbuti, piſciculo huic propterea nomen indiderunt Голомянка (*Golomjaenka*). Anomalia piſcis etiam e deſcriptione apparebit; nulli tamen generi propiore affinitate iungitur quam Callionymis. Regula *Gouani* qua pinnae ventrales piſcibus macrocephalis in iugulo, microcephalis et leptorhynchis plane nullas eſſe contendit (*Hiſtor. piſc.* p. 55.) in *Callionymo* noſtro *baïcalenſi* apprime claudicat. Neque vero omnino vlla regula humana non claudicat, niſi quae poſt abſolutam totius Naturae organicae cognitio-

gnitionem e praemiſſis colligetur; melius interim in obſeruandis et deſcribendis ſingulis ſpeciebus nauabitur opera.

*Callionymus baicalenſis* dodrantalis eſt et eiusdem ſemper longitudinis. *Caput* infirmum, magnum, baſi angulato ſubtetragonum, vertice plano, temporum carina bituberculata, *operculis* planiuſculis, mollibus, laeuiſſimis; ambitu impreſſionibus quinque, poſtica lamina acceſſoria parua, ſubtriangulari.

*Roſtrum* plagioplateum, latum, rotundatum: *Os* maximum; *maxillae* oſſeae, margine craſſo, conuexo, extrorſum vncinulis confertis late ſcabro: *inferior* paulo anguſtior, apice glabro; ſubacuto vltra ſuperiorem paulo prominula. *Lingua* obtuſiſſima et os intus glabrum. *Branchiarum rhaches* longisſimae, dentibus geminatis, obtuſis, apice echinatis, diſtantibus pectinatae, breuiſſime barbatae. *Membr. branchioſtega* anguſtata, ab iſthmo plane disiuncta, radiata cartilaginibus ſex, valde inter ſe remotis, ſeptimo operculis adnato.

*Oculi* vtrinque ad frontem planam, magni, nigri, cute craſſa obuoluti.

*Corpus* molliſſimum, alepidotum, monochroum, albidum, pinguedinoſum, compreſſum, a capite ſenſim adtenuatum. *Cutis* tenuis, laeuiſſima.

*Pinnae*: *ventrales* omnino nullae! — *Dorſalis* prior minima, radiorum octo mollium, breuiſſimorum ac valde diſtantium; *ſecunda* magna, radiis rigidioribus, extremo quaſi in cirrhum mollem terminatis, quorum 3 — 15. longiſſimi, numerus totalis 28. connumeratis primis exiguis. Omnes radii paulo ſupra baſin nodo punctoque opaco albo, quaſi ſebaceo notati. *Pin-*

*Pin. pectorales* longiſſimae, dimidiam corporis longitudinem aequantes, radiorum 13. qui omnes tenuiſſimi, ſed rigidiusculi, ſubarcuati: 1 ad 10. maxime elongati, extremitate cirhoſo-molli, ſed membrana lata, albido-pellucida, ſatis firma toti connexi.

*Anus* quarta totius longitudinis parte a capite remotus, pauloque a pinna ani diſtans. *Pin. ani* ſecundae dorſali exacte oppoſita et aequalis rad. 32. quorum primi breues, 3 ad 16. longiores.

*Cauda* biloba, radiis 13. omnium craſſiſſimis, ramoſis atque articulatis. Linea lateralis dorſo vicina.

*Longitudo* deſcripti piſcis, a ſummo apice mandibulae ad extrema caudae $6''. 10'''$. capitis $1''. 10\frac{1}{2}'''$. rictus $1''. 1'''$. Diſtantia oculorum a medio maxillae ſuperioris margine $9'''$. inter ſe $4\frac{3}{4}'''$. narium a margine oris $4\frac{1}{2}'''$. inter ſe $5'''$. ab oculis $3\frac{1}{3}'''$. hiatus branchiatis $1''. 4'''$. Diſtantia pinnarum pectoralium a ſummo roſtro $1''. 11'''$. earundem longitudo $2''. 6'''$. Diſtantia ani a ſummo roſtro $2''. 7'''$. a pinna ani $4'''$. Extenſio pinnae ani $2''. 6'''$. eiusdemque diſtantia a cauda $9\frac{1}{2}'''$. Caudae radii longiſſimi $11\frac{1}{2}'''$. Diſtantia pin. dorſi prioris a ſummo roſtro $2''$. extenſio eiusdem $8\frac{1}{3}'''$. diſtantia ſecundae a prima $3\frac{1}{8}'''$. huius extenſio $2''. 7'''$. eiusdem diſtantia a cauda $7\frac{1}{8}'''$.

## III.

## Gobius macrocephalus.

*Tab. X. fig.* 4. 5. 6.

Piſciculum deſcribo in ſuo genere forma ſingularem, quemque Mare Caſpium ad oſtia riuulorum et fluuiorum et in

in pigris ſinubus paſſim alit, forſitan Ponti Euxini quoque incolam, ſed qui Cottorum inſtar ſemper in fundo aquae verſari ſolet, vnde raro in retia incidit. Magnitudine capitis Cottos et Callionymos refert, ſed pinna ventrali vnica, infundibuliformi ad Gobiorum genus reducitur, quorſum etiam pectoralibus pinnis baſi carnoſis, et dorſalium conformatione tendit.

*Magnitudo* exacte quae icone expreſſa eſt; raro maior obſeruata. *Caput* maximum depreſſum, cordato-rotundatum, ſupra ſcaberrimum, lateribus quaſi buccatum, verrucis maioribus acutis corneis ſcabris muricatum; in vertice et inter oculos minoribus verruculis ſparſum; maxilla ſuperiore ſcaberrimum (*Fig.* 5.) *Os* transuerſum, margine vtriusque maxillae craſſo ſcaberrimo, *labiis* extus carnoſis ſtipato, quae ad rictum in laxum valde angulum coëunt. *Oculi* ſuperi, maiusculi, areola impreſſa, ſubſcabrata cincti. *Nares* tubuloſae, ante oculos ad ipſum labium oris prominulae.

*Opercula* branchiarum parua, ante pinnas pectorales tantum apertura transuerſa hiantia, quadrituberculata; *membrana branchioſtega* ampliſſima, turgidula, vndique adnata, lamellis quatuor radiata.

*Corpus* antice ventricoſius, verſus caudam compreſſo-adtenuatum, dorſo longitudinaliter impreſſum, ſcabrum, verrucoſo-muricatum, ventre conuexo, laeui. *Cauda* ſeriebus quatuor tuberculorum ſubhexagona, quarum dorſales et ventrales magis angulato-prominulae; ſubtus plana glabra. *Anus* poſtice carnoſa *ligula* (*Fig.* 6. *b.*) ſtipatus.

*Pinnae pectorales* baſi carnoſae, latae, rotundatae; radiis mediis longioribus, vniuerſis 16. *Ventralis* vnica, maxi-

ma, orbiculata, radiorum 10. craſſiſſ. et ramoſiſſimorum, antice tranſuerſa membrana in infundibuli formam efficta (*Fig.* 6.). *Pinna dorſalis* prior minima, radior. trium mollium et ſimpliciſſimorum; *ſecunda* productior, nouemradiata, radiis ramoſis. *Caudae* lanceolata, 13 radiata.

*Color* piſcis ſupra gryſeo-cinereus, ſubtus albus: *menſuras* non addo, quippe figura triplici (4. de ſuper, 5. ſubtus, 6. a latere) ad amuſſim expreſſas.

## IV.

## Cottus diceraus.

*Tab. X. fig. 7.*

Piſcis ex inſulis Curilis miſſus, quem Stellerus quoque inter Kamtſchaticas marinas ſpecies breuiter indicauit. Nomen Curilis vſitatum *Kcheiljucha*, quod laruam ſ. faciem difformem ſignificat. Ruſſi in Camtſchatca, referente *Stellero*, *Bytſchok* (Бычокъ) ſeu Taurum diminutiue appellant. Occurrit autem circa Camtſchatcam nullibi, niſi in Portu SS. Petri et Pauli et in ſinu Avatſchae. Inter innumeros *Stellero* nunquam quinque vel ſex pollicaribus maiores occurrerunt; ſed maculis fuſcis, albis, flauis, rubentibus, pulcherrime inſtar marmoris variegati. *Habitus* Cotti Scorpii. Siccatum ſpecimen, quod deſcripſi, longitudinem complebat ſex pollicum. Icon autem ad recentem piſcem exacta eſt.

*Caput* maximum, depreſſum, ſubtus planum, ſupra difforme, ore rotundato. *Maxilla inferior* longior, vtraque toto margine dentibus ſine ordine confertis imbricato-muricata. *Lamina* oſſea maxillae ſuperiori imminens obtuſe bidentata; alia ſurſum tridentata, ante orbitas, frontalis.

*Orbi-*

*Orbitae* in medio vertice approximatae, fornice communi didymo ſeu per medium longitudinaliter excauato, prominentiſſimae. Pone orbitas vertex planus, verſus nucham inter criſtas duas ſeu carinas parallelas depreſſus.

*Operculorum* lamina prior ſubocularis patentiſſima, deorſum obtuſe bidentata, extimo angulo armata *ſpina* vna breviore, ſubulata, extrorſum verſa, *alteraque* longiſſima, lineari-ſubulata, per ſtrias ſcaberrima, interiore latere vncis ſex, (in ſiniſtra ſeptem) hamata, et ita retrorſum directa, vt cum compare alterius lateris fere parallela rigeat. *Poſterior* vel propria operculorum lamina ſubmucronato-acuta, inferiore margine ſupra membr. branchioſtegam mucronibus 2. breuibus approximatis armata. *Membrana branchialis* laxa, iſthmo adnata, radiis tantum 5. diſtantibus inſtructa.

*Pinnae pectorales* latiſſimae, alaeformes, totum hiatus branchialis marginem ſubtus coronantes, molles, variegatae. *Ventrales* intermediae, ferme iugulares, anguſtiſſimae, biradiatae.

*Corpus* gracile, e tereti adtenuatum, verſus caudam compreſſum, alepidotum, ſerie vtrinque ſecundum dorſum, a ſinu branchiali ad caudam longitudinali, *tuberculorum* oſſeorum ſcabrorum, ſubimbricata. *Pinnae dorſales* ambo radiis flexilibus, et vti *cauda* variegatae.

V.

## Cyprinus Labeo.

*Tab. XI. fig.* 8. 9.

Copioſus in Onone, Ingoda et Schilca, veroſimillime etiam in reliquis per Amurem in orientalem oceanum effluen-

tibus fluuiis piſcis, qui omni anni tempore in retia incidit, ſed difficilis eſt captu, niſi ubi in coecis fluuiorum ramis inſtituatur piſcatura. In lacubus non occurrit. *Oua* ſpargit vere, tumque incedit gregatim et velociſſime natat, vnde *Equum* (конь) appellarunt Ruſſi Dauuriae. Caeterum tanquam ſapidiſſimus, neque ariſtis multum impeditus aeſtimatur piſcis et quoad viſcera, veſicam aëream, dentes faucium, cet. vt vulgo Cyprinus habet; oris tantum conformatione ſingularis.

*Magnitudinem* trium ſpithamarum non excedit. *Caput* craſſum, vertice plano; *roſtrum* conicum, obtuſum, carnoſum, longe ſupra maxillam inferiorem prominens. *Os* ſub roſtro (*fig.* 9.) lunatum, amplum, productile, labiis craſſis, pinguibus marginatum, laeue.

*Oculi* maiuſculi, a roſtro remotiuſculi, vertici propinqui. *Irides* flaueſcenti-argenteae, ſuperne anguſtiores, pupilla extra centrum poſita.

*Opercula* branchiarum molliuſcula, rotundata; *membrana branchioſtega* trilamellata, plica lata iſthmo adnata.

*Corpus* oblongum, craſſiuſculum, leuiter compreſſum, ventre rotundato, dorſo obtuſe angulato. *Linea lateralis* a capite deſcendens, pone medium corporis leuiſſime arcuata.

*Pinna dorſi* fuſco-cineraſcens, radiorum 8. quorum primus, cum adminiculo, craſſiſſimus, oſſeus, ſubtriqueter, laeuis, antice longitudinaliter ſulcatus. P. pectorales, ventrales, ani rubrae: *pectorales* rad. 19. *ventrales* baſi albidae radiorum 9. ſquama triangulari ſupra baſin; *ani* radiorum 7. praeter adminiculum, pallidius rubra. *Cauda* fuſco-coeruleſcens, rad. 19. bifurca, lacinia infera paulo maiore.

*Squa-*

*Squamae* magnae. *Color* in dorſo e fuſco-coeruleſcens, nitidus, verſus latera ſubargenteus, ſubtus lacteus.

*Pondus* librarum ruſſ. $1\frac{3}{4}$. *Longitudo* deſcripti 1′. 2″. 6‴. Capitis ad operculorum marginem 3″. $1\frac{1}{2}$‴. diſtantia oculi a ſummo roſtro 1″. 7‴. eiusdem diameter $6\frac{1}{3}$‴. Roſtri prominentia vltra mandibulam, eademque fere craſſities labii ſuperioris 4‴. latitudo oris 1″. altitudo capitis ad nucham 2″. craſſities 1″. 8‴. Diſtantia pinnae dorſalis a ſummo roſtro 5″. 10‴. eius extenſio 1″. $5\frac{1}{2}$‴. diſtantia ad caudam 5″. 4‴. Diſtantia pin. pectoral. a roſtro 3″. 2‴. inde ad ventrales 3‴. inde ad anum 3″. 5‴. huius extenſio 1″. inde ad caudam 2″. $1\frac{1}{2}$‴.

## VI.

## Cyprinus leptocephalus.

*Tab. XI. fig.* 10.

Hic quoque piſcis in Ingoda et Onone frequens, non fugax, vnde tridacibus facile occiditur. Ruſſis propter pinnarum rubedinem in Dauuria vulgo *Krasnoper* (Красноперь) dictus, ſed propter oſſiculorum, quibus ſcatet, copiam inuiſus et eſu peſſimus.

*Magnitudo* trium ſpithamarum ſeu vlnaris et vltra. Capitis forma aliquantum ſimilis Eſoci.

*Caput* enim longum, parum compreſſum, conuexum, ſubtus planum, roſtro depreſſo-rotundato. *Maxillae* labiis pinguibus molles, inferior multo longior; laminae myſtaceae lineares, pingues. *Nares* ſupra roſtrum.

 *Oculi*

*Oculi* laterales, *iride* flaueſcenti-argentea, ſupra fuſco-obumbrata. *Opercula* branchiarum late hiantia, angulo rotundato; *membr. branchioſtega* oſſiculis tribus latis, tenui membranula iſthmo adnexa; *branchiae* perſectae quatuor.

*Corpus* longum, fere lanceolatum, craſſum, conuexum, compreſſiuſculum, aluo planiuſcula. *Squamae* mediocres. *Linea lateralis* ventri paulo propior et ſubparallela. *Color* verſus dorſum coerulefcenti-fuſcus, infra lin. lateralem argentatus, in ventre lacteus.

*Pinnae*, praeter dorſalem fuſcam, omnes rubrae: *pectorales* baſi cineraſcentes, rad. 20; *ventrales* dilute miniaceae, rad. 10; *ani* radiorum 9. praeter adminiculum, poſtremo bifido; dorſalis octoradiata, poſtremo itidem fere vsque ad baſin bifido. *Cauda* e fuſco rubra, bifurca, lacinia inferiore paulo longiore, radiorum 19.

*Longitudo* tota piſcis deſcripti $15''$. $6'''$. pondus libr. vnius et vnciar. quatuor cum dimidia. Long. capitis ad marginem operculorum $3''$. $8'''$. a ſummo roſtro ad finem laminae myſtaceae oris $11'''$. Maxillae inferioris exceſſus $2'''$. oculi diſtantia a roſtro $1''$. $1\frac{1}{3}'''$. diameter $5\frac{1}{2}'''$. Narium diſtantia ab oculo $3'''$. inter ſe $4\frac{1}{2}'''$. Diſtantia p. pector. a ſummo roſtro $3''$. $7'''$. harum longitudo $1''$. $10'''$. pinnarum ventralium ab iſtis diſtantia $3''$. $6\frac{1}{4}'''$. harumque longit. $1''$. $10'''$. Diſtantia a ventralibus ad p. ani $2''$. $9'''$. huius a cauda $2''$. $4'''$. extenſio $1''$. $4'''$. Longitudo laciniarum caudae $2''$. $6'''$. Diſtantia pinn. dorſi a ſummo roſtro $7''$. $3'''$. a cauda $4''$. $6'''$. eiusdem extenſio $1''$. $3'''$. Altitudo capitis ad nucham $1''$. $7''$. craſſities $1''$. $1\frac{1}{2}'''$. Corporis altitudo ſumma $2''$. $9'''$. craſſities $1''$. $5\frac{1}{2}'''$.

VII.

## VII.

# Silurus dauuricus.

*Tab. XI. fig.* 11.

In Ingoda, Ononc et Arguno Dauuriae fluuiis, adiacentibusque aquis pigris non infrequens eſt Siluri ſpecies, Ruſſis vſitato pro ſignificanda Glani nomine (Сомъ) ibidem cognita, ſed a Glani, per orientalem Sibiriam exulante, certe diuerſa, Luciis raro maior, et ſapidior multo congenere europaea. Multum huic cum S. Aſoto *Linnei* conuenit; ſed quandoquidem huius icon nulla extat, mihique pro comparatione non ſuppetat exemplum piſcis quem Ill. *Linneus* prae oculis habuit; malui noſtrum tantisper *Siluri dauurici* nomine deſcribere.

*Caput* plagioplateum, rotundatum, ſupra aequaliter convexum. *Maxillae* labiis carnoſis tumidae, inferior multo longior. Areae falcatae vtriusque maxillae ſpinulis creberrimis exaſperatae, ſuperius etiam accedente area palatina obtuſe lunata. *Cirrhi* maxillares ſupra duo, labio proximi, inter nares et oculum, ſetacei, capite longiores; *gulares* duo *ſub* maxilla inferiore, vix quartam partem priorum aequantes.

*Oculi* parui, *iride* fuſco-inaurata, circulo *pupillae* anguſtiſſime aureo. *Membrana branchioſtega* radiorum 15. quorum priores magni, arcuati, vsque ad ſinum aperturae fere pertingentes. *Linea* glanduloſo-punctata per opercula vtrinque longitudinalis, lineae laterali continuata.

*Corpus* compreſſum, capite exilius, poſtice valde extenuatum, dorſo conuexum, aluo planiuſcula, molli; ab ano in carinam pinnatam compreſſum, mucoſum, alepidotum. Dorſum

ſum pingue, ſulco obſoleto ante pin. dorſi. *Linea lateralis* recta.

*Pinna dorſi* anguſtiſſima rad. 5; *pectorales* conſtant oſſe ipſa pinna breuiore, truncato, ancipiti, angulis carioſe-exaſperato, radiisque mollibus 13. *P. ventrales* rotundatae, rad. 13. *P. ani* longiſſima, radiorum 90. *caudae baſi adnata*: *Cauda* biloba, rad. 17.

*Color* totius fuſco-nigricans, capite ſubtus pallido, alvo cineraſcente-albida.

*Pondus* deſcripti circiter bilibre. *Longitudo* tota 20''. 3'''. Capitis 3''. 8½'''. Maxillae infer. exceſſus 3¼'''. Long. cirrhorum ſuperiorum 4''. 3'''. diſtantia inter ſe 1''. 5'''. diſtantia narium 10½'''. Long. cirrh. inferiorum 1''. 6'''. eorundem diſtantia inter ſe 1''. 3'''. et a margine labii 7'''. Circumferentia hiatus oris 3''. 3'''. oculorum diſtantia a medio labii ſuperioris 1''. 2'''. a proxima marginis parte 5''. inter ſe 1''. 7'''. a ſinu branchiali; 2''. 3'''. Diſtantia a ſummo ore pinnarum pectoralium 3''. 10½'''. earundem longit. 2''. 3'''. et oſſis 1''. 3½'''. Diſtantia ab his ventralium 2''. 7'''. harum longitudo 1''. 3'''. Diſtantia hinc p. ani 1''. 1'''. eiusdem extenſio 12''. ſummaque altitudo 1''. 2'''. Longitudo caudae 1''. 9'''. Diſtantia p. dorſalis a ſummo ore 5''. 2'''. eiusdem altitudo 1''. 3'''. Latitudo capitis 2''. 8'''. Altitudo ad nucham 2''. 5'''. Corporis altitudo ſumma ante p. dorſ. 2''. 8'''. craſſities 2''.

---

ASTRO-

# ASTRONOMICA.

# OBSERVATIONES ASTRONOMICAE WOLOGDAE ANNO 1785 HABITAE

Auctore
*P. INOCHODZOW.*

*Conuent. exhib. d.* 4. *Iul.* 1785.

Obſeruationes hac eadem prorſus methodo ac praecedentes in aliis locis inſtitutae ſunt: inquiſiui nempe variis diebus in ſtatum quadrantis mei per repetitas altitudines diuerſarum ſtellarum fixarum in plagis auſtrali et boreali culminantium, quas omnes recenſere ſuperfluum foret; atque ex quadraginta combinationibus reperi errorem ſubtractiuum 3′. 50″, et latitudinem obſeruatorii 59°. 13′. 36″. En ipſas obſeruationes et calculos:

| Dies obſ. St. nov. | Nomina Fixarum. | Altitudo obſeruata. | Error Quadran. | Refraction. | Declinatio apparens. | Latitudo. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 Apr. | α Leonis | 43°. 52′. 6″ | 3′. 50″ | 1′. 9″ | 13°. 0′. 31″,5 | 59°. 13′. 24″,5 |
| | γ - - | 51. 46. 18 | - - | 0. 50, 5 | 20. 55. 13 | - - 35, 5 |
| | ζ - - | 41. 15. 40 | - - | 1. 15, 5 | 10. 24. 18, 5 | - - 44 |
| | β - - | 46. 37. 45 | - - | 1. 3 | 15. 46. 16 | - - 24 |
| | γ Cephei | 45. 44. 23 | - - | 1. 4, 5 | 76. 25. 46 | - - 42 |
| 22 Apr. | α Leonis | 43. 52. 10 | - - | 1. 9 | 13. 0. 31, 5 | - - 20, 5 |
| | γ - - | 51. 46. 20 | - - | 0. 50, 5 | 20. 55. 13 | - - 33, 5 |
| | ζ - - | 41. 15. 47 | - - | 1. 15, 5 | 10. 24. 18, 5 | - - 37 |
| | δ - - | 52. 33. 10 | - - | 0. 51 | 21. 41. 51 | - - 22 |
| | β - - | 46. 37. 45 | - - | 1. 3 | 15. 46. 16 | - - 24 |
| | γ Cephei | 45. 44. 18 | - - | 1. 4, 5 | 76. 25. 46 | - - 37 |
| 26 Apr. | δ Leonis | 52. 33. 10 | - - | 0. 51 | 21. 41. 51 | - - 22 |
| | β - - | 46. 37. 35 | - - | 1. 3 | 15. 46. 16, 5 | - - 34, 5 |
| | η Virgin. | 31. 23. 28 | - - | 1. 48, 5 | 0. 31. 38 | - - 48, 5 |
| | γ Cephei | 45. 44. 28 | - - | 1. 4, 5 | 76. 25. 45 | - - 48, 5 |
| | α Caſſiop. | 24. 41. 0 | - - | 2. 22 | 55. 21. 7 | - - 41 |
| | Polaris - | 57. 27. 51 | - - | 0. 42, 5 | 88. 9. 37 | - - 41, 5 |
| 9 Maii | η Virgin. | 31. 23. 20 | - - | 1. 48, 5 | 0. 31. 38 | - - 56, 5 |
| | ζ - - | 31. 22. 10 | - - | 1. 48, 5 | 0. 30. 22, 5 | - - 50, 5 |
| | α Caſſiop. | 24. 40. 50 | - - | 2. 22 | 55. 21. 6 | - - 32 |
| | γ - - | 28. 51. 53 | - - | 1. 43, 5 | 59. 32. 48 | - - 31, 5 |
| | Polar. - | 57. 27. 40 | - - | 0. 42, 5 | 88. 9. 34 | - - 33, 5 |
| 13 Maii | α Caſſiop. | 24. 41. 5 | - - | 2. 22 | 55. 21. 5, 5 | - - 47, 5 |
| | γ - - | 28. 52. 0 | - - | 1. 43, 5 | 59. 32. 47 | - - 39, 5 |
| | Polar. - | 57. 27. 47 | - - | 0. 42, 5 | 88. 9. 33 | - - 41, 5 |
| | δ Caſſiop. | 28. 25. 42 | - - | 1. 45, 5 | 59. 6. 35 | - - 31, 5 |
| 20 Maii | ζ Virgin. | 31. 22. 18 | - - | 1. 48, 5 | 0. 30. 22, 5 | - - 43 |
| | η Bootis | 50. 20. 11 | - - | 0. 55 | 19. 29. 10 | - - 44 |
| | Arctur. - | 51. 9. 40 | - - | 0. 54 | 20. 18. 9 | - - 13 |
| | ε Caſſiop. | 31. 55. 0 | - - | 1. 46, 5 | 62. 35. 57, 5 | - - 26 |

Medium 59°. 13′. 36″.

Pro-

Progrediamur ad altitudines Solis meridianas, vbi in computu declinationis Solis aſſumta eſt differentia meridianorum inter Pariſios et Wologdam 2⅓ horarum.

| Dies obſ. St. nov. | Altitud. obſerv. limbi ſuperior. | Error Quadr. | Refract. — parall. | Semidiamet. Solis. | Declinat. Solis Borealis. | Latitudo. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 Apr. | 43°.30′.28″ | −3′.50″ | 1′. 4″ | 15′.57″ | 12°.23′.18″ | 59°.13′.41″ |
| 26 - | 44. 48. 46 | - - | 1. 1 | - 55,5 | 13. 41. 47 | - - 47,5 |
| 29 - | 45. 45. 20 | - - | 0. 59 | - 55 | 14. 38. 19 | - - 43 |
| 30 - | 46. 3. 55 | - - | 0. 58 | - 54,5 | 14. 56. 42 | - - 29,5 |
| 4 Maii | 47. 14. 40 | - - | 56 | - 54 | 16. 7. 42 | - - 42 |
| 7 - | 48. 5. 20 | - - | 54 | - 53 | 16. 58. 13 | - - 30 |
| 9 - | 48. 37. 22 | - - | 53 | - 53 | 17. 30. 28 | - - 42 |
| 14 - | 49. 53. 7 | - - | 51 | - 52 | 18. 45. 59 | - - 25 |
| 15 - | 50. 7. 20 | - - | 50,5 | - 51,5 | 19. 0. 7 | - - 19 |
| 18 - | 50. 47. 22 | - - | 49 | - 51 | 19. 40. 40 | - - 48 |
| 20 - | 51. 13. 10 | - - | 48,5 | - 50,5 | 20. 6. 2 | - - 21 |
| 21 - | 51. 25. 20 | - - | 47,5 | - 50,5 | 20. 18. 15 | - - 23 |
| 25 - | 52. 10. 26 | - - | 47 | - 50 | 21. 3. 24 | - - 25 |
| 6 Iunii | 53. 50. 24 | - - | 43,5 | - 48 | 22. 43. 25,5 | - - 23 |
| 11 - | 54. 15. 26 | - - | 43 | - 47,5 | 23. 8. 29 | - - 23,5 |
| 13 - | 54. 22. 47 | - - | 43 | - 47,5 | 23. 15. 53 | - - 26,5 |
| 14 - | 54. 25. 40 | - - | 43 | - 47,5 | 23. 18. 40 | - - 16 |
| 21 - | 54. 34. 44 | - - | 42,5 | - 47 | 23. 27. 58 | - - 33,5 |
| 22 - | 54. 34. 30 | - - | 42,5 | - 47 | 23. 27. 38 | - - 27,5 |
| 23 - | 54. 33. 46 | - - | 42,5 | - 47 | 23. 26. 54 | - - 27,5 |

Medium 49°.13′.30″,5

Ex his abunde patet latitudinem vrbis Wologdae ſtatui poſſe 59°. 13′½.

 Pro

Pro determinanda longitudine huius vrbis nullam occultationem fixae, aut immerſionem ſatellitis obſeruare licuit, praeter ſequentes altitudines limbi Lunae Borealis meridianas, quae tamen obſeruationes in computum hac occaſione non ductae ſunt. Ceterum e cognitis latitudinibus vrbium Iaroslawl et Wologdae, atque diſtantia ipſarum colligitur has vrbes ſub eodem meridiano quam proxime ſitas eſſe.

| Dies obſerv. St. novi. | Temp. culminationis ver. | Altitudo limbi ſuperioris ab errore quadr. purg. |
|---|---|---|
| 14. Maii limb. Lunae praec. | 5ʰ. 11′. 29″ | |
| Centrum ad ſenſum | 12. 35 | 49°. 39′. 26″ |
| 15. Maii limb. Lunae praec. | 5. 56. 10 | |
| Centrum - - | 5. 57. 18 | 44. 59. 22 |
| 16. Maii limb. Lunae praec. | 6. 37. 56 | |
| Centrum - - | 6. 39. 3 | 39. 48. 23 |
| 18. Maii limb. Lun. pernub. | 7. 57. 20 | |
| Centrum - - | 7. 58. 22 | 28. 42. 58 |
| 20. Maii limb. Lunae praec. | 9. 18. 56 | |
| Centrum - - | 9. 19. 58 | 17. 46. 56 |
| Eodem ſpica virginis - | 9. 23. 26 | 20. 46. 37 |
| 13. Iunii limb. Lunae praec. | 5. 10. 14 | |
| Centrum - - | 5. 11. 16 | 36. 21. 30 |

Declinationem acus magneticae reperi $3\frac{3}{4}$ et 4 graduum ad occidentem.

# DE SITV GEOGRAPHICO VRBIS PETROSAWODSK, DEDVCTO EX OBSERVATIONIBVS ASTRONOMICIS ANNO 1785 INSTITVTIS.

Auctore
PETRO INOCHODZOW.

*Conuent. exhib. d. 9 Martii 1786.*

Vltimae ſtationis ab illuſtriſſima Academia Scientiarum mihi praeſcriptae, vrbis nempe, quae nomen ſuum a fodinis Petri gerit, et iacet ad celebrem lacum Onego, poſitionem geographicam determinaturus, referam primum more ſolito verificationem quadrantis, tum latitudinem loci ex altitudinibus ſtellarum fixarum et Solis meridianis; deinde obſeruationes circa eclipſes Satellitum Iouis habitas, earumque comparationes cum momentis tabularum et nonnullis obſeruationibus correſpondentibus.

Exa-

## Examen Quadrantis.

Die 6 Aug. E combinatione altitudinum ſtellarum $\alpha$, $\beta$, $\delta$, $\gamma$ Lyrae, $\delta$, $\alpha$ Aquilae $\beta$, $\gamma$ Cygni et $\alpha$ ſagittae ad auſtrum captarum cum *i* et *x* vrſae maioris ad Boream obſeruatarum reperitur error Quadrantis — 3′. 15½″ et latitudo 61°. 47′. 12″.

Die 11. ex $\alpha$, $\beta$, $\delta$, $\gamma$ Lyrae cum *i*, *x* et $\theta$ vrſae maior- prodit error — 3′. 16″. et latitudo 61°. 47′. 10″.

Die 15 et 16. ex $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ Lyrae, $\delta$ et $\alpha$ Aquilae cum $\beta$, $\alpha$, $\delta$ vrſae maioris inuenitur — 3′. 16″ et 61°. 47′. 15″.

Die 18. Ex $\alpha$, $\beta$ Lyrae cum $\varepsilon$ vrſ. maioris obtinetur — 3. 15 et latitudo 67°. 47′. 11′.

Error igitur medius — 3′. 15″⅓, et latitudo 67°. 47′. 11″.

Altitu-

## Altitudines ſtellarum fixarum.

| Dies obſer. St. noui. | Nom. Fix. | Altit. obſeru. | Error. Quadr. | Refract. | Declinatio appar. | Latitudo. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 Aug. | α Lyrae | 66°.52′.55″ | −3′.15″ | 0′.28″ | 38°.35′.57″ | 61°.46′.45″. |
| | β - - - | 61. 24. 27 | - - | 0. 36 | 33. 8. 1 | - 47. 25 |
| | δ - - - | 64. 55. 17 | - - | 0. 31 | 36. 38. 40 | - 47. 9 |
| | γ - - - | 60. 41. 42 | - - | 0. 37 | 32. 24. 53 | - 47. 3 |
| | δ Aquilae | 31. 0. 0 | - - | 1. 50 | 2. 42. 21 | - 47. 24 |
| | β Cygni | 55. 48. 23 | - - | 0. 45 | 27. 31. 39 | - 47. 16 |
| | α Sagittae | 45. 49. 30 | - - | 1. 4 | 17. 32. 25 | - 47. 14 |
| | α Aquilae | 36. 36. 38 | - - | 1. 29 | 8. 19. 7,5 | - 47. 13,5 |
| | γ Cygni | 67. 51. 40 | - - | 0. 27 | 39. 35. 12 | - 47. 14 |
| | *i* Vrſae maior | 20. 45. 20 | - - | 2. 49 | 48. 52. 7 | - 47. 9 |
| | *x* - - - | 19. 52. 45 | - - | 2. 56 | 47. 59. 28 | - 47. 6 |
| 11 Aug. | α Lyrae | 66. 53. 0 | - - | 0. 28 | 38. 35. 58 | - 46. 41 |
| | β - - - | 61. 24. 35 | - - | 0. 36 | 33. 8. 2,5 | - 47. 18,5 |
| | δ - - - | 64. 55. 9 | - - | 0. 31 | 36. 38. 41 | - 47. 18 |
| | γ - - - | 60. 41. 30 | - - | 0. 37 | 32. 24. 54 | - 47. 16 |
| | *i* Vrſae maior | 20. 45. 18 | - - | 2. 49 | 48. 52. 5 | - 47. 9 |
| | *x* - - - | 19. 52. 55 | - - | 2. 56 | 47. 59. 26 | - 47. 18 |
| | θ - - - | 24. 31. 31 | - - | 2. 23 | 52. 38. 45,5 | - 47. 7,5 |
| 15 Aug. | α Lyrae | 66. 52. 50 | - - | 0. 28 | 38. 35. 58,5 | - 46. 51,5 |
| | β - - - | 61. 24. 30 | - - | 0. 36 | 33. 8. 3 | - 47. 24 |
| | γ - - - | 60. 41. 37 | - - | 0. 37 | 32. 24. 55 | - 47. 10 |
| | δ Aquilae | 31. 0. 0 | - - | 1. 50 | 2. 42. 21 | - 47. 26 |
| | α - - - | 36. 36. 34 | - - | 1. 29 | 8. 19. 9 | - 47. 19 |
| 16 Aug. | β Vrſae mai. | 29. 24. 4 | - - | 1. 57 | 57. 31. 37 | - 47. 15 |
| | α - - - | 34. 46. 32 | - - | 1. 36 | 62. 54. 18 | - 47. 23 |
| | δ - - - | 30. 5. 46 | - - | 1. 54 | 58. 13. 37 | - 47. 0 |
| 18 Aug. | α Lyrae | 66. 52. 51 | - - | 0. 28 | 38. 35. 59,5 | - 46. 51,5 |
| | β - - - | 61. 24. 32 | - - | 0. 36 | 33. 8. 4 | - 47. 23 |
| | ε Vrſ. maior | 29. 0. 0 | −3′.15″ | 1. 59 | 57. 7. 38 | - 47. 8 |
| | | | | | Medium - - - | 61. 47. 11 |

# Altitudines Solis in meridiano verſantis

In computu declinationis Solis aſſumſi differentiam meridianorum inter Pariſios et Petroſawodſk 2, 1 horarum.

| Dies obſer. St nou. | Altit. limbr. Solis Boreal. | Error. Quadr. | Refr. — paral. | ſemidiam. Solis | Declin. Solis Boreal. | Eleuatio poli. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 Iul. | 46°.58′. 5″ | —3′.15″ | 0′.56″ | 15′.49″ | 18°.25′. 3″,5 | 61°.46′.58″,5 |
| 31 - - | 46. 43. 29 | - - | 0. 56,5 | - - | 18. 10. 14 | - 46. 45,5 |
| 2 Aug. | 46. 13. 0 | - - | 0. 57,5 | - - | 17. 39. 42 | - 46. 43,5 |
| 5 - - | 45. 25. 0 | - - | 0. 59 | 15. 49,5 | 16. 51. 44 | - 46. 47,5 |
| 6 - - | 45. 8. 25 | - - | 1. 0 | 15. 50 | 16. 35. 11,5 | - 46. 51,5 |
| 9 - - | 44. 17. 23 | - - | 1. 2 | - - | 15. 43. 59,5 | - 46. 43,5 |
| 10 - - | 43. 59. 47 | - - | 1. 3 | 15. 50,5 | 15. 26. 24 | - 46. 45,5 |
| 11 - - | 43. 41. 47 | - - | 1. 3,5 | - - | 15. 8. 33,5 | - 46. 55,5 |
| 12 - - | 43. 23. 55 | - - | 1. 4 | 15. 51 | 14. 50. 30,5 | - 46. 45,5 |
| 13 - - | 43. 5. 20 | - - | 1. 4,5 | - - | 14. 32. 12 | - 47. 2,5 |
| 14 - - | 42. 46. 47 | - - | 1. 5,5 | - - | 14. 13. 40 | - 47. 4,5 |
| 16 - - | 42. 9. 20 | - - | 1. 7,5 | 15. 51,5 | 13. 35. 55 | - 46. 49 |
| 17 - - | 41. 49. 58 | - - | 1. 8 | - - | 13. 16. 44 | - 47. 0,5 |
| 18 - - | 41. 30. 25 | - - | 1. 8,5 | 15. 52 | 12. 57. 20 | - 47. 10,5 |
| 19 - - | 41. 11. 0 | - - | 1. 9,5 | - - | 12. 37. 43 | - 46. 59,5 |
| 21 - - | 40. 31. 20 | - - | 1. 11 | 15. 52,5 | 11. 57. 54 | - 46. 52,5 |
| 22 - - | 40. 11. 10 | - - | 1. 12 | 15. 53 | 11. 37. 42 | - 46. 52 |
| 23 - - | 39. 50. 44 | - - | 1. 13 | - - | 11. 17. 20 | - 46. 57 |
| 24 - - | 39. 29. 58 | - - | 1. 14 | - - | 10. 56. 46 | - 47. 10 |
| 27 - - | 38. 27. 20 | - - | 1. 17 | 15. 54 | 9. 54. 4 | - 47. 10 |
| 28 - - | 38. 6. 0 | - - | 1. 18 | - - | 9. 32. 50 | - 47. 17 |
| 29 - - | 37. 44. 40 | 3. 15 | 1. 19 | 15. 54,5 | 9. 11. 25,5 | - 47. 14 |
| | | | | | Medium - - | 61. 46. 57 |

Ex his abunde liquet Latitudinem vrbis Petroſawodſk 61°. 47′. 4″. vel numero rotundo 61°. 47′. ſtatuendam eſſe.

Obſer-

## Obſeruationes pro longitudine huius vrbis.

| | Temp. verum. |
|---|---|
| 1.) $\frac{20}{31}$ Iulii Immerſio 1^mi^ Satellitis Iouis. | |
| Lumen Satellis imminutum - - - | $14^h. 14'. 11''$ |
| Immerſio totalis - - - - - | 14. 14. 50 |
| Coelo ſereno et aere defecato; altitudo planetae ($14^h. 20'.$) erat $29°. 3'\frac{1}{4}$. | |
| 2.) $\frac{29 \text{ Iulii}}{9 \text{ Aug.}}$ Immerſio 1^mi^. | |
| Satelles lumine imminutus vix conſpicitur | 10. 37. 21 |
| Immerſio certa - - - - - - - | 10. 37. 48 |
| Duae faſciae latae videbantur; altitudo Iouis poſt obſeruationem $12°. 37'\frac{1}{2}$. | |
| 3.) Eodem die. Immerſio. 2^di^ ſatellitis. | |
| Satellitis lumen debilitatur - - - | 11. 59. 45 |
| Immerſio certa - - - - - - - | 12. 0. 16 |
| Faſciae melius conſpiciebantur, altitudo planetae ($12^h. 8'.$) erat $20°. 52'$. | |
| 4.) $\frac{31 \text{ iul.}}{11 \text{ Aug.}}$ Immerſio 3^ii^ ſatellitis | |
| Satelles difficulter iam videtur - - | 10. 1. 34 |
| Immerſio totalis - - - - - - | 10. 1. 51 |
| Coelo quidem ſereno, ſed Ioue parum eleuato faſciae confuſe repreſentabantur. | |
| 5.) Eodem. Emerſio eiusdem Satellitis - - | 12. 32. 12 |
| Faſciae ſatis conſpicuae; altitudo planetae ($12^h. 37'\frac{1}{2}$.) erat $24°. 26\frac{3}{4}$. | |



6.)

| | Temp. verum. |
|---|---|
| 6.) $\frac{5}{16}$ Aug. Immerſio $1^{mi}$ | |
| Satellitis lumen imminuitur - - - | 12. 31. 40 |
| vix conſpicitur - - - - - - | 12. 32. 20 |
| occultari videtur - - - - - | 12. 32. 39 |
| Immerſio totalis - - - - | 12. 32. 52 |
| coelo ſereno faſciae ſatis viſibiles altitudo Iovis ($12^h$. 41.) erat 26°. 17′¾. | |
| 7.) Eodem. Immerſio $2^{di}$ | |
| Decrementum luminis ſenſibile - - | 14. 38. 40 |
| Immerſio certa - - - - - | 14. 39. 23 |
| Faſciae melius quam in procedenti obſeruatione conſpiciebantur; altitudo planetae ($14^h$. 45½) obſeruata 32°. 19′¼. | |
| 8.) $\frac{7}{18}$ Aug. Secundus Satelles diſcum Iouis relinquere videbatur - - - - - | 13. 59. 58 |
| Immerſio $3^{ii}$ Satellitis incipit - - | 14. 5. 47 |
| Satelles occultatur - - - - - | 14. 5. 51 |
| Immerſio totalis - - - - | 14. 6. 2 |
| coelo ſereno faſciae ſatis viſibiles altitudo Iouis ($14^h$. 11′.) erat 31°. 41′½. | |
| 9.) $\frac{12}{23}$ Aug. Immerſio $1^{mi}$. | |
| Satelles lumine imminutus difficulter conſpicitur - - - - - - | 14. 27. 56 |
| Immerſio totalis - - - - - - | 14. 28. 10 |
| Faſciae ob Lunam vicinam minus diſtincte conſpiciebantur; alt. Planetae ($14^h$. 37′) erat 31°. 17′¾. | |

$\frac{15}{26}$ Aug.

| | | Temp. verum. |
|---|---|---|
| $\frac{11}{22}$ Aug. | Occultationem *x* Tauri ob nubem obſeruare non potui, emerſio vero ipſius ad limbum Lunae obſcurum conſecuta eſt - - - - - - - - | $14^h. 30'. 37''$ |

Obſeruationes $1^{mi}$ et $2^{di}$ ſatellitum Iouis comparaui cum momentis tabularum, atque pro differentia meridianorum inter Pariſios et Petroſawodſk ſequentes valores obtinui.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ex $1^{ma}$. obſeruatione - - | $2^h.$ | $8'.$ | $11''$ |
| $2^{da}$. - - - - - - | 2. | 8. | 4 |
| $3^{ia}$. - - - - - - | 2. | 8. | 20 |
| $5^{ta}$. - - - - - - | 2. | 8. | 4 |
| $7^{ma}$. - - - - - - | 2. | 8. | 35 |
| $9^{na}$. - - - - - - | 2. | 7. | 50 |
| horum Med. | 2. | 8. | 11. |

Inter obſeruationes Maſſiliae a D. *Bernard* et prope Genevam a D. *Mallet* factas reperio ſequentes correſpondentes, cum quibus immediate comparare poſſum.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Obſeruatio $1^{ma}$ in Petroſawodſk notata | $14^h.$ | $14'.$ | 50. | Imm. $1^{mi}$. |
| eadem Maſſiliae - - | 12. | 18. | 53 | |
| dat differentiam meridian. | 1. | 55. | 57 | |
| $3^{io}$ in Petroſaw. - - | 12. | 0. | 16. | Imm. $2^{di}$. |
| Maſſiliae - - | 10. | 3. | 49 | |
| D. - - | 1. | 56. | 27. | |

 $5^{ta}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5ta. in Petroſawodſk | - | 12. 32. 12. | Em. 3ii. |
| Maſſiliae | - - | 10. 36. 24. | |
| | | 1. 55. 48. | |
| 6ta. in P. | - - - | 12. 32. 52. | Imm. 1mi. |
| M. | - - - | 10. 36. 46. | |
| | | 1. 56. 6. | |
| 7ma. in P. | - - - | 14. 39. 23. | Imm. 2di. |
| M. | - - - | 14. 43. 27. | |
| | | 1. 55. 56. | |
| 8va. in P. | - - - | 14. 6. 2. | Imm. 3ii. |
| M. aeſtimata | - | 12. 9. 10. | |
| | | 1. 56. 52. | |
| 9na. in P. | - - - | 14. 28. 10. | Imm. 1mi. |
| M. | - - - | 12. 32. 43. | |
| | | 1. 55. 27. | |

| | | |
|---|---|---|
| Ex his 7 comparationibus prodit differentia medianorum - - | 1. 56. | 5 |
| Aut reiiciendo duas vltimas - - | 1. 56. | 3 |
| Eſt vero longitudo Maſſiliae a Pariſis in tempore - - | 12. | 7 |

Hinc differentia meridianorum inter Pariſios et Petroſawodſk - - 2. 8. 10 vel 12.

Vltima

Vltima obſeruatio collata cum Geneuenſi
$12^h. 35'. 8''$ - - dat differ. $1^h. 53. 2.$

Longitudo vero Geneuae - - - 15. 15.

Adeoque differentia merid. inter Pariſ. et
Petroſawodſk - - - 2. 8. 17.

Hinc patet longitudinem vrbis Petroſawodſk a primo meridiano ſine ſenſibili errore ſtatui poſſe $52^\circ. 3'\frac{1}{2}$.

Declinationem acus magneticae ex repetitis obſeruationibus inueni $5^\circ. 9'$. a ſeptentrione ad occaſum.

---

COM-

# COMMENTATIO DE TRANSITV MERCVRII PER DISCVM SOLIS ANNO 1786. DIE $\frac{23 \text{ Apr.}}{4 \text{ Maii.}}$ TEMPORE CIVILI PETROPOLI OBSERVATO.

Auctore

*STEPHANO RUMOVSKI.*

*Conuent. exhib. d. 6 Nou. 1786.*

De tranſitu Mercurii per diſcum Solis coram Illuſtriſſima Academia Scientiarum acturo ante omnia mentio facienda mihi eſt de diuiſione et valore partium micrometri obiectiui ad menſurandas diſtantias limborum Solis et Mercurii adhibiti. In micrometro hoc digitus menſurae Anglicae diuiſus eſt in 20 partes, et quaelibet vigeſima pars ope Nonii ſubdiuiditur in 25 partes, quarum vnam, menſurata baſi 1162 pedum anglicorum, ter repetita operatione reperi valere 1″, 08 ſic vt vna vigeſima pars digiti valeat 27″ et vnus digitus 9′. Porro errorem collimationis in ipſo tranſitu Mercurii obſeruando reperi ſubtractiuum 5 partium Nonii.

Prae-

Praecedentibus tranſitum Mercurii per diſcum Solis diebus, quoties coelum ſauit, ſollicite in motum horologii ab *Arnoldo* elaborati inquiſiui, ac reperi illud motu tam vniformi inceſſiſſe, vt ne minimus error in obſeruationem inde redundare potuerit, praeſertim cum ipſo die tranſitus per altitudines Solis correſpondentes eum explorauerim, pro vt patet ex ſequentibus

| | | |
|---|---|---|
| Die $\frac{5}{16}$ Apr. merid. verus | $11^h. 32'. 9''$ | |
| — $\frac{7}{18}$ — - - - | 11. 36. 12,3 | acc. Horol. $4'. 17'',3$ |
| — $\frac{9}{20}$ — - - - | 11. 44. 20,5 | - - - 4. 17,5 |
| — $\frac{11}{22}$ — - - - | 11. 52. 30,3 | - - - 4. 17,4 |
| — $\frac{23\ \text{Apr.}}{4\ \text{Maii.}}$ - - - | 12. 41. 58,2 | - - - 4. 16,5 |

## Obſeruatio Mercurii in Sole.

Introitum Mercurii in Solem aeque ac exitum obſeruaui tubo Gregoriano 24 pollicum a *Schort* elaborato, diſtantias vero limborum Solis et Mercurii, nec non Diametrum eiusdem menſuraui tubo Dollondiano trium pedum triplici vitro obiectiuo praedito ac micrometro itidem obiectiuo inſtructo. En ipſam obſervationem.

| | Temp. Hor. | Temp. ver. Aſtr. |
|---|---|---|
| Iudico dimidiam circiter partem ☿ diſcum ☉lis ſubintraſſe - | $17^h.40'.30''$ | $16^h. 59'. 44''$ |
| Contactus internus limborum I. - | 17. 43. 5 | 17. 2. 19 |
| Vtraque obſeruatio inſtituta eſt limbis valde vndulantibus. | | |
| Contactus internus limborum II. - | 23. 8. 35 | 22. 26. 55 |
| Iuxta D^num^ *Tchernoi* - - - | 23. 8. 47 | 22. 27. 7 |
| Centrum ☿rii in limbo ☉lis - | 10. 30 | 28. 50 |
| Nullum veſtigium ☿rii in ☉le - | 12. 25 | 40. 35. |

Momentum pro contactu interno in introitu aſſumtum eſt a me illud, cum inter vndulantes et tremulos limbos filum lucidum mihi ſeſe obtulerit, id circo realis contactus aliquot minutis ſecundis a me obſeruatum praeceſſerit neceſſe eſt; in momento vero contactus externi in exitu dubius haeſi intra dimidium minutum primum, ſic vt a momento contactus externi ad minimum 15 minuta ſecunda demenda eſſe exiſtimem.

Poſt introitum Mercurii in diſcum Solis ceſſante iam prorſus vndulatione limborum accinxi memet ad diſtantias eorum menſurandas, nec non Diametrum Mercurii, qui ſemper prodiit modo 12 modo 13 partium Nonii, et cum error collimationis fuerit 5 partium, Diameter Mercurii in Sole intra 7″, 56 et 8″, 64 contineatur neceſſe eſt.

| Tempus Horolog. | Tempus verum Aſtr. | Diſt. limb. coll. corr. | Diſt. limb. in part. circ. |
|---|---|---|---|
| | | *n. dig. Non.* | |
| $19^h.19'.1''$ | $18^h.37'.58''$ | 7′. 20′ | 3′.30″,6 |
| 26. 15 | 45. 11 | 8. 6 | 3. 42, 48 |
| 29. 0 | 48. 6 | 8. 7 | 3. 43, 56 |
| 34. 8 | 53. 3 | 8. 14 | 3. 51, 12 |
| 36. 51 | 55. 46 | 8. 15 | 3. 52, 2 |
| 39. 32 | 58. 26 | 8. 18 | 3. 55, 44 |
| 40. 55 | 59. 49 | 8. 20 | 3. 57, 6 |
| 19. 43. 0 | 19. 1. 54 | 8. 21 | 3. 58, 68 |
| 46. 12 | 5. 5 | 8. 24 | 4. 1, 92 |
| 48. 0 | 6. 53 | 9. 2 | 4. 5, 16 |
| 50. 18 | 9. 10 | 9. 6 | 4. 9, 48 |
| 54. 58 | 13. 50 | 9. 8 | 4. 11, 64 |
| 20. 4. 46 | 19. 23. 36 | 9. 12 | 4. 15, 96 |
| 26. 40 | 45. 26 | 9. 18 | 4. 22, 44 |
| 29. 20 | 48. 5 | 9. 17 | 4. 21, 36 |

Tem-

| Tempus Horolog. | Tempus verum. Aſtr. | Diſt. limb. coll. corr. | Diſt. limb. in part. circ. |
|---|---|---|---|
| 21$^h$.35′.25′ | 19$^h$.54′.10″ | 9. 17 | |
| 37. 46 | 56. 30 | 9. 17 | |
| 41. 12 | 59. 55 | 9. 17 | |
| 46. 0 | 20. 4. 43 | 9. 15 | 4. 19, 2 |
| 52. 42 | 11. 24 | 9. 9 | 4. 12, 72 |
| 58. 22 | 17. 2 | 9. 6 | 4. 9, 48 |
| 21. 5. 21 | 20. 24. 0 | 9. 0 | 4. 3. |
| 11. 55 | 30. 33 | 8. 19 | 3. 56, 52 |
| 19. 45 | 38. 21 | 8. 12 | 3. 48, 96 |
| 24. 7 | 42. 43 | 8. 6 | 3. 42, 48 |

Peractis his obſeruationibus denuo coepi aliquoties Diametrum Mercurii, ac intra eosdem limites eum contineri reperi; poſt modum accinxi memet ad altitudines Solis correſpondentes capiendas.

Vt ex obſeruatione noſtra Elementa Theoriam Mercurii ſpectantia deducantur, via Mercurii viſa ad centrum Telluris eſt reducenda; hunc in finem iuxta tabulas Cel. *de la Lande* pro binis meridiebus veris Pariſinis, intra quos tranſitus cadit, ſequentia computaui Elementa.

| | 22 April. / 3 Maii. | 23 April. / 4 Maii. |
|---|---|---|
| Longit. ☉ vera | 1ˢ.13°. 8′. 2″ | 1ˢ.14°. 6′. 5″,7 |
| Aequatio temporis | — 3. 23 | — 3. 30. |
| Log. diſtantiae ♁ a ☉ | 5, 003984 | 5, 004088 |
| Diſtantia ♁ a ☉ | 1, 00922 | 1, 00945 |
| Longit. ☿ in orbita | 7. 11. 44. 19, 3 | 7. 14. 42. 7, 4 |
| — ☿ Heliocentr. | 7. 11. 46. 8, 2 | 7. 14. 42. 36, 4 |
| Latit. ☿ Heliocentr. | 29. 43, 6 | 8. 5, 0 Bor. |

 Log.

| | | |
|---|---|---|
| Log. diſtant. ☿ a ☉ | 4, 651737 | 4, 654641 |
| Diſtantia ☿ a ☉ | 0, 44847 | 0, 45149 |
| Longit. ☿ Geocentrica | 1. 14. 13. 29, 2 | 1. 13. 36. 33, 6 |
| Latit. ☿ Geocentrica | 23. 45, 5 | 6. 36, 5 |

Cum viderem motus horarios hinc oriundos diuerſos aliquantum prodire ab iis, quos Cel. *Bode* in Calendario Aſtronomico Berolinenſi propoſuit, repetii computum, et nullo in illo errore reperto conſtitui motibus proprio Marte erutis in ſequentibus inſiſtere, cuius modi ſunt:

| | |
|---|---|
| Motus horar. Solis - - - - - | 2′. 25″, 16 |
| Motus horar. ☿ Heliocentr. in Long. - | 7. 21, 17 |
| in Latit. - | 54, 1 |
| Motus horar. ☿ Geocentr. in Longit. - | 1. 32, 31 |
| in Latit. - | 42, 87 |
| Motus horar. a ☉ in Longit. - - | 3. 57, 47 |
| Inclinatio orbitae relatiuae - - | 10°. 14′. 0″ |
| Motus horar. ☿ in orbita relatiua - | 4. 1, 31 |

In reducenda orbita apparente ad centrum Telluris vt contraherem laborem, ſtatuta parallaxi Solis horizontali ad diem obſeruationis 8″, 5 parallaxin Mercurii a Sole obtinui 6″, 8; dein ope motuum horariorum computaui Longitudinem et Latitudinem Mercurii Geocentricam vna cum parallaxibus iis reſpondentibus pro ſequentibus momentis:

| Temp. ver. Petrop. | Longit. Solis. | Longit. Mercurii. | Parall. Long. | Latit. Mercur. | Parall. Lat. |
|---|---|---|---|---|---|
| 17ʰ. 2′. 19″ | 1ˢ.30°.44′.44″,3 | 1ˢ.13°.50′. 8″,6 | + 1″.385 | 12′.55″ | −6,593 |
| 18. 2. 19 | 47. 9, 4 | 48. 36, 2 | + 1, 56 | 12. 12, 1 | −6,41 |
| 19. 2. 19 | 49. 34, 6 | 47. 3, 9 | + 1, 51 | 11. 29, 2 | −6,14 |
| 20. 2. 19 | 51. 59, 7 | 45. 31, 6 | + 1, 24 | 10. 46, 3 | −5,81 |
| 21. 2. 19 | 54. 24, 9 | 43. 59, 3 | + 0, 77 | 10. 3, 5 | −5,47 |
| 22. 2. 19 | 56. 50, 1 | 42. 27, 0 | − 1, 24 | 9. 20, 6 | −5,11 |
| 22. 26. 55 | 1. 13. 57. 49, 6 | 1. 13. 41. 49, 2 | − 1, 241 | 9. 3, 1 | −4,547 |

Signa

Signa parallaxibus praefixa indicant operationem, quae inſtituenda eſt, vt ex Longitudine et Latitudine vera obtinentur apparens.

Antequam concluſiones ex his calculis deductas exponam, breuiter non nulla enarranda videntur de methodo, quam ex data centrorum diſtantia apparente in inueſtiganda vera ſiue e centro telluris ſpectata ſum ſecutus.

Repraeſentet A ⊙ B Eclipticam, E F viam Mercurii apparentem, ⊙ Solem, qui tanquam immobilis ſpectatur, dum Mercurius motu relatiuo orbitum E F deſcribere concipitur. Pro momento quocunque dato ſit *m* locus apparens Mercurii in orbita, et ⊙ *m* diſtantia centrorum ex obſeruatione concluſa, demiſſo ex *m* ad A B perpendiculo, *m p* exprimet Latitudinem Mercurii apparentem, et *p* ⊙ differentiam Longitudinum apparentem Solis et Mercurii. Computatis iam parallaxibus Mercurii a Sole in Longitudinem aeque ac in Latitudinem, et reſecta *p* P aequali parallaxi Mercurii a Sole in Longiiudinem erigatur perpendiculum P M aequale Latitudini Mercurii verae, punctum M erit locus Mercurii ex centro telluris viſus. Ducta igitur ⊙M et centro ⊙ deſcripto arcu *m g* pars reſecta M*g* addita ad diſtantiam obſeruatam *m* ⊙, aut ab eadem ſubtracta, prout circumſtantiae requirunt, dabit veram diſtantiam Centrorum Solis et Mercurii. Cardo igitur in eo verſatur, vt inueniatur reſecta *m g*. Cognita vero parallaxi Latitudinis Mercurii a Sole, et Latitudine eius vera P M ex Tabulis deſumta, dabitur Latitudo apparens *p m*: quamobrem ex triangulo rectangulo ⊙ *p m* computabitur angulus *p m* ⊙, et in triangulo M *m r* itidem rectangulo ex datis lateribus M*r* et *m r* parallaxes exprimentibus habebitur hypothenuſa M *m* vna cum angulo M *m r*; et cum ⊙ *m p* aequalis ſit angulo *g m r*, diffe- Tab. VII. Fig. 5.

 ren-

rentia angulorum $Mmr$ et $gmr$ dabit angulum $Mmg$: quam ob rem ex triangulo $Mmg$ obtinebitur reſecta $Mg$, quae in noſtro caſu addita ad diſtantiam centrorum obſeruatam dabit diſtantiam centrorum veram $\odot M$.

Quodſi pro alio momento medium tranſitus Mercurii inſequente ſimilem in modum computetur diſtantia centrorum vera $\odot N$, ex dato interuallo inter obſeruationes per motum horarium Mercurii in orbita relatiua innoteſcet valor lineae $MN$. In triangulo igitur $M \odot N$ cognitis omnibus tribus lateribus, ſi quaeratur perpendiculum $\odot D$ ex $\odot$ in $MN$ demiſſum, monſtrabit illud minimam diſtantiam centrorum ex centro Telluris viſam. Computus hic facile per logarithmos expeditur. Poſita etenim ſemiſumma laterum trianguli $= s$, $\odot M = a$, $\odot N = b$, $MN = c$ erit area trianguli

$$M \odot N = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

et cum eadem ſit $= \frac{1}{2} \odot D . MN$, habebitur

$$\odot D = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Inuenta $\odot D$ innoteſcent ſegmenta $MD$ et $ND$, quorum quodlibet in tempus conuerſum, et ad momentum obſervationis additum vel ab eo ſubtractum, pro vt circumſtantiae exigunt, dabit tempus medii tranſitus. Caeterum me non monente apparet, quo maius interuallum inter obſeruationes aſſumitur, eo exactius quantitatem lineae $\odot D$ determinatum iri.

Poſita iam Diametro Solis 31′. 44″, 2 qualem praebent Tabulae Cel. *de la Lande*, et Diametro Mercurii 8″, 2 qualis prodit ex menſuris a me captis pro qualibet obſeruatione computaui diſtantiam centrorum veram, ac ſequentem Tabulam obtinui.

Temp.

| Tempus ver. Petropolit. | | Diſt. Centr. appar. | Diſtant. Centr. vera. |
|---|---|---|---|
| I. | 18ʰ.37′.58″ | 12′.17″,[illegible] | 12′.22″,83 |
| II. | 45. 11 | 12. 5, 5 | 12. 10, 96 |
| III. | 48. 6 | 12. 4, 4 | 12. 9, 86 |
| IV. | 53. 3 | 11. 56, 8 | 12. 2, 26 |
| V. | 55. 46 | 11. 55, 8 | 12. 1, 27 |
| VI. | 58. 26 | 11. 52, 5 | 11. 57, 95 |
| VII. | 59. 59 | 11. 50, 4 | 11. 55, 87 |
| VIII. | 19. 1. 54 | 11. 49, 3 | 11. 54, 11 |
| IX. | 5. 5 | 11. 46, 1 | 11. 51, 56 |
| X. | 6. 53 | 11. 42, 8 | |
| XI. | 9. 10 | 11. 38, 5 | 11. 44, 01 |
| XII. | 13. 50 | 11. 36, 3 | |
| XIII. | 23. 36 | 11. 27, 7 | 11. 33, 23 |
| XIV. | 45. 26 | 11. 25, 5 | 11. 31, 51 |
| XV. | 48. 5 | 11. 26, 7 | 11. 32, 73 |
| XVI. | 54. 10 | 11. 26, 7 | 11. 32, 67 |
| XVII. | 56. 30 | 11. 26, 7 | 11. 32, 65 |
| XVIII. | 59. 55 | 11. 26, 7 | 11. 32, 61 |
| XIX. | 20. 4. 43 | 11. 30, 8 | 11. 34, 59 |
| XX. | 11. 24 | 11. 35, 3 | 11. 40, 89 |
| XXI. | 17. 2 | 11. 38, 5 | 11. 44, 11 |
| XXII. | 24. 0 | 11. 45, 0 | 11. 50, 49 |
| XXIII. | 30. 33 | 11. 51, 4 | 11. 56, 77 |
| XXIV. | 38. 21 | 11. 59, 0 | 12. 4, 32 |
| XXV. | 20. 42. 43 | 12. 5, 5 | 12. 10, 72 |
| Cont.int.II. | 22. 26. 55 | 15. 48, 0 | 15. 49, 54 |

Ne diſtantia minima ⊙ ☽ hinc elicienda ob in euitabiles obſeruationum errores minus certa euadat, eas potiſſimum obſeruationes ad combinationes ſelegi, quae diſtarent inter ſe inter-

interuallo vnius horae cum dimidio, ac ſequentem laterculum obtinui, vbi non ſolum valores laterum trianguli, et minima diſtantia ex qualibet combinatione reſultans, verum etiam tempus medii tranſitus, quale quodlibet ſegmentorum M D et N D praebeat, ob oculos ponitur.

| | Obſeru. | ⊙ M. | ⊙ N | M N | ⊙ D. | Temp. med. Tranſ. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | XX. | 742,83 | 700,89 | 375,77 | 692,63 | 19$^h$.44$'$.43$''$ |
| | XXI. | | 704,11 | 398,42 | 692,21 | 44. 58 |
| | XXII. | | 710,49 | 426,44 | 692,66 | 44. 51 |
| | XXIII. | | 716,77 | 452,79 | 692,63 | 44. 42 |
| | XXIV. | | 724,32 | 484,16 | 691,96 | 45. 8 |
| | XXV. | | 730,72 | 501,72 | 692,53 | 44. 46 |
| | Cont.int.II. | | 949,54 | 920,78 | 691,82 | 19. 45. 15 |
| II. | XX. | 730,96 | 700,89 | 346,75 | 692,00 | 19. 43. 44 |
| | XXI. | | vt | 369,40 | 691,49 | 44. 4 |
| | XXII. | | ſupra | 397,42 | 691,86 | 43. 49 |
| | XXIII. | | | 423,76 | 691,75 | 43. 54 |
| | XXIV. | | | 455,13 | 691,04 | 44. 25 |
| | XXV. | | | 472,70 | 691,57 | 44. 4 |
| | Cont.int.II. | | | 891,76 | 690,44 | 19. 44. 51 |
| III. | XX. | 729,86 | | 335,01 | 692,87 | 19. 45. 8 |
| | XXI. | | | 357,67 | 692,70 | 45. 24 |
| | XXII. | | | 385,69 | 693,00 | 45. 2 |
| | XXIII. | | | 412,04 | 693,00 | 45. 2 |
| | XXIV. | | | 443,40 | 692,41 | 45. 29 |
| | XXV. | | | 460,96 | 692,96 | 45. 4 |
| | Cont.int.II. | | | 880,03 | 692,52 | 19. 45. 24 |

IV.

| | Obſeruat. | ⊙ M. | ⊙ N. | M N. | ⊙ D. | Temp. med. Tranſ. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| IV. | XX. | 722,26 | 700,89 | 315,10 | 692,33 | $19^h.44'.14''$ |
| | XXI. | | 704,11 | 337,76 | 691,87 | 44. 35 |
| | XXII. | | 710,49 | 365,78 | 692,25 | 44. 15 |
| | XXIII. | | 716,77 | 392,12 | 692,19 | 44. 24 |
| | XXIV. | | 724,32 | 423,49 | 691,56 | 44. 50 |
| | XXV. | | 730,72 | 441,06 | 691,88 | 44. 34 |
| | Cont.int.II. | | 949,54 | 860,12 | 691,28 | 45. 5 |
| V. | XX. | 721,27 | 700,89 | 304,18 | 693,06 | 19. 45. 26 |
| | XXI. | | vt | 326,84 | 692,75 | 45. 42 |
| | XXII. | | ſupra | 354,86 | 693,22 | 45. 18 |
| | XXIII. | | | 381,20 | 693,26 | 45. 17 |
| | XXIV. | | | 412,57 | 692,72 | 45. 42 |
| | XXV. | | | 430,14 | 693,24 | 45. 17 |
| | Cont.int.II. | | | 849,20 | 692,98 | 19. 45. 30 |
| VI. | XX. | 717,95 | | 293,46 | 692,91 | 19. 45. 11 |
| | XXI. | | | 316,12 | 692,59 | 45. 28 |
| | XXII. | | | 344,13 | 693,00 | 45. 5 |
| | XXIII. | | | 370,47 | 693,00 | 45. 5 |
| | XXIV. | | | 401,84 | 692,46 | 45. 33 |
| | XXV. | | | 419,41 | 693,00 | 45. 5 |
| | Cont.int.II. | | | 838,48 | 692,60 | 19. 45. 25 |

Numerum harum combinationum facile augere potuiſſem conferendo praeſertim contactum internum in exitu obſeruatum cum diſtantiis ante tempus medii tranſitus captis; verum laborem hunc ſuſcipere ſuperfluum eſſe exiſtimaui, cum valores pro minima diſtantia reperti tam arctis contineantur limitibus, vt maximus a minimo non differat niſi 2″,8 ſic vt ſumendo ex omnibus medio prodeat minima centrorum diſtan-

 tia

tia ad veram proxime accedens 11′. 32″. 4. Quodſi determinationes a comparatione II. obſeruationis petitas, vt pote a reliquis aliquantum diſſentientes, excludere velimus, prodibit minima centrorum diſtantia 11′. 32″, 5, quam tamen ad 11′. 32″. deprimere licebit, quia obſeruatio XIV. circa tempus medii tranſitus inſtituta pro minima diſtantia centrorum praebet 11′. 31″, 5. Tempus autem medii tranſitus ſumto ex omnibus determinationibus medio prodit ad meridianum Petropolitanum $19^h. 44'. 45''$; ſepoſitis vero concluſionibus, quas praebet obſeruatio II. cum reliquis collata, tempus medii tranſitus invenitur $19^h. 45'. 6''$, quod iure aliquot ſecundis augeri poſſe exiſtimo; nam non ſolum hae, quas recenſui combinationes, verum etiam omnes fere reliquae obſeruationes ante tempus medii tranſitus captae et collatae cum momento contactus interni in exitu pro medio tranſitu praebent eiusmodi momentum, quod allatum ſuperat 12 imo etiam 15 minutis ſecundis.

Statuta iam minima centrorum diſtantia ex centro telluris viſa rotunde 11′. 32″, tempore medii tranſitus $19^h. 45'. 6''$. prodibit mora Mercurii in Sole $5^h. 22'. 12''$. Cum vero contactus internus in introitu Petropoli ob parallaxin accelerari debuerit 1′. 41″. in exitu vero retardari 32″, mora Mercurii ex centro viſa per obſeruationem concluditur $5^h. 22'. 23''$, quae illam ſuperat tantum 11″.

Manentibus iisdem Elementis reperitur L D = 124″,92 quae in tempus conuerſa dat 31′. 4″: vnde tempus verum coniunctionis ad Meridianum Petropolitanum concluditur $19^h. 14'. 2''$ et Latitudo Mercurii pro momento coniunctionis 11′. 43″, 1 non habita ratione Aberrationis. Latitudinem inuentam confirmant etiam obſeruationes circa diſtantias limborum inſtitutae; caſu etenim euenit, vt obſeruatio XII. capta ſit ipſo fere momen-

momento coniunctionis, pro quo cum diſtantia centrorum apparens fuerit 11′. 36″, 3 et parallaxis Latitudinem minuens 6″, 08, Latitudo Mercurii vera habebitur 11′. 42″. 38. Cum itaque Longitudo Solis pro momento coniunctionis ſit 1ˢ. 13°. 50′. 2″, 9 Mercurii vero Longitudo Geocentrica 1ˢ. 13°. 46′. 45″, 9 cum Latitudine 11′. 20″, 8 patet tabulas Cel. *de la Lande* peccare in defectu in Longitudinem 3′. 17″ et in Latitudinem 23″.

Cognita pro momento coniunctionis Latitudine Geocentrica 11′. 43″, 1 reperitur Latitudo Heliocentrica 14′. 31″. Porro aſſumta inclinatione orbitae Mercurii ad Eclipticam 6°. 59′. 30″, quanta ſequitur ex motibus Heliocentricis ſupra relatis, inuenitur arcus Heliocentricus inter punctum Nodi et coniunctionis interceptus 1°. 58′. 45″; vnde Longitudo Nodi Heliocentrica obtinetur 1ˢ. 15°. 48′. 46. Iam vero Tabulae Cel. *de la Lande* eandem dant 1ˢ. 15′. 48′. 30″, ſequitur hinc Longitudinem Nodi tabularem peccare in defectu 16″. Quodſi ſumatur inclinatio orbitae ad Eclipticam 7°. 0′. 0″. tanta ſc. quantam ſtatuit Cel. *de la Lande*, prodit Longitudo Nodi 8 minutis ſecundis a Tabulari deficiens. Cum itaque anno 1753 die 6 Maii ex tranſitu Mercurii per diſcum Solis Longitudo Nodi aſcendentis reperta fuerit 1ˢ. 15°. 23′. 30″, habebitur motus Nodi annuus 45″, 2 ſiue 46″ pro vt haec vel illa aſſumitur inclinatio orbitae Mercurii ad Eclipticam, id quod egregie confirmat determinationem Cel. *de la Lande*, qui motum Nodi annuum ſtatuit 45″. vid. Aſtron. Tom. II. pag. 115.

Quanquam de limitibus, intra quos cadit Diameter Mercurii per menſuras multoties repetitas conuictus fuerim; attamen vt conſtaret, vtrum in computo iuſto maior minorue Diameter Mercurii fuerit adhibita, experiri volui, quanta illa reſul-

tet ex mora Mercurii in limbo Solis. Momentum contactus externi in exitu a me obſeruatum procul dubio peccat in exceſſu, quam ob rem conſultius duxi Diametrum Mercurii concludere ex mora a Cel. *Inochodzoff* obſeruata ſc. 3′. 3″, quae Diametrum Mercurii dat 8″,4. Quodſi mora Mercurii in limbo Solis ſtatuatur 3′. 20″ quanta ſequitur ex momento contactus interni a me obſeruati collato cum contactu externo a Cel. *Inochodzoff* obſeruato, reperitur Diameter Mercurii 9″,2, quae ſi in computo adhibeatur, minima diſtantia centrorum Solis et Mercurii dimidio minuto ſecundo minuetur; Quam tamen vltra 11′. 31″. 5, deprimere non auſerim repugnantibus omnibus, quas circa diſtantias limborum inſtitui, obſeruationibus.

---

SUR

# SUR LA SURFACE GÉOMETRIQUE DE LA RUSSIE SELON LA NOUVELLE CARTE GÉNÉRALE DE CET EMPIRE PUBLIÉE PAR L'ACADÉMIE.

par
*M. KRAFFT.*

*Préſenté le* 21 *Septembr.* 1786.

Dans la ſuite des recherches que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Académie, ſur l'importance & l'utilité, dont pourroit être pour la Ruſſie un établiſſement général des Tables de mortalité & de fécondité étendûes ſur des Gouvernemens entiers de cet Empire, il m'a fallu comparer enſemble les ſurfaces géometriques de ſes différentes Provinces, vû que ces ſurfaces & leur rapport, eu égard en même temps à la différence de leurs climats & au degré de leur fertilité, entrent néceſſairement dans l'appréciation de leurs populations poſſibles, & que comparées avec les nombres de leurs habitans actuels elles font connoitre ce qu'on pourroit appeller la denſité réelle de leur population. Engagé par cette occaſion dans ces ſortes de calculs, je me ſuis propoſé d'évaluer avec autant de préciſion que permet la nature de l'objet, la ſur-

 face

face géometrique de la Ruſſie en général, & de faire ce calcul de façon, qu'on puiſſe en faire l'application à une contrée donnée quelconque, & en tirer des conſéquences, rélatives à la Géographie phyſique de ce vaſte Empire. Il ne ſera peut-être pas ſans aucun interèt de faire ici un court expoſé de la méthode que j'y ai ſuivie, d'y joindre une table, qu'elle m'a fournie moyennant laquelle on calcule avec aſſés de facilité & de précision une ſurface quelconque répreſentée ſur une carte géographique, & d'en faire l'application à la nouvelle carte génerale de la Ruſſie, publiée dernierement par l'Académie.

## I. Expreſſion générale de la ſurface d'une Zone quelconque du Sphéroïde terreſtre.

Dans l'Ellipſe, qui forme les méridiens de la Terre, & qui par la révolution autour de ſon petit axe engendre le Sphéroïde terreſtre, ſoit le demi-grand axe $= a$; le demi-petit axe $= b = m . a$; l'abſciſſe $= x$ priſe du centre ſur le demi-petit axe; l'appliquée orthogonale $= y$ et l'arc correspondant $= s$; l'équation de l'ellipſe ſera $x^2 + m^2 y^2 = b^2$; d'où l'on tire la ſous-normale $- \frac{x \partial x}{\partial y} = m^2 . y$. Faiſant donc la latitude géographique de l'extrémité de l'arc $= \lambda$, on aura $x = m^2 y . \text{tang.} \lambda$; laquelle valeur étant ſubſtituée dans l'équation précédente, & en mettant $1 - m^2 = k^2$; on a

$$x = \frac{m^2 . a . \text{ſin.} \lambda}{\sqrt{(1 - k^2 \, \text{ſin.} \lambda^2)}} \;\&\; y = \frac{a . \text{coſ.} \lambda}{\sqrt{(1 - k^2 . \text{ſin.} \lambda^2)}}.$$

Les différentielles de ces deux valeurs:

$$\partial x = \frac{m^2 . a . \partial \lambda . \text{coſ.} \lambda}{(1 - k^2 \, \text{ſin.} \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \;\&\; \partial y = \frac{- m^2 . a . \partial \lambda . \text{ſin.} \lambda}{(1 - k^2 \, \text{ſin.} \lambda^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donnent

donnent l'élément du méridien $\partial s = \frac{m^2 \cdot a \cdot \partial \lambda}{(1 - k^2 \text{ſin.} \lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$; lequel étant multiplié par $\frac{2\pi \cdot a \cdot \text{coſ.} \lambda}{\sqrt{(1 - k^2 \text{ſin.} \lambda^2)}}$, péripherie du parallele, dont le rayon $= y$, & $\pi$ deſignant le rapport de la péripherie à ſon diametre, on obtient pour la ſurface de la Zone élémentaire du Sphéroïde entre deux paralleles infiniment proches $\partial Z = 2\pi \cdot m^2 a^2 \cdot \frac{\partial \lambda \cdot \text{coſ.} \lambda}{(1 - k^2 \text{ſin.} \lambda^2)^2}$. Or pour intégrer cette différentielle le moyen le plus ſimple c'eſt de faire $k \cdot \text{ſin.} \lambda = \frac{u-1}{u+1}$, pour la changer en celle-cy

$$\partial Z = \frac{\pi \cdot m^2 a^2}{4k} \cdot \left(\frac{u+1}{u}\right)^2 \cdot \partial u,$$

qui a pour ſon intégrale priſe enſorte qu'elle évanouiſſe pour le cas $u = 1$,

$$Z = \frac{\pi \cdot m^2 a^2}{4k} \left(\frac{u^2 - 1}{u} + 2 \cdot \text{Log. hyp.}\ u\right).$$

Subſtituant donc la valeur $u = \frac{1 + k\,\text{ſin.}\,\lambda}{1 - k\,\text{ſin.}\,\lambda}$, qui pour le cas $u = 1$ donne $\lambda = 0$, on a pour la ſurface de la Zone du Sphéroïde priſe depuis l'Equateur jusqu'au parallele de la latitude $= \lambda$.

$$Z = \pi\, m^2 a^2 \left[\frac{\text{ſin.}\,\lambda}{1 - k^2 \text{ſin.}\,\lambda^2} + \frac{1}{k} \text{Log. hyp.} \sqrt{\frac{1 + k\,\text{ſin.}\,\lambda}{1 - k\,\text{ſin.}\,\lambda}}\right].$$

Cette expreſſion étant encore aſſés embaraſſante pour le calcul, on aura, en developpant la différentielle en ſerie,

$$Z = 2\pi \cdot m^2 a^2\, \text{ſin.}\,\lambda \left(1 + \tfrac{2}{3} k^2\, \text{ſin.}\,\lambda^2 + \tfrac{3}{5} k^4\, \text{ſin.}\,\lambda^4 + \&c.\right)$$

qui par la transformation des puiſſances des ſinus en ſinus des angles multiples ſe change en celle-cy:

$$Z = 2\pi \cdot m^2 a^2 (P \cdot \text{ſin.}\,\lambda - Q \cdot \text{ſin.}\,3\lambda + R \cdot \text{ſin.}\,5\lambda - \&c.)$$

où l'on a

$$P = 1 + \tfrac{1}{2} k^2 + \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 + \tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 + \&c. = \tfrac{1}{m}$$

$$Q = \tfrac{1}{2} k^2 \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \cdot \tfrac{2}{4} + \tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \cdot \tfrac{3}{5} + \&c.$$

$$R = \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4\, \tfrac{2 \cdot 1}{4 \cdot 6} + \tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6\, \tfrac{3 \cdot 2}{5 \cdot 6} + \&c.$$

Donc

Donc pour la ſurface de la Zone du Sphéroïde compriſe entre deux paralleles quelconques, dont les Latitudes ſoyent L & λ, en faiſant $\lambda = L + \mu$; on aura

$$Z[L.\lambda] = 4\pi . m^2 . a^2 \left[ \begin{array}{l} P.\text{coſ.}(\lambda - \tfrac{1}{2}\mu) . \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\mu - Q.\text{coſ.}3(\lambda - \tfrac{1}{2}\mu)\,\text{ſin.}\tfrac{3}{2}\mu \\ \quad + R.\text{coſ.}\,5\,(\lambda - \tfrac{1}{2}\mu) . \text{ſin.}\tfrac{5}{2}\mu - \text{\&c.} \end{array} \right.$$

Mettant $m = 1$ & conſéquemment $k = 0$, ces formules à cauſe de $\frac{1}{k}$ Log. hyp. $\sqrt{\frac{1 + k\,\text{ſin.}\,\lambda}{1 - k\,\text{ſin.}\,\lambda}} = \frac{0}{0} = \text{ſin.}\,\lambda$; $P = 1$; $Q = 0$; $R = 0$; &c. nous donnent $Z = 2\pi . a^2 . \text{ſin.}\,\lambda$ &

$$Z[L . \lambda] = 4\pi . a^2\,\text{coſ.}\,(\lambda - \tfrac{1}{2}\mu)\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\mu,$$

pour les ſurfaces des Zones d'une Sphére, dont le rayon $= a$. Mais en ſuppoſant l'applatiſſement du Spheroïde $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{200}$; on a $m = 0{,}995$ et $k = 0{,}09987492$; d'où l'on trouve les valeurs $P = 1{,}005025$; $Q = 0{,}0016813$; $R = 0{,}0000038$; & en faiſant $2\pi . m^2 = \alpha$; $\frac{2}{3}k^2 . \alpha = \beta$; $\frac{3}{5}k^4 . \alpha = \gamma$ &c. & $P\alpha = A$; $Q\alpha = B$ &c. & conſéquemment $\alpha = 6{,}2205105$; $\beta = 0{,}0413664$; $\gamma = 0{,}0003714$; $\delta = 0{,}0000035$; &c. on aura

$$Z = a^2(\alpha . \text{ſin.}\,\lambda + \beta . \text{ſin.}\,\lambda^3 + \gamma . \text{ſin.}\,\lambda^5 + \delta . \text{ſin.}\,\lambda^7,\ \text{\&c.})$$

ou par une progreſſion des angles multiples

$$Z = a^2\,(A . \text{ſin.}\,\lambda - B . \text{ſin.}\,3\lambda + C . \text{ſin.}\,5\lambda - \text{\&c.})\ \&$$

$$Z[L . \lambda] = 2\,a^2 \left[ \begin{array}{l} A . \text{coſ.}\,(\lambda - \tfrac{1}{2}\mu) . \text{ſin.}\tfrac{1}{2}\mu - B . \text{coſ.}\,3\,(\lambda - \tfrac{1}{2}\mu) . \text{ſin.}\tfrac{3}{2}\mu \\ \quad + C . \text{coſ.}\,5\,(\lambda - \tfrac{1}{2}\mu) . \text{ſin.}\tfrac{5}{2}\mu - \text{\&c.} \end{array} \right.$$

Ces formules, en négligeant les termes ſuivans, donnent une approximation d'un degré plus que ſuffiſant de préciſion; car en mettant $L = 0°$ & $\lambda = 90°$; elles donnent

$$Z = a^2\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = a^2 . 6{,}\,262252,$$

pour toute la ſurface du demi-Sphéroïde, valeur, qui ne diffère en rien de celle, qu'on obtient par la formule rigoureuſe

$$Z = \pi . a^2 . (1 + \tfrac{m^2}{k} . \text{Log. hyp.}\,\tfrac{1+k}{m}),$$

&

& cette ſurface ſurpaſſe dans le rapport de $\frac{2(A + B + C)}{(1 + m)^2 . \pi}$ à 1 la ſurface d'une demi-ſphère, dont le rayon ſeroit $\frac{(1 + m) . a}{2}$, milieu arithmétique entre les deux demi-axes du Sphéroïde.

Pour appliquer ces formules à la conſtruction d'une Table, qui ſoit propre à calculer la ſurface ſphéroïdique d'une Contrée quelconque, on fera $\mu = 0°. 30'$, & elle préſentera les ſurfaces des Zones de demi en demi degré de latitude. C'eſt ſous cette forme qu'elles ont ſervi pour conſtruire la Table ſuivante, qui peut être de quelque application dans la Géographie mathématique.

## II. Surfaces des Zones d'un Sphéroïde, dont le demi-grand axe $= a$ & l'applatiſſement $= \frac{1}{230}$.

| Entre les Paralleles des Latitud. | $a^2$ multiplié par | Entre les Paralleles des Latitud. | $a^2$ multiplié par | Entre les Paralleles des Latitud. | $a^2$ multiplié par |
|---|---|---|---|---|---|
| 0°. 0′ | | 6°. 0′ | | 12°. 0′ | |
| | 0,05428.3 | | 0,05397 | | 0,05309 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,05428. | | 0,05392 | | 0,05300 |
| 1 0 | | 7 0 | | 13 0 | |
| | 0,05427 | | 0,05387 | | 0,05289 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,05426 | | 0,05381 | | 0,05279 |
| 2 0 | | 8 0 | | 14 0 | |
| | 0,05424 | | 0,05374 | | 0,05268 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,05422 | | 0,05368 | | 0,05256 |
| 3 0 | | 9 0 | | 15 0 | |
| | 0,05420 | | 0,05361 | | 0,05245 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,05417 | | 0,05353 | | 0,05232 |
| 4 0 | | 10 0 | | 16 0 | |
| | 0,05414 | | 0,05345 | | 0,05220 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,05410 | | 0,05336 | | 0,05207 |
| 5 0 | | 11 0 | | 17 0 | |
| | 0,05406 | | 0,05328 | | 0,05193 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,05402 | | 0,05319 | | 0,05180 |
| 6 0 | | 12 0 | | 18 0 | |

## II. Surfaces des Zones d'un Sphéroïde, dont le demi-grand axe $= a$ & l'applatiſſement $= \frac{1}{230}$.

| Entre les Paralleles des Latitud. | $a^2$ multiplié par | Entre les Paralleles des Latitud. | $a^2$ multiplié par | Entre les Paralleles des Latitud. | $a^2$ multiplié par |
|---|---|---|---|---|---|
| 18°. 0′ | 0,05165 | 30°. 0′ | 0,04713 | 42°. 0′ | 0,04055 |
| 30 | 0,05151 | 30 | 0,04690 | 30 | 0,04023 |
| 19 0 | 0,05136 | 31 0 | 0,04666 | 43 0 | 0,03991 |
| 30 | 0,05121 | 30 | 0,04642 | 30 | 0,03959 |
| 20 0 | 0,05105 | 32 0 | 0,04617 | 44 0 | 0,03926 |
| 30 | 0,05089 | 30 | 0,04592 | 30 | 0,03894 |
| 21 0 | 0,05073 | 33 0 | 0,04567 | 45 0 | 0,03860 |
| 30 | 0,05056 | 30 | 0,04541 | 30 | 0,03827 |
| 22 0 | 0,05039 | 34 0 | 0,04515 | 46 0 | 0,03793 |
| 30 | 0,05021 | 30 | 0,04489 | 30 | 0,03759 |
| 23 0 | 0,05003 | 35 0 | 0,04463 | 47 0 | 0,03725 |
| 30 | 0,04985 | 30 | 0,04436 | 30 | 0,03690 |
| 24 0 | 0,04966 | 36 0 | 0,04408 | 48 0 | 0,03655 |
| 30 | 0,04947 | 30 | 0,04381 | 30 | 0,03620 |
| 25 0 | 0,04928 | 37 0 | 0,04353 | 49 0 | 0,03585 |
| 30 | 0,04908 | 30 | 0,04324 | 30 | 0,03548 |
| 26 0 | 0,04888 | 38 0 | 0,04296 | 50 0 | 0,03512 |
| 30 | 0,04867 | 30 | 0,04267 | 30 | 0,03476 |
| 27 0 | 0,04846 | 39 0 | 0,04237 | 51 0 | 0,03440 |
| 30 | 0,04825 | 30 | 0,04208 | 30 | 0,03403 |
| 28 0 | 0,04803 | 40 0 | 0,04178 | 52 0 | 0,03365 |
| 30 | 0,04781 | 30 | 0,04148 | 30 | 0,03327 |
| 29 0 | 0,04759 | 41 0 | 0,04117 | 53 0 | 0,03290 |
| 30 | 0,04736 | 30 | 0,04086 | 30 | 0,03252 |
| 30 0 | | 42 0 | | 54 0 | |

## II. Surfaces des Zones d'un Sphéroïde, dont le demi-grand axe $= a$ & l'applatiſſement $= \frac{1}{253}$.

| Entre les Paralleles des Latitud. | $a^2$ multiplié par | Entre les Paralleles des Latitud. | $a^2$ multiplié par | Entre les Paralleles des Latitud. | $a^2$ multiplié par |
|---|---|---|---|---|---|
| 54°. 0′ | | 66°. 0′. | | 77°. 0′. | |
| | 0,03213 | | 0,02223 | | 0,01126 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,03175 | | 0,02179 | | 0,01080 |
| 55 0 | | 67 0 | | 79 0 | |
| | 0,03136 | | 0,02135 | | 0,01032 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,03097 | | 0,02091 | | 0,00985 |
| 56 0 | | 68 0 | | 80 0 | |
| | 0,03058 | | 0,02047 | | 0,00937 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,03018 | | 0,02001 | | 0,00890 |
| 57 0 | | 69 0 | | 81 0 | |
| | 0,02979 | | 0,01957 | | 0,00842 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,02938 | | 0,01912 | | 0,00794 |
| 58 0 | | 70 0 | | 82 0 | |
| | 0,02898 | | 0,01867 | | 0,00747 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,02857 | | 0,01822 | | 0,00700 |
| 59 0 | | 71 0 | | 83 0 | |
| | 0,02816 | | 0,01777 | | 0,00652 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,02776 | | 0,01731 | | 0,00603 |
| 60 0 | | 72 0 | | 84 0 | |
| | 0,02734 | | 0,01685 | | 0,00555 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,02693 | | 0,01639 | | 0,00506 |
| 61 0 | | 73 0 | | 85 0 | |
| | 0,02652 | | 0,01594 | | 0,00459 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,02609 | | 0,01547 | | 0,00410 |
| 62 0 | | 74 0 | | 86 0 | |
| | 0,02567 | | 0,01501 | | 0,00362 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,02525 | | 0,01455 | | 0,00314 |
| 63 0 | | 75 0 | | 87 0 | |
| | 0,02483 | | 0,01408 | | 0,00266 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,02441 | | 0,01362 | | 0,00217 |
| 64 0 | | 76 0 | | 88 0 | |
| | 0,02396 | | 0,01315 | | 0,00169 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,02354 | | 0,01268 | | 0,00121 |
| 65 0 | | 77 0 | | 89 0 | |
| | 0,02311 | | 0,01222 | | 0,00073 |
| 30 | | 30 | | 30 | |
| | 0,02267 | | 0,01173 | | 0,00024 |
| 66 0 | | 78 0 | | 90 0 | |

Pour l'application de cette Table, en ſe ſervant des lieux géographiques, dont 5400 valent la péripherie de l'E'quateur du Sphéroïde, on aura $a = 859, 437$ lieux géographiques, & en comptant 104, 5 Werſtes ruſſes ſur un degré de l'E'quateur, on aura $a = 5987, 41$ Werſtes ruſſes.

## III. E'valuation de la ſurface de la Ruſſie par Zones de demi en demi degré de latitude.

Le calcul ſuivant, qui préſente un tableau de la ſurface de la Ruſſie détaillé de demi en demi degré de latitude, a pour baſe la Carte générale de cet Empire publiée par l'Académie l'an 1786. Le mot: *meſure aréale*, y déſigne une partie de la ſurface du Globe ayant un degré de longitude, & compriſe entre deux Paralleles quelconques, dont la différence de latitude ſoit d'un demi-degré. La ſeconde colonne de la Table qui ſuit, contient le nombre des méſures aréales de la Ruſſie ſous chaque Zone entre les Paralleles marqués dans la premiere colonne, & la troiſieme exprime par le moyen de la Table donnée cy-deſſus (*) les valeurs de ces nombres en Lieux géographiques quarrés. Dans ces nombres ſont compris tous les lacs & toutes les mers intérieures, avec excluſion de tous les golfes des mers limitrophes; auſſi a-t-on tenu compte des parties ſaillantes & rentrantes des limites.

(*) Dans ce calcul j'ai employé plus de parties décimales, que je n'ai jugé néceſſaire d'exprimer dans la Table générale donnée cy-deſſus.

La

## La Ruſſie contient

| Entre les Paralleles des Latitud. | Méſures areales. | Lieux géograph quarrés. | Entre les Paralleles des Latitud. | Méſures areales. | Lieux géograph quarrés. | Entre les Paralleles des Latitud. | Méſures areales. | Lieux géograph. quarrés. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 42°. 30′ | 0,8 | 68,7 | 54°. 30′ | 103,9 | 6772,9 | 66°. 30′ | 151,2 | 6761,7 |
| 43 0 | 8,4 | 688,5 | 55 0 | 103,7 | 6671,1 | 67 0 | 148,4 | 6503,5 |
| 30 | 14,7 | 1192,1 | 30 | 113,5 | 7209,9 | 30 | 146,6 | 6288,2 |
| 44 0 | 17,1 | 1380,8 | 56 0 | 117,9 | 7397,2 | 68 0 | 137,9 | 5791,6 |
| 30 | 20,0 | 1602,3 | 30 | 120,6 | 7469,8 | 30 | 127,1 | 5221,0 |
| 45 0 | 24,0 | 1897,5 | 57 0 | 120,7 | 7375,3 | 69 0 | 120,0 | 4821,7 |
| 30 | 20,4 | 1603,5 | 30 | 120,4 | 7259,8 | 30 | 113,8 | 4464,6 |
| 46 0 | 25,4 | 1980,2 | 58 0 | 120,8 | 7182,8 | 70 0 | 108,2 | 4145,2 |
| 30 | 30,7 | 2365,7 | 30 | 121,6 | 7128,1 | 30 | 108,4 | 4051,3 |
| 47 0 | 37,9 | 2899,3 | 59 0 | 123,5 | 7138,2 | 71 0 | 97,7 | 3562,3 |
| 30 | 40,8 | 3091,3 | 30 | 128,7 | 7330,5 | 30 | 89,6 | 3181,4 |
| 48 0 | 45,3 | 3396,7 | 60 0 | 134,0 | 7518,3 | 72 0 | 73,0 | 2524,5 |
| 30 | 53,0 | 3931,0 | 30 | 137,5 | 7595,1 | 30 | 67,4 | 2266,8 |
| 49 0 | 59,0 | 4343,4 | 61 0 | 140,2 | 7631,4 | 73 0 | 48,2 | 1577,1 |
| 30 | 66,8 | 4865,7 | 30 | 140,0 | 7491,6 | 30 | 31,0 | 984,0 |
| 50 0 | 73,0 | 5269,4 | 62 0 | 139,8 | 7367,0 | 74 0 | 30,6 | 942,9 |
| 30 | 75,6 | 5380,5 | 30 | 141,8 | 7346,1 | 30 | 29,6 | 884,4 |
| 51 0 | 80,7 | 5694,0 | 63 0 | 144,9 | 7384,0 | 75 0 | 25,0 | 723,1 |
| 30 | 87,9 | 6139,5 | 30 | 145,7 | 7297,6 | 30 | 24,5 | 685,9 |
| 52 0 | 91,8 | 6317,6 | 64 0 | 147,2 | 7238,8 | 76 0 | 28,7 | 773,4 |
| 30 | 93,1 | 6354,5 | 30 | 146,1 | 7055,7 | 30 | 21,6 | 562,8 |
| 53 0 | 92,3 | 6229,7 | 65 0 | 147,3 | 6983,9 | 77 0 | 12,9 | 323,7 |
| 30 | 93,6 | 6248,5 | 30 | 154,2 | 7174,7 | 30 | 4,8 | 116,3 |
| 54 0 | 97,6 | 6433,9 | 66 0 | 152,5 | 6955,3 | 78 0 | 0,0 | 0,0 |
| 30 | | | 30 | | | 30 | | |



IV. Re-

## IV. Reſumé de la Table précedente:

La Table donnée cy-deſſus nous fournit les déterminations ſuivantes:

1.) En allant de 5 à 5 degrés de latitude, la Ruſſie contient

| Entre les Latitudes. | | | | Lieux géo-graph. quarr. | Werſtes quarrées. |
|---|---|---|---|---|---|
| 42°. 30′ | | & 45°. 0′. | | 4933 | 239420 |
| 45 | 0 | 50 | 0 | 30374 | 1474222 |
| 50 | 0 | 55 | 0 | 60840 | 2952903 |
| 55 | 0 | 60 | 0 | 72163 | 3502472 |
| 60 | 0 | Cercle | pol. | 95039 | 4612771 |
| Cercle | pol. | 70 | 0 | 39852 | 1934238 |
| 70 | 0 | 75 | 0 | 24120 | 1170678 |
| 75 | 0 | 78 | 0 | 3185 | 154586 |

2.) La Ruſſie contient

| dans la Zone | Lieux géo-graph. quarr. | Werſtes quarrées |
|---|---|---|
| glaciale - - | 67157 | 3259502 |
| temperée - | 263349 | 12781788 |

Donc des deux parties de la Ruſſie diſtinguées par le cercle polaire, celle qui eſt ſituée dans la Zone temperée, ſurpaſſe dans le rapport de 4 à 1 celle, qui ſe trouve dans la Zone glaciale.

3.) La totalite de la ſurface géometrique de la Ruſſie eſt de 330506 lieux géographiques quarrés, ou de 16041290 Werſtes quarrées.

4.) Dans

4.) Dans ce total ſont compris nommément

| | Lieux géograph. quarrés. | Werſtes quarrées. |
|---|---|---|
| L'enſemble de toutes les Lieutenances générales, la Tauride & le pays des Coſaques du Don - - - - - | 282064 | 13690132 |
| Nova Zembla - - - - - | 4310 | 209188 |
| Le pays des Tſchouktſches - | 13168 | 639116 |
| Kamtſchatka - - - - - | 4053 | 196714 |
| Le pays des Kirguis - Coſaques - - - - - | 26911 | 1306140 |

5.) La totalité de la Ruſſie eſt un quatorzieme de toute la moitié boréale du Globe terreſtre.

6.) Toute la Ruſſie, quant à la ſurface géometrique, eſt diſtinguee en deux parties égales par le Parallele de 59°. 47′. de latitude; ainſi que la partie de cet Empire ſituée dans la Zone temperée, par le Parallele de 57°. 27′. Donc en prenant ce Parallele pour la ligne de ſéparation entre la partie ſeptentrionale & méridionale de l'Empire; il vient

| pour la Ruſſie | Lieux géograph. quarrés. | Werſtes quarrées. |
|---|---|---|
| Septentrionale polaire - - | 67157 | 3259502 |
| - - - temperée - | 131674 | 6390894 |
| Méridionale - - - | 131674 | 6390894 |

Il eſt

Il eſt aiſé d'appliquer la table donnée cy deſſus à une contrée quelconque de la Ruſſie, dont il pourroit importer à connoitre la ſurface géometrique pour quelque point de vûe de Géographie mathématique, phyſique ou politique. J'aurai l'occaſion d'en faire de telles applications en traitant de la différence des climats phyſiques de ce grand Empire.

EX-

# EXTRAIT
## DES OBSERVATIONS
# MÉTÉOROLOGIQUES
## FAITES À ST. PÉTERSBOURG.
## ANNÉE MDCCLXXXIII.

*Préſenté à l'Académie le* 18. *Mars* 1787.

Je continuerai à donner pour cette nouvelle Collection de nos mémoires académiques l'extrait de mes obſervations météorologiques, & je ſuivrai conſtamment le même modele que j'ai choiſi depuis que je ſuis chargé de ce travail: je le crois ſuffiſant & très propre pour repréſenter avec clarté l'état de la temperature qu'il a fait, & pour comparer cette temperature avec celle des années précedentes, ainſi qu'avec celle des autres lieux de la terre. C'eſt l'unique but que je me ſuis propoſé.

Les inſtrumens dont je me ſers ſont toujours les mêmes, ainſi que leur expoſition: ils correſpondent parfaitement avec ceux que la Société électorale météorologique de Mannheim a envoyés à l'Académie, & les Phyſiciens qui eſpèrent pouvoir quelque jour, tirer de telles ſuites d'obſervations comparées, des concluſions & des regles invariables pour prédire le temps à venir, peuvent ſe fier auſſi à cet égard à l'exactitude des miennes.

Le Baromètre eſt ſimple: c'eſt un tuyau cylindrique de verre, d'une ligne de diamètre, rempli de mercure purifié avec ſoin, & enfoncé verticalement dans un vaſe rempli du même fluide, dont la ſurface eſt aſſés ſpacieuſe pourque les déſcentes & les montées les plus conſidérables du mercure dans le tuyau n'y puiſſent pas cauſer une variation ſenſible. L'Echelle eſt diviſée en pouces de Paris, dont chacun eſt ſubdiviſé en 20 parties égales; de ſorte qu'il eſt facile d'éſtimer la hauteur du Baromètre jusqu'à des centiemes parties de pouce. L'Expoſition de l'inſtrument eſt d'environ 20 pieds au deſſus du niveau moyen de la Neva, à 6 jusqu'à 7000 pieds de ſon embouchure dans le Golfe de Finnlande. Les variations du Baromètre ſont repréſentées par une ligne courbe, dont les appliquées expriment les hauteurs du mercure & les abſciſſes les temps correſpondans dans lesquels ces hauteurs ont été marquées. De cette maniere il devient très facile d'en tirer pour chaque mois & pour chaque année les réſultats que contiennent mes extraits.

Mes Thermomètres ſont à mercure avec des echelles diviſées ſuivant la méthode de Déliſle. Le point 0 répond à la chaleur de l'eau bouillante, & 150 à ſa congélation naturelle: 15 degrés de Déliſle ſont par conſéquent équivalens à 8 degrés de Réaumur. J'obſerve avec deux Thermomètres, parfaitement correſpondans entr'eux & avec celui de la Société de Mannheim. L'un eſt expoſé vers Nord-Oueſt, l'autre vers l'Eſt; l'un & l'autre à l'air libre. Je les conſulte au moins trois fois par jour, entre 6 & 7 heures du matin, à 2 heures après midi & à 10 heures ou plus tard du ſoir: je choiſis auſſi chaque fois celui des deux Thermomètres ſur lequel le Soleil depuis deux heures au moins, n'a point influé ni directement, ni par reflexion.

L'Etat

L'Etat du Baromètre eſt repréſenté dans trois Tables: la premiere indique pour chaque mois de l'année, 1.) la plus grande hauteur & 2.) la plus petite, 3.) la variation ou la différence entre ces deux hauteurs extrèmes, 4.) le milieu arithmétique entre ces memes hauteurs, & 5.) la hauteur moyenne, c'eſt à dire la ſomme des toutes les hauteurs obſervées diviſée par le nombre des obſervations. La ſeconde Table fait voir combien de jours & d'heures le mercure s'eſt ſoûtenu chaque mois au deſſus des hauteurs de $27\frac{8}{10}$, $27\frac{9}{10}$, 28, $28\frac{1}{10}$ & $28\frac{2}{10}$ pouces, & quelle a été la hauteur au deſſus de laquelle il ſe ſoit ſoûtenu pendant le demi-mois: cette hauteur diffère ſouvent aſſés conſidérablement de la moyenne. La troiſieme Table enfin expoſe les deſcentes & les montées conſidérables ou ſubites du mercure avec les phénomenes qui les ont accompagnés.

L'Etat du Thermomètre contient de même trois Tables. La premiere repréſente pour chaque mois, 1.) la plus petite hauteur, c'eſt à dire le plus grand froid en hyver & la moindre chaleur en été: 2.) la plus grande hauteur, ou le moindre froid en hyver & la plus grande chaleur en été, & 3.) la différence entre ces deux temperatures extrèmes: enfin 4.) la valeur moyenne des hauteurs obſervées le matin ou le ſoir, & 5.) la valeur moyenne de celles obſervées les après-midi, dont je nomme celle-là *le froid moyen* & celle-ci *la chaleur moyenne*. La ſeconde Table indique le nombre des jours auxquels le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Délisle, c'eſt à dire, dans combien de jours le froid a été plus grand que $200^{d.}$, $190^{d.}$, $180^{d.}$, &c. & dans combien de jours la chaleur a été plus forte que $110^{d.}$, $120^{d.}$, $130^{d.}$, &c. Enfin la troiſieme Table marque plus ſpeciellement les jours auxquels le froid & la chaleur ont été obſervés entre ces dites diviſions.

 Deux

Deux Tables ſuivantes contiennent les obſervations faites ſur la force des vents & leur direction; enfin une derniere Table expoſe l'état du Ciel & les autres variations de l'Atmoſphère, ainſi que les phénomenes les plus remarquables.

*m.* ſignifie heure du matin ou avant midi: *s.* heure du ſoir au après midi.

## I. Baromètre.

1.) Hauteurs extrêmes, Variation, Milieu & Hauteur moyenne.

| Mois. | Au plus haut | | | Au plus bas | | | Variat. | Milieu | Hauteur moyenne |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P. cent. | jour, | heure | P. cent. | jour, | heure | cent. | P. cent. | P. cent. |
| Janvier | 28.68 | 22. | 9. s. | 27.58 | 5. | 2. s. | 110 | 28.13 | 28.07,0 |
| Février | 28.37 | 16. | 6. s. | 27.13 | 23. | 2. m. | 124 | 27.75 | 27.94,6 |
| Mars | 28.38 | 10. | 12. m. | 27.20 | 24. | 3. s. | 118 | 27.79 | 27.94,5 |
| Avril | 28.52 | 20. | 1. s. | 27.22 | 5. | 2. s. | 130 | 27.87 | 28.12,2 |
| Mai | 28.33 | 9. | 3. m. | 27.82 | 20. | 12. m. | 51 | 28.08 | 28.10,1 |
| Juin | 28.47 | 5. | 10. m. | 27.73 | 30. | 6. m. | 74 | 28.10 | 28.12,9 |
| Juillet | 28.43 | 12. | 6. s. | 27.73 | 31. | 4. m. | 70 | 28.08 | 28.15,8 |
| Août | 28.49 | 18. | matin | 27.53 | 1. | 8. m. | 96 | 28.01 | 28.14,9 |
| Sept. | 28.54 | 27. | 9. m. | 27.58 | 10. | 12. s. | 96 | 28.06 | 28.11,0 |
| Octobr. | 28.62 | 14. | 3. s. | 27.50 | 20. | 5. s. | 112 | 28.06 | 28.08,9 |
| Novembr. | 28.58 | 8. | 12. s. | 27.34 | 24. | 10. s. | 124 | 27.96 | 28.01,0 |
| Décembr. | 28.53 | 3. | 9. s. | 27.09 | 17. | 3. s. | 144 | 27.81 | 28.01,4 |

La

La plus grande élévation dans toute l'année a par conſéquent été 28. 68, ou 28 pouces $8\frac{1}{15}$ lignes, le 22 Janvier à 9 h. du ſoir. Thermomètre de Délisle 197 d. Ciel ſerein & petit vent de NOu.

La plus petite élévation 27. 09, ou 27 pouces $1\frac{1}{15}$ lignes, le 17 Décembre à 3 h. après midi. Therm. 158 d. Ciel couvert, & vent fort de l'Oueſt.

D'où la variation totale, 159 centiemes parties de pouce, ou 1 pouce 7 lignes: & le milieu 27. 88, ou 27 pouces $10\frac{1}{2}$ lignes.

La hauteur moyenne de l'année 28. 071, qui ſont 28 pouces $0\frac{4}{5}$ ligne.

2.) Baromètre au deſſus de

| Mois. | 27. 80 | | 27. 90 | | 28. 00 | | 28. 10 | | 28. 20 | | Baromètre, un demi-mois au deſſus de |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | jours | h. | jours | h. | jours | h. | jours | h. | jours | h. | Pouces. cent. |
| Janvier. | 26. | 15 | 24. | 3 | 17. | 12 | 12. | 0 | 9. | 3 | 28. 02,0 |
| Février | 21. | 21 | 18. | 12 | 13. | 12 | 8. | 0 | 5. | 0 | 27. 98,8 |
| Mars | 20. | 21 | 18. | 3 | 14. | 6 | 10. | 9 | 6. | 18 | 27. 96,7 |
| Avril | 25. | 21 | 24. | 12 | 21. | 6 | 16. | 21 | 13. | 18 | 28. 14,5 |
| Mai | 31. | 0 | 28. | 0 | 24. | 3 | 18. | 3 | 6. | 12 | 28. 12,1 |
| Juin | 29. | 18 | 29. | 3 | 22. | 3 | 15. | 15 | 10. | 6 | 28. 10,9 |
| Juillet | 29. | 12 | 27. | 21 | 26. | 3 | 22. | 21 | 13. | 0 | 28. 18,0 |
| Août | 29. | 3 | 27. | 12 | 22. | 9 | 18. | 18 | 12. | 21 | 28. 16,0 |
| Sept. | 27. | 3 | 23. | 18 | 19. | 18 | 15. | 18 | 9. | 18 | 28. 11,5 |
| Oct. | 28. | 3 | 25. | 0 | 19. | 3 | 13. | 15 | 9. | 12 | 28. 06,4 |
| Nov. | 23. | 12 | 19. | 0 | 15. | 9 | 10. | 21 | 8. | 15 | 28. 01,0 |
| Déc. | 21. | 0 | 19. | 6 | 17. | 9 | 15. | 12 | 13. | 6 | 28. 10,0 |

Le Baromètre a donc été
314 jours de l'année au deſſus de 27,80
285 jours au deſſus de 27,90
233 jours au deſſus de 28,00
178 jours au deſſus de 28,10 &
118 jours au deſſus de 28,20 pouces.

D'où l'on peut inferer que le Baromètre a été la demi-année, ou pendant 182½ jours, au deſſus de 28,092 pouces, laquelle hauteur n'eſt que de $\frac{21}{1000}$ plus grande que la moyenne.

## 3.) Variations conſidérables & ſubites du Baromètre.

| Mois. | Temps jours | Temps heure. | Diff. heur. | Baromètr. Pouc. $\frac{1}{100}$ | Différ. $\frac{1}{100}$ | Therm. degrés. | Vent. | Atmoſphère. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janv. | 4. | 12. m. | 24 | 28. 28 | −70 | 170 | Ou. | nuages, ciel couvert |
| | 5. | 12. m. | | 27. 58 | | 154 | SOu. très f. | neige, ciel couvert puis ſerein |
| | 21. | 6. m. | 38 | 27. 97 | +71 | 182 | NOu. | ciel ſerein. |
| | 22. | 8. s. | | 28. 68 | | 197 | NOu. | ciel ſerein, brouill. le matin. |
| Févr. | 16. | 6. s. | 21 | 28. 37 | −56 | 165 | S. | ſer., le lendemain couv. neige |
| | 17. | 3. s. | 9 | 27. 81 | +27 | 149 | SOu. | nuages. |
| | 17. | 12. s. | 16 | 28. 08 | −76 | 164 | SOu. | ciel ſerein. |
| | 18. | 4. s. | 32 | 27. 32 | +71 | 156 | SOu. très f. | c. couvert, neige. |
| | 19. | 12. s. | 21 | 28. 03 | −42 | 169 | S. | brouillard, nuages, puis neige |
| | 20. | 9. s. | 17 | 27. 61 | +48 | 163 | S. | c. couvert. |
| | 21. | 2. s. | 36 | 28. 09 | −96 | 166 | SOu. | c. ſerein, puis couvert, neige. |
| | 23. | 2. m. | | 27. 13 | | 168 | Ou. fort. | nuages, ciel ſerein. |
| | 24. | 12. s. | 24 | 27. 60 | +40 | 175 | Ou. fort. | c. ſerein, neige. |
| | 25. | 12. s. | 18 | 28. 00 | +28 | 180 | Ou. | c. ſerein, puis brouillard. |
| | 26. | 6. s. | | 28. 28 | | 170 | N. | c. ſerein. |
| Mars. | 3. | 2. m. | 20 | 27. 74 | −44 | 167 | E. | c. couv. brouill. |
| | 3. | 10. s. | 23 | 27. 30 | +64 | 168 | E. | c. couv., le lendemain ſerein. |
| | 4. | 9. s. | | 27. 94 | | 164 | NOu. | c. couv., le lend. brouillard. |

Mois

| Mois. | Temps jours | heure. | Diff. heur | Baromètr. Pouc. | $\frac{1}{100}$ | Différ. $\frac{1}{100}$ | Therm. degrés. | Vent. | Atmoſphère. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mars. | 17. | 6. m. | 36 | 28. | 20 | —51 | 179 | NOu. | c. ſerein, lend. brouill. neige. |
| | 18. | 6. s. | | 27. | 75 | | 160 | NOu. | c. ſerein. |
| | 19. | 3. s. | 31 | 27. | 52 | +67 | 149 | S. fort. | c. couv. neige. |
| | 20. | 10. s. | | 28. | 19 | | 160 | calme, NOu | c. couvert. |
| | 22. | 12. m. | 24 | 28. | 31 | —54 | 145 | Ou. | c. couvert. |
| | 23. | 12. m. | 27 | 27. | 77 | —57 | 139 | calme. | nuages. |
| | 24. | 3. s. | 24 | 27. | 20 | +48 | 150 | E. | c. couv. beaucoup de neige. |
| | 25. | 3. s. | | 27. | 68 | | 162 | NE. | c. ſerein. |
| Avril | 4. | 12. m. | 26 | 28. | 03 | —81 | 146 | N. | c. ſerein, le lend. pluie. |
| | 5. | 2. s. | | 27. | 22 | | 142 | calme N. | c. couv. puis neige. |
| | 5. | 12. s. | 24 | 27. | 30 | +48 | 156 | N. | c. couv. lend. neige. |
| | 6. | 12. s. | | 27. | 78 | | 160 | N. fort. | c. ſerein. |
| | 7. | 8. s. | | 27. | 98 | | 160 | NOu. | c. ſerein. |
| | 14. | 12. m. | 36 | 28. | 47 | —52 | 145 | NOu. | c. ſerein. |
| | 15. | 12. s. | | 27. | 95 | | 147 | S. | c. couvert. |
| | 16. | 6. s. | 28 | 27. | 72 | +42 | 145 | SE. | pluie, c. couvert. |
| | 17. | 10. s. | | 28. | 14 | | 147 | SE. | nuages. |
| | 19. | 6. m. | 31 | 28. | 01 | +51 | 147 | Ou. | pluie, ciel couvert. |
| | 20. | 1. s. | | 28. | 52 | | 141 | Ou. | c. ſerein. |
| Juin. | 29. | 12. m. | 18 | 28. | 08 | —36 | 120 | Ou. | nuages, ciel couv. pluie. |
| | 30. | 6. m. | | 27. | 72 | | 128 | Ou. très fort | c. couv. beauc. de pluie, orage. |
| Août. | 1. | 1. m. | 7 | 27. | 78 | —25 | 126 | Ou. très fort | beauc. de pluie, tonn. c. couv. |
| | 1. | 8. m. | 16 | 27. | 53 | +40 | 123 | Ou. très fort | beaucoup de pluie, nuages. |
| | 1. | 12. s. | | 27. | 93 | | 131 | Ou. fort. | nuages. |
| | 3. | 9. m. | 22 | 28. | 25 | —55 | 130 | NOu. fort. | c. ſerein., au ſoir pluie. |
| | 4. | 7. m. | 23 | 27. | 70 | +32 | 119 | Ou. très fort | c. demi-couv. au ſoir ſerein. |
| | 5. | 6. m. | | 28. | 02 | | 131 | E. | pluie, c. couvert. |

Mois

| Mois. | Temps jours | heure. | Diff. heur. | Baromètr. Pouc. | $\frac{1}{100}$ | Differ. $\frac{1}{100}$ | Therm. degrés. | Vent. | Atmoſphère. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Août. | 6. | 6 m. | 24 | 27. | 98 | +46 | 138 | NOu. | c. couvert, puis ſerein. |
| | 7. | 6. m. | | 28. | 44 | | 131 | Ou. | c. ſerein. |
| | 7. | 12. s. | 30 | 28. | 28 | −52 | 132 | E. fort. | c. demi-couvert & pluie. |
| | 9. | 6. m. | | 27. | 76 | | 125 | O. | c. couvert & forte pluie. |
| Sept. | 11. | 12. s. | 30 | 27. | 59 | −53 | 138 | SOu. fort. | beaucoup de pluie, c. couv. |
| | 13. | 6. m. | | 28. | 12 | | 141 | SOu. | c. ſerein. puis couv. & pluie. |
| | 29. | 3. s. | 17 | 28. | 33 | −57 | 124 | Ou. | c. ſerein, puis couv. & pluie. |
| | 30. | 8. m. | 16 | 27. | 76 | +57 | 135 | Ou. très fort | nuages & pluie. |
| | 30. | 12. s. | | 28. | 33 | | 146 | N. | c. ſerein. |
| Oct. | 1. | 12. m. | 42 | 28. | 44 | −76 | 133 | NOu. | c. ſerein, puis couv. pluie. |
| | 3. | 6. m. | 42 | 27. | 68 | +69 | 134 | Ou. fort. | c. couv. pluie. |
| | 4. | 12. s. | 14 | 28. | 37 | −40 | 151 | NOu. S. | c. ſer. puis couv. pluie & neig. |
| | 5. | 2. s. | | 27. | 97 | | 148 | S. très fort. | grèle, neige, pluie. |
| | 19. | 12. m. | 29 | 28. | 19 | −69 | 140 | Ou. | c. couv. pluie. |
| | 20. | 5. s. | 24 | 27. | 50 | +40 | 139 | SOu. fort. | beaucoup de pluie. c. couv. |
| | 21. | 5. s. | 28 | 27. | 90 | +43 | 143 | NOu. | c. couvert. |
| | 22. | 9. s. | | 28. | 33 | | 147 | E. | c. demi-couvert. |
| | 29. | 6. m. | 24 | 27. | 72 | +40 | 137 | S. | c. couv. pluie, puis c. ſerein. |
| | 30. | 6. m. | | 28. | 12 | | 145 | SOu. fort. | c. demi-couvert. |
| Nov. | 5. | 6. m. | 24 | 27. | 86 | +48 | 150 | NOu. | pluie, c. couv. beauc. de neige |
| | 6. | 6. m. | | 28. | 34 | | 156 | E. fort. | c. couvert. |
| | 8. | 12. s. | 24 | 28. | 58 | −22 | 154 | S. | c. demi-couvert, brouillard. |
| | 9. | 12. s. | 24 | 28. | 36 | −71 | 155 | S. | c. ſerein, le lendemain neige. |
| | 10. | 12. s. | | 27. | 65 | | 153 | E. | c. couvert, le lendem. neige. |
| | 11. | 12. s. | 20 | 27. | 43 | +45 | 150 | SE. | c. demi-couv. le lend. couv. |
| | 12. | 8. s. | | 27. | 88 | | 158 | N. | nuages. |
| | 23. | 12. m. | 34 | 28. | 01 | −67 | 172 | N. | c. couvert, puis ſerein. |
| | 24. | 10. s. | | 27. | 34 | | 166 | S. | c. couvert, le lendem. ſerein. |

Mois

| Mois. | Temps jours | heure. | Dif. heur. | Baromètr Pouc. $\frac{1}{100}$ | Différ. $\frac{1}{100}$ | Therm. degrés. | Vent. | Atmoſphère. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nov. | 24. | 10. s. | | 27. 34 | | 166 | S. | c. couv. le lendemain ſerein. |
| | 26. | 12. m. | 38 | 28. 13 | +75 | 161 | N. | neige, c. couvert. |
| | 27. | 6. s. | 30 | 27. 50 | −63 | 157 | S. fort. | neige, c. couvert. |
| | 28. | 12. s. | 30 | 28. 00 | +50 | 162 | N. | c. ſerein. |
| | 29. | 2. s. | 14 | 27. 80 | −20 | 157 | S. | c. couvert, brouillard. |
| | 29. | 12. s. | 10 | 27. 95 | +15 | 155 | S. | c. couvert. |
| Déc. | 1. | 12. m. | | 27. 71 | | 145 | Ou. | c. couvert, pluie. |
| | 2. | 12. s. | 36 | 28. 36 | +65 | 155 | N. fort. | c. couvert. |
| | 3. | 9. s. | 21 | 28. 53 | +17 | 155 | N. | c. couvert. |
| | 13. | 12. s. | | 28. 17 | | 149 | SOu. | c. couvert enſuite pluie. |
| | 15. | 6. m. | 30 | 27. 26 | −91 | 151 | S. | nuages, pluie, neige. |
| | 16. | 6. m. | 24 | 27. 62 | +36 | 159 | NOu. fort. | c. ſerein, puis couv. & neige. |
| | 16. | 10. s. | 16 | 27. 14 | −48 | 151 | Ou. fort. | c. couv. neige. |
| | 17. | 3. s. | | 27. 09 | | 158 | Ou. fort. | c. couv. |
| | 18. | 12. s. | 33 | 28. 05 | +96 | 177 | N. | c. ſerein. |
| | 19. | 2. s. | | 28. 10 | | 171 | N. | c. couv. puis neige. |
| | 20. | 12. s. | 34 | 27. 25 | −85 | 154 | S. très fort | neige, c. couv. |
| | 21. | 12. s. | 24 | 27. 53 | +28 | 163 | NOu. | c. demi-couvert. |
| | 22. | 12. s. | 24 | 28. 05 | +52 | 172 | N. | c. couvert. |
| | 23. | 12. s. | 24 | 28. 45 | +40 | 175 | NE. | c. demi-couvert. |
| | 27. | 6. m. | | 28. 00 | | 196 | Ou. fort. | c. ſerein. |
| | 28. | 6. m. | 24 | 27. 30 | −70 | 176 | N. | c. couvert, neige. |
| | 29. | 12. s. | 4 | 27. 97 | +67 | 192 | S. | c. ſerein. |

La plus forte montée du mercure, reſpectivement à la durée du temps, a été de 96 parties centiemes de pouce, ou d'11½ lignes en 33 heures, le 17 Decembre: & les deux plus fortes deſcentes ont été, de 96 parties centiemes de pouce, ou d'11½ lignes, en 36 heures le 21 Février, & de 91 centiemes de pouce, ou de $10\frac{2}{15}$ lignes en 30 heures, le 13 Décembre.

## II. Thermomètre.

### 1.) Hauteurs extrèmes, leur différence, & état moyen.

| Mois. | Hauteurs extrèmes | | | | | | Diffé-rence. | Etat moyen. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Au plus bas | | | Au plus haut. | | | | Froid moyen. | Chaleur moyen. |
| | De-gré. | jour | heure. | De-gré. | jour | heure. | Degré | Degré. | Degré. |
| Janvier | 201 | 9. | 7. m. | 148 | 31. | 10. s. | 53 | 182,4 | 174,1 |
| Février | 185 | 26. | 6. m. | 146 | 12. | 2. s. | 39 | 164,9 | 156,7 |
| Mars | 179 | 17. | 6. m. | 139 | 23. | 2. s. | 40 | 165,3 | 153,7 |
| Avril | 162 | 8. | 6. m. | 132 | 24. | 2. s. | 30 | 151,0 | 141,1 |
| Mai | 152 | 4. | 6. m. | 111 | 27. | 12. m. | 41 | 139,4 | 128,1 |
| Juin | 138 | 4.<br>30. | 6. m.<br>12. m. | 106 | 17. | 2. s. | 32 | 129,8 | 119,4 |
| Juillet | 137 | 18.<br>19.<br>20. | 11. s. | 112 | 9.<br>25. | 2. s. | 25 | 128,3 | 118,7 |
| Août | 141 | 31. | 10. s. | 108 | 15. | 2. s. | 33 | 128,2 | 118,7 |
| Sept. | 146 | 30. | 10. s. | 118 | 17. | 2. s. | 28 | 137,7 | 129,2 |
| Octobr. | 153 | 16. | 7. m. | 122 | 8. | 2. s. | 31 | 145,7 | 138,0 |
| Novem. | 181 | 18. | 7. m. | 138 | 2. | 2. s. | 43 | 161,5 | 156,2 |
| Décem. | 196 | 27. | 7. m. | 145 | 2. | 2. s. | 51 | 165,2 | 159,7 |

Le plus grand froid de l'année a donc été obſervé le 9 Janvier à 7 heures du matin, de 201 degrés de Délisle, ou de $27\frac{1}{4}$ degrés après le Thermomètre de Réaumur. Baromètre 28, 18, calme parfait, brouillard, puis ciel ſerein.

La plus grande chaleur, obſervée le 17 Juin vers 2 heures après midi, a été de 106 degrés de Délisle, ou de $23\frac{1}{2}$ degrés

degrés de Réaumur. Baromètre 28 pouces, vent fort du SE, ciel demi-couvert, orage & beaucoup de pluie.

La différence entre ces deux extrémités de ſroid & de chaleur eſt de 95 degrés de Délisle, ou $50\frac{3}{4}$ degrés de Reaumur.

Le froid moyen de l'année ſe trouve être préciſement de 150 degrés, qui répond au terme de la congélation naturelle de l'eau, ou au o de Réaumur.

La chaleur moyenne de l'année, $141\frac{1}{15}$ degrés de Délisle, qui ſont $4\frac{3}{4}$ degrés de chaleur ſuivant Réaumur.

Mais ſi l'on ſépare les mois d'hyver de ceux d'été, on trouve, pour les mois de Janvier, Février, Mars, Avril, Novembre & Décembre;

le froid moyen, $165\frac{1}{3}$ degrés de Délisle, ou $8\frac{1}{15}$ de Réaumur.

la chaleur moyenne, $156\frac{1}{15}$ degrés de Délisle, ou $3\frac{1}{4}$ de Réaumur au deſſous de o.

Et pour les mois d'été, Mai, Juin, Juillet, Août, Septembre & Octobre;

le froid moyen, $135\frac{1}{2}$ degrés de Délisle, ou $7\frac{3}{4}$ de Réaumur au deſſus de o.

la chaleur moyenne, $125\frac{1}{3}$ degrés de Délisle, ou $13\frac{1}{3}$ de Réaumur.



2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Déliſle.

| Mois. | Froid plus grand que | | | | | | | Chaleur plus grande que | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 200 jours. | 190 jours. | 180 jours. | 170 jours. | 160 jours. | 150 jours. | 140 jours. | 110 jours. | 120 jours. | 130 jours. | 140 jours. | 150 jours. | 160 jours. |
| Janv. | 1 | 8 | 16 | 27 | 30 | 31 | 31 | | | | | 1 | 3 |
| Févr. | | | 3 | 8 | 18 | 27 | 28 | | | | | 7 | 16 |
| Mars | | | | 10 | 22 | 30 | 31 | | | | 1 | 10 | 24 |
| Avril | | | | | 2 | 19 | 30 | | | | 11 | 27 | 30 |
| Mai | | | | | | 1 | 16 | | 6 | 16 | 29 | 31 | 31 |
| Juin | | | | | | | — | 2 | 16 | 29 | 30 | 30 | 30 |
| Juillet | | | | | | | — | — | 22 | 31 | 31 | 31 | 31 |
| Août | | | | | | | 1 | 3 | 19 | 30 | 31 | 31 | 31 |
| Sept. | | | | | | | 7 | | 1 | 16 | 30 | 30 | 30 |
| Oct. | | | | | | 9 | 27 | | | 4 | 17 | 31 | 31 |
| Nov. | | | 1 | 5 | 16 | 28 | 30 | | | | 1 | 6 | 20 |
| Déc. | | 3 | 7 | 11 | 14 | 27 | 31 | | | | | 9 | 19 |
| 1783. | 1 | 11 | 27 | 61 | 102 | 172 | 232 | 5 | 64 | 126 | 181 | 244 | 296 |

3.) Le

3.) Le froid a été obſervé entre.

| | | jours |
|---|---|---|
| 210 & 200 | le 9 Janvier - - - - - - | 1 |
| 200 & 190 | le 8. 10 — 13. 22. 23 Janvier, le 26. 27. & 30 Décembre - - - - - - | 10 |
| 190 & 180 | le 2. 7. 14. 17 — 19. 21. 24 Janv. le 26 — 28 Févr. le 18 Nov. le 24. 28. 29 & 31 Décembre. - - - - - - | 16 |
| 180 & 170 | le 1. 3. 4. 6. 15. 16. 20. 25 — 28 Janv. le 7. 20. 21. 24. 25 Févr. le 1. 2. 4. 10. 11. 14. 15. 17. 25. 27 Mars, le 16. 17. 23. 28 Novembre, le 18. 19. 23 & 25 Décembre - - - - - - | 34 |
| 170 & 160 | le 5. 29. 30 Janv. le 5. 6. 8 — 10. 16 — 19 23 Févr. le 3. 5. 6. 7. 9. 12. 16. 18. 21. 26. 28. 30 Mars, le 7. 8 Avril, le 9. 15. 19 — 22. 24 — 27. 29 Nov. le 17. 21. & 22 Décembre. - - - | 41 |
| 160 & 150 | le 31 Janv. le 2 — 4. 11 — 15. 22 Févr. le 8. 13. 19. 20. 22 — 24. 31 Mars, le 1. 4 — 6. 9 — 15. 19 — 21. 26 — 28 Avril, le 4 Mai, le 4. 5. 13 — 16. 23 — 25 Oct. le 2. 3. 5 — 8. 10 — 14. 30 Nov. le 2 — 4. 7 — 13. 15. 16. & 20 Décembre - - - - - | 70 |

La chaleur a été obſervée entre

| | | jours |
|---|---|---|
| 100 & 110 | le 16. 17 Juin, le 15. 16 & 18 Août - | 5 |
| 110 & 120 | le 16. 23. 26 — 29 Mai, le 3. 6 — 8. 13. 15. 18. 20. 21. 25 — 29 Juin, le 3 — 5. 7 — 12. 15 — 17. 22 — 31 Juillet, le 4. 10 — 14. 17. 19 — 26. 28 Août & le 17 Septembre - - - | 59 |
| 120 & 130 | le 10. 13 — 15. 17 — 19. 22. 24. 25 Mai, le 2. 4. 5. 9 — 12. 14. 19. 22 — 24. 30 Juin, le 1. 2. 6. 13. 14. 18 — 21 Juillet, le 1 — 3. 5 — 9. 27. 29. 30 Août, le 5. 6. 9. 11. 14 — 16. 20 — 23. 25 — 27. 29 Sept. & le 7 — 10 Octobre - - | 62 |
| 130 & 140 | le 23 Mars, le 13. 17. 18. 21 — 25. 28 — 30 Avril, le 1. 2. 4. 6 — 9. 11. 12. 20. 21. 30. 31 Mai, le 1 Juin, le 31 Août, le 1 — 4. 7. 8. 10. 12. 13. 18. 19. 24. 28. 30 Sept. le 1 — 3. 6. 11. 12. 17 — 20. 28 — 30 Octobre & le 1 Nov. - - | 55 |
| 140 & 150 | le 31 Janv. le 1. 2. 12 — 15. 17 Févr. le 13. 19. 20. 22. 24. 28 — 31 Mars, le 1 — 5. 8 — 12. 14 — 16. 19. 20. 27 Avril, le 3. 5 Mai, le 4. 5. 13 — 16. 21 — 27. 31 Oct. le 2 — 4. 11. 30 Nov. & le 1. 2. 4 — 7. 13 — 15 Déc. | 63 |

III. Vent.

## III. Vent.

### 1.) Force & direction des vents.

| Mois. | Calme | Vent doux | Vent fort | Vent très ſort | Nord. | NE. | Eſt. | SE. | Sud. | SOu. | Oueſt. | NOu. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | jours. | jours | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. | jours. |
| Janv. | 3 | 18 | 8 | 2 | 4 | 0 | 10 | 0 | 2 | 9 | 2 | 4 |
| Févr. | 1 | 20 | 5 | 2 | 3 | 0 | 1 | 4 | 11 | 3 | 6 | 0 |
| Mars | 9 | 16 | 6 | 0 | 1 | 3 | 8 | 3 | 7 | 0 | 5 | 4 |
| Avril | 13 | 13 | 3 | 1 | 9 | 2 | 4 | 2 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| Mai | 10 | 13 | 6 | 2 | 1 | 4 | 5 | 3 | 5 | 1 | 7 | 5 |
| Juin | 10 | 10 | 9 | 1 | 0 | 1 | 4 | 2 | 3 | 2 | 12 | 6 |
| Juillet | 8 | 17 | 6 | 0 | 2 | 8 | 7 | 1 | 2 | 0 | 9 | 2 |
| Août | 9 | 12 | 8 | 2 | 1 | 1 | 5 | 6 | 1 | 2 | 11 | 4 |
| Sept. | 2 | 18 | 7 | 3 | 3 | 0 | 1 | 3 | 9 | 5 | 7 | 2 |
| Oct. | 7 | 11 | 12 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 7 | 3 | 13 | 4 |
| Nov. | 2 | 20 | 7 | 1 | 6 | 1 | 9 | 4 | 7 | 1 | 0 | 2 |
| Déc. | 7 | 18 | 5 | 1 | 9 | 1 | 1 | 0 | 5 | 3 | 8 | 4 |
| Annee 1783. | 81 | 186 | 82 | 16 | 42 | 22 | 55 | 28 | 62 | 30 | 84 | 42 |

D'où l'on voit que le mois d'Avril a été le plus doux, & le mois d'Octobre le plus venteux. Au reſte ce ſont les vents d'Oueſt qui ont dominé le plus, & les vents de Nord le moins.

2. Di-

2.) Direction des vents forts.

| Direction | Jour | Nombre de Jours. |
|---|---|---|
| Nord. | le 16 Mars, 6 Avril & le 15 Decembre - - | 3 |
| NE. | le 15 Mars, 26. 27 Avril, 9. 20. 30 Mai, 4 Juin, & le 5 Novembre - - - - - | 8 |
| Eſt. | le 11. 18. 19 Janv. 21. 31 Mai, 5. 8 Août, 6. 13 Nov. & le 27 Décembre - - - | 10 |
| SE. | le 28 Févr. 28 Mars, 24 Mai, 17 Juin, 6 Sept. 14. 18. & le 19 Novembre - - - | 8 |
| Sud. | le 8. 22 Févr. 8. 19 Mars, 21 Juin, 22 Juillet, 13 Août, 5 7. 8. 10. 13 Sept. 5. 28 Oct. 27 Nov. 20 & le 31 Décembre - - | 17 |
| SOu. | le 5. 24. 26. — 29. 31 Janv. 18 Févr. 11 Août, 4. 11. 12 Sept. 11. 20. & le 30 Oct. - - | 15 |
| Oueſt. | le 19. 23. 25 Févr. 30 Avril, 1 Mai, 9. 23. 24. 28. 30 Juin, 1. 29. — 31 Juillet, 1. 2. 4. 30 Août, 30 Sept. 2. 3. 6. — 8. 12. 31 Oct. & le 17 Décembre - - - | 27 |
| NOu. | le 4 Mars, 3 Mai, 20. 22 Juin, 2 Juillet, 3. 6 Août, 21 Oct. 1 Nov. & le 16 Déc. - | 10 |

| | Entre ces vents ſe trouvoient être les plus violens, ceux du | |
|---|---|---|
| NE. | 26 Avril, & 20 Mai - - - - - - | 2 |
| SE. | 24 Mai - - - - - - - - - - - - | 1 |
| Sud. | 22 Févr. 7 Sept. 27 Nov. & 20 Décembre - | 4 |
| SOu. | 5. 31 Janv. 18 Févr. 11 Sept. & 11 Octobre - | 5 |
| Oueſt. | 30 Juin, 1. 4 Août, & 30 Septembre - - | 4 |

IV. At-

## IV. Atmoſphère.

| Mois. | Ciel. ſerein jours. | Ciel. couvert jours | Brouillard jours. | Pluie. forte jours | Pluie. petite jours. | Neige. copieuſe jours. | Neige. petite jours | Eau de pluie & de neige Pouces $\frac{1}{100}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Janv. | 10 | 10 | 3 | | | 3 | 2 | 0 | 63 |
| Févr. | 5 | 14 | 5 | | 2 | 4 | 8 | 0 | 66 |
| Mars | 8 | 10 | 8 | | 1 | 1 | 12 | 1 | 40 |
| Avril | 11 | 9 | 5 | 2 | 3 | | 6 | 0 | 81 |
| Maî | 12 | 7 | 2 | 1 | 10 | | | 1 | 70 |
| Juin | 14 | 6 | 2 | 6 | 7 | | | 1 | 23 |
| Juillet | 17 | 3 | 2 | 2 | 4 | | | 1 | 23 |
| Août | 10 | 3 | 4 | 6 | 8 | | | 2 | 09 |
| Sept. | 5 | 10 | 3 | 5 | 15 | | | 1 | 82 |
| Oct. | 3 | 11 | 4 | 1 | 18 | | 7 | 1 | 80 |
| Nov. | 5 | 17 | 3 | | 3 | 2 | 9 | 0 | 47 |
| Dec. | 2 | 18 | 2 | | 7 | — | 9 | 0 | 34 |
| Année 1783. | 102 | 118 | 43 | 23 | 78 | 10 | 53 | 14 | 18 |

Il grêla le 5 Octobre.

Il y eut 17 Aurores boréales d'obſervées, & nommément, 5 ſplendides, le 30 Mars, le 7. 26 Avril, le 1 Mai, & le 26 Septembre, & 12 plus foibles, le 27. 28 Février, le 1. 26. 27 Mars, le 12. 27. 29. 30 Avril, le 5. 12 Mai, & le 22 Octobre.

Deux Parhélies, le 29 & 30 Décembre.

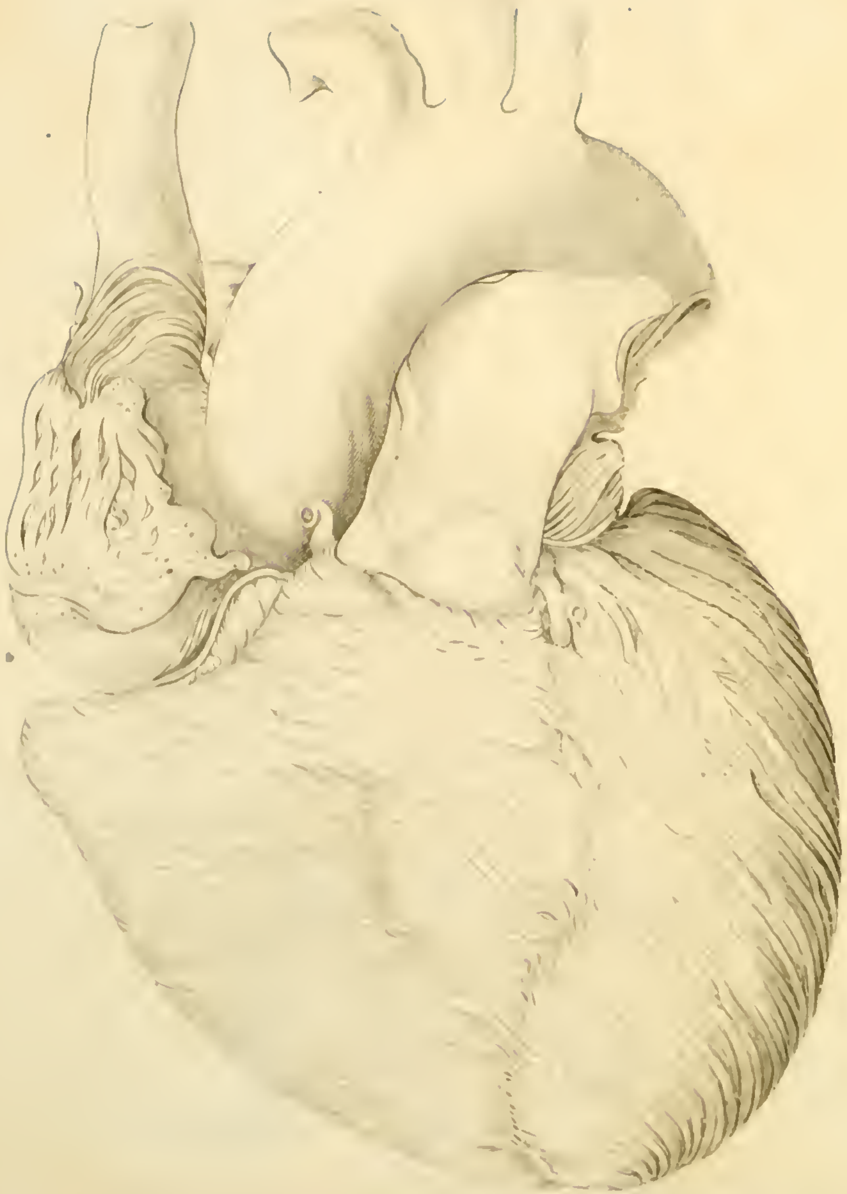
Cinq orages complets, le 27 Mai, le 17. 21. 30 Juin, & le 30 Juillet. Il ne fit que tonner de loin, 7 fois, le 29. 31 Mai, le 1. 9 Juin, le 1. 10 & 30 Août.

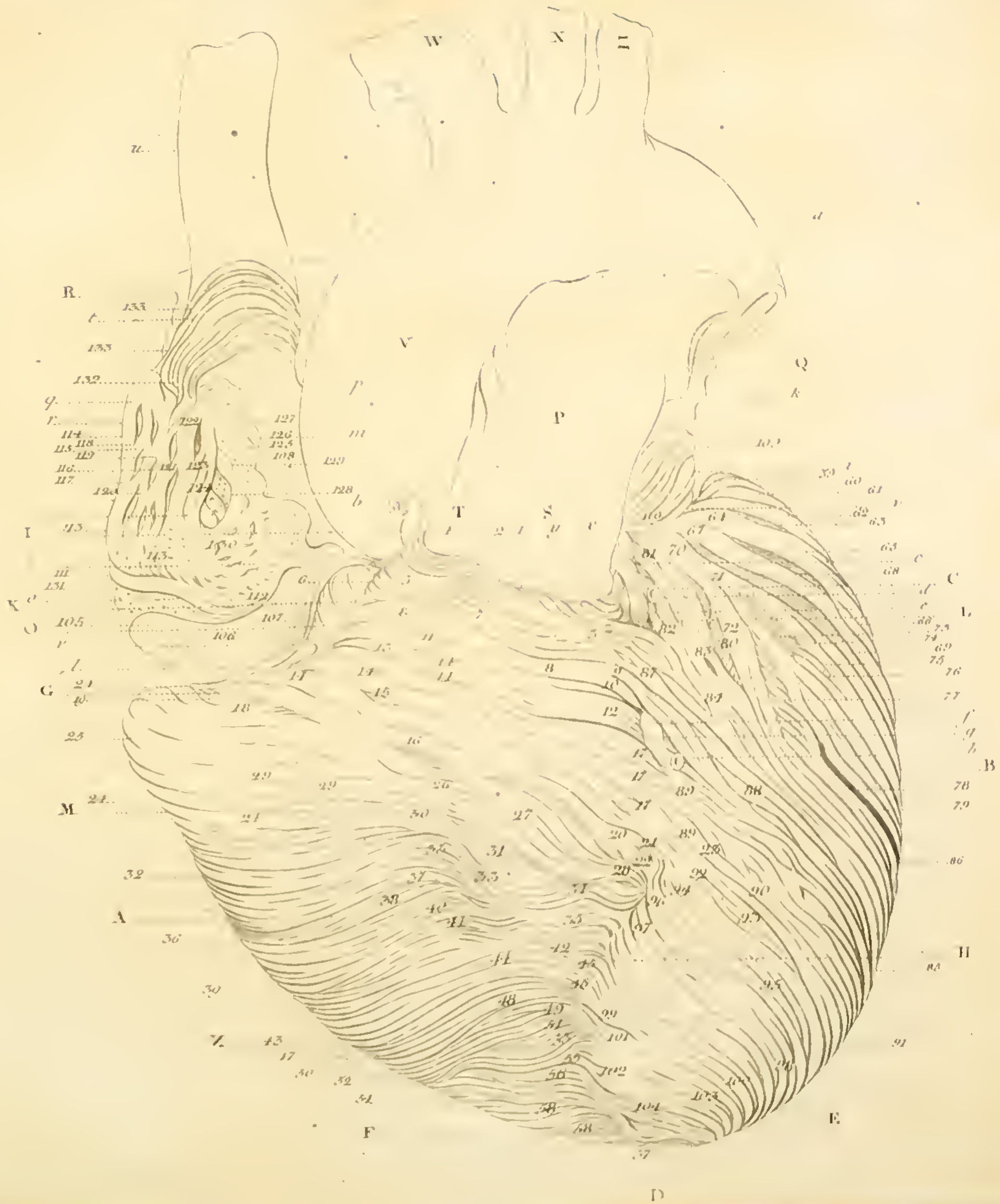
L'Atmoſphère fut remplie prèsque tous les jours du mois de Juillet, & encore le 10. 14. 15. 24 & 25 d'Août d'une vapeur épaiſſe, qui fit paroitre le ſoleil, même en plein midi, d'une lumière plus foible encore que celle de la pleine lune: Il y eut des éclairs nocturnes, le 19. 20. & 26. Août.

La Neva débacla le 25. Avril, après avoir été couverte de glaces pendant 150 jours. Baromètre 28. 35 à 28. 05 pouces, thérmometre 132 à 147, temps calme, nebuleux & couvert. La riviere continua de charier les glaces, le 27 Avril, le 1. 2. & 3 Mai. Les glaçons de Ladoga parurent le 8 de Mai, & la riviere les charia jusqu'au 24 du même mois; elle en fut presque couverte le 8. 9. 10. 12. 13. 14. 15. 16 & 18 Mai.

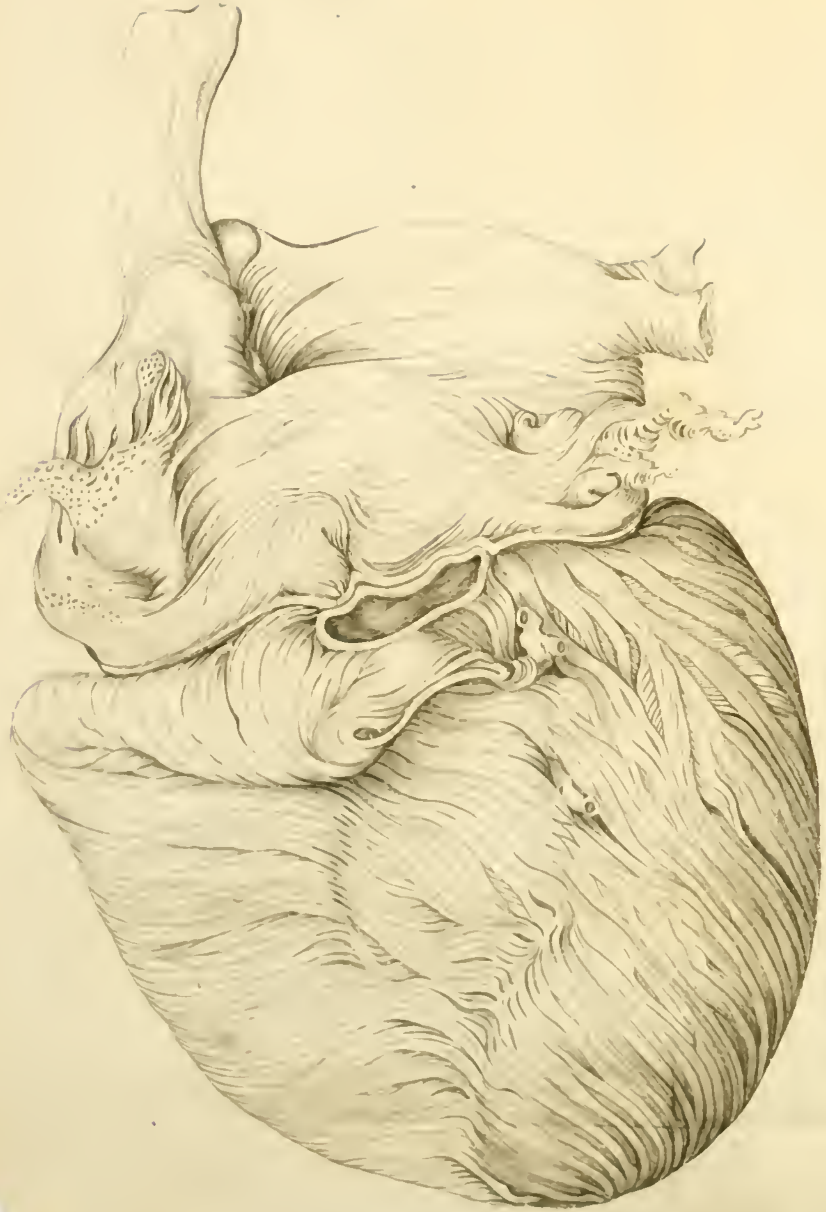
Le 13 Novembre reparurent les prémieres glaces, & la Neva les charia jusqu'au 17 du même mois, où elle fut priſe par un froid de 172 degrés; Baromètre 28. 32, ciel à demi-couvert, vent d'Eſt. L'Intervalle entre le debacle & la priſe de la riviere a donc été de 206 jours.








a
U
d
70
64
63
66
65
60
56
62
61
55
h
f
e
K
33
51
52
43
38
48
47
D
Y
20
27
26
25
24
21
22
23
Q
R
12
10
G
14
S
B
T
V
I
x
W
z
C







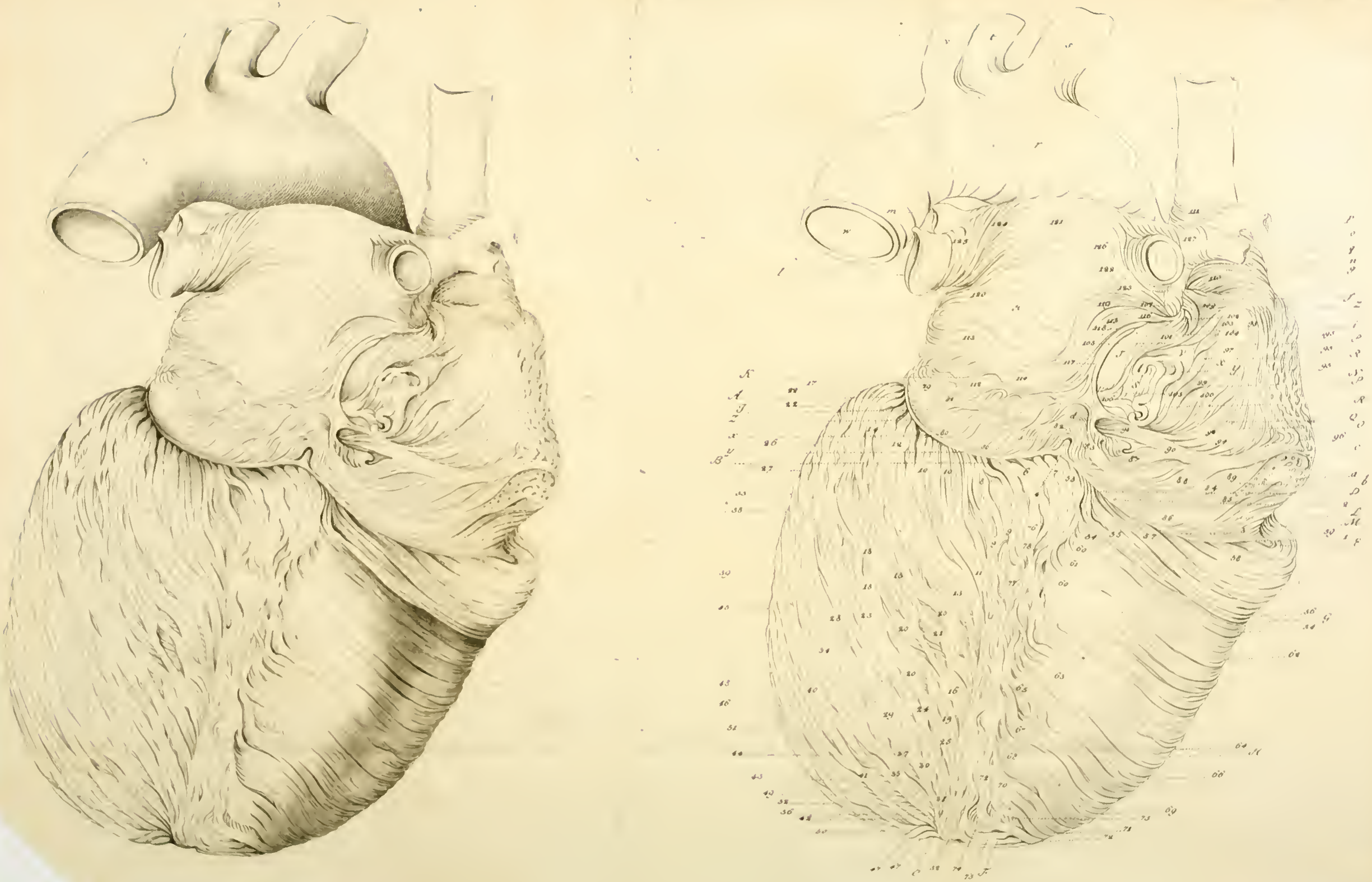


*Fig. 2.*

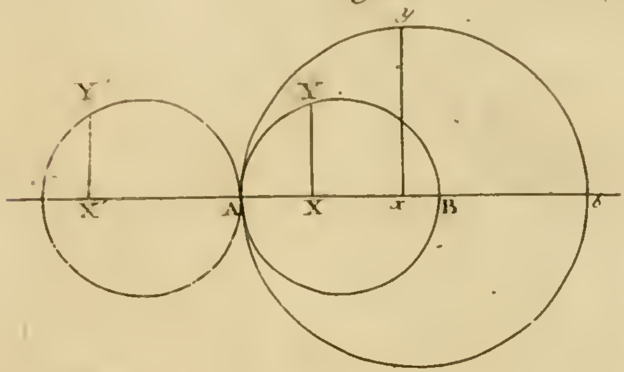
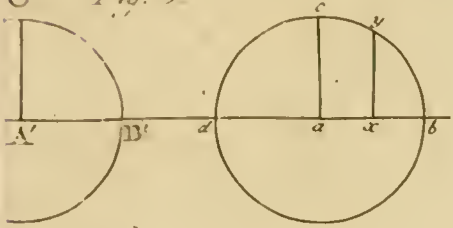



*Fig. 3.*




*g. 5.*

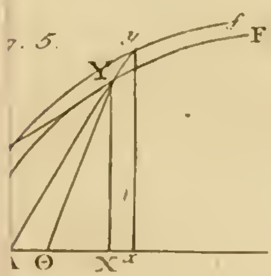
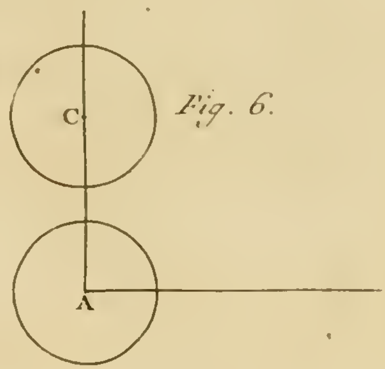
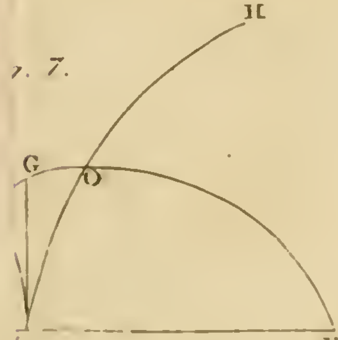



*Fig. 6.*




*g. 7.*



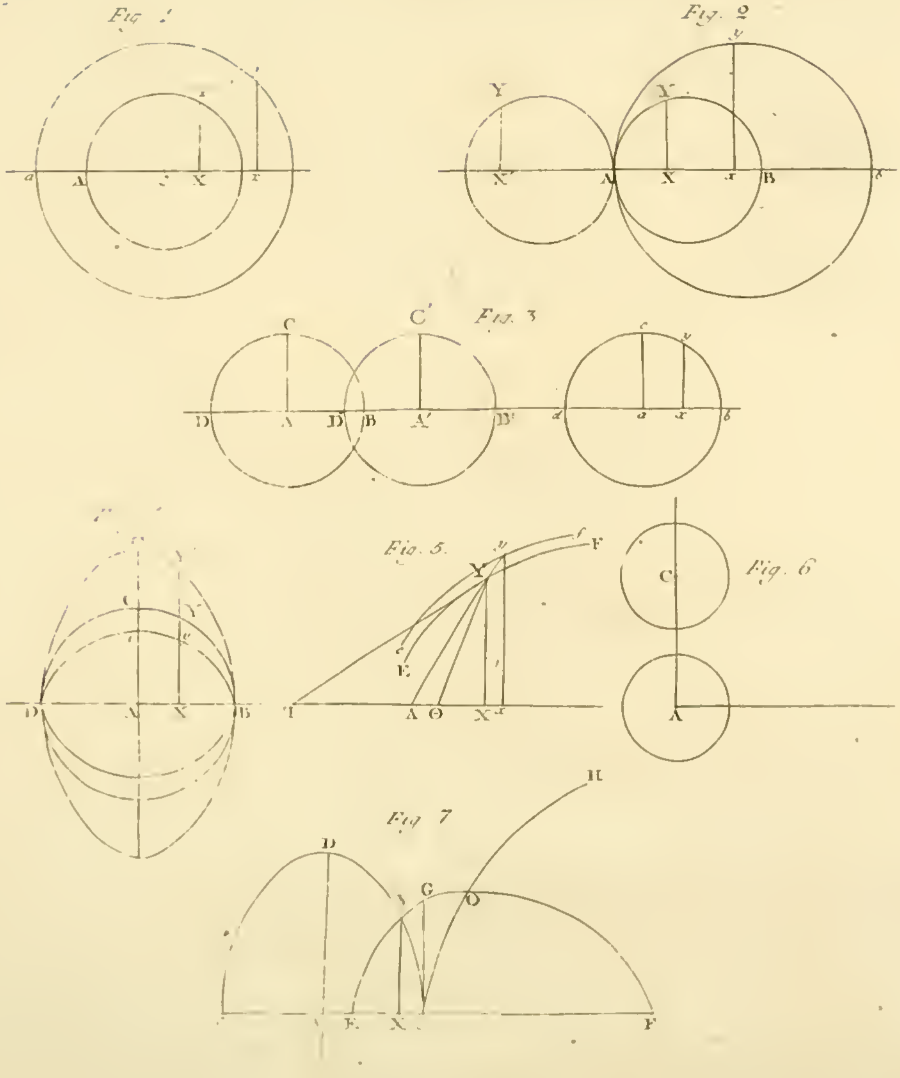

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7




Fig. 2.

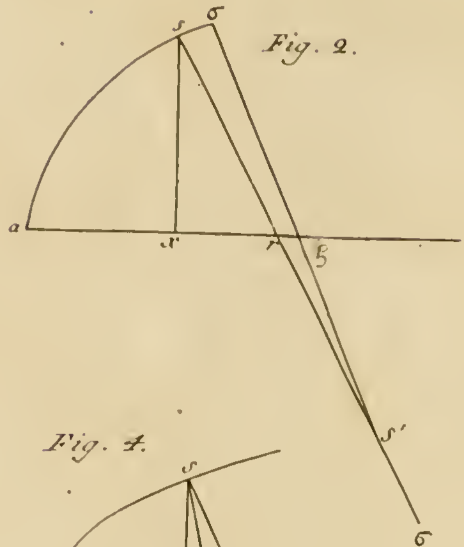



Fig. 4.

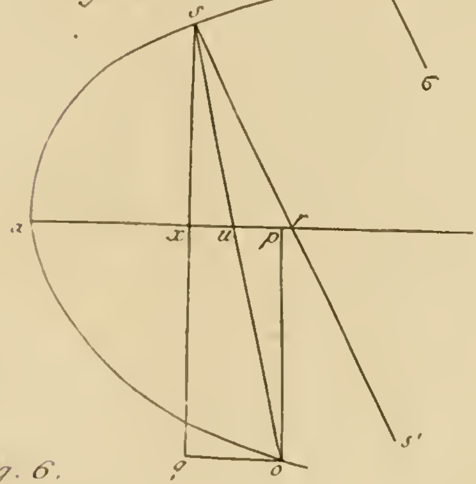



Fig. 6.

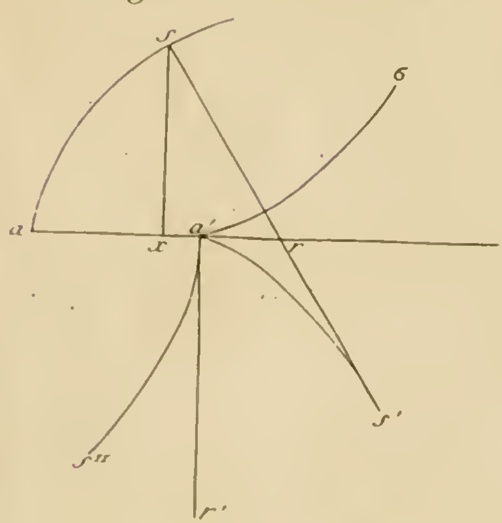


*Fig 1*

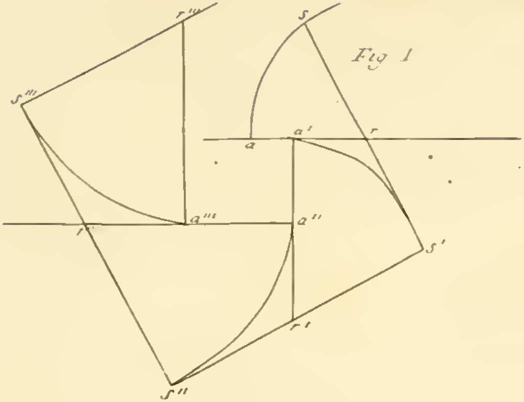


*Fig. 2.*

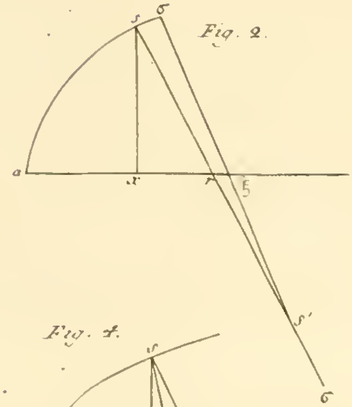


*Fig 3*

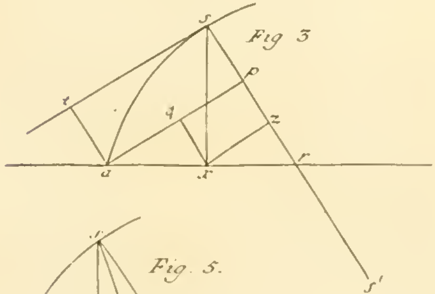


*Fig. 4.*

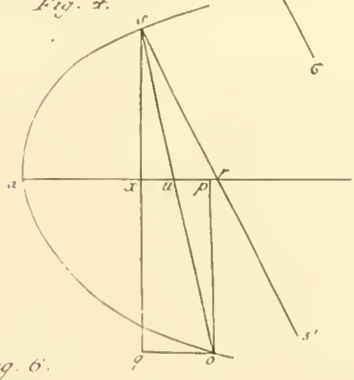


*Fig. 5.*

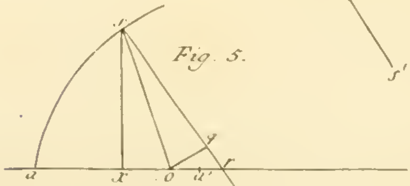


*Fig 6.*

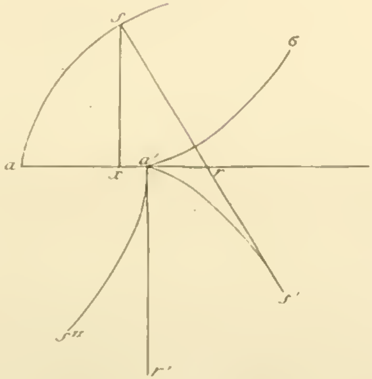
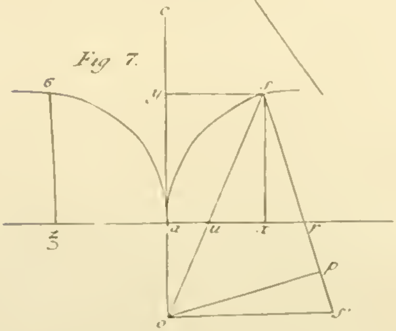


*Fig 7.*



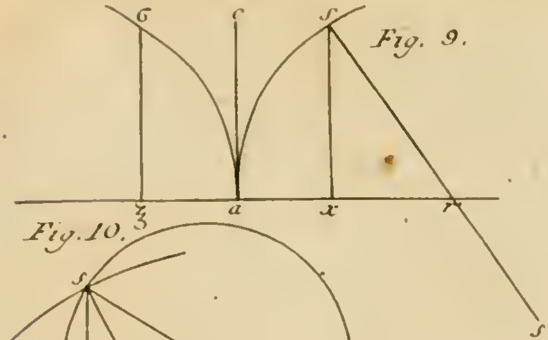
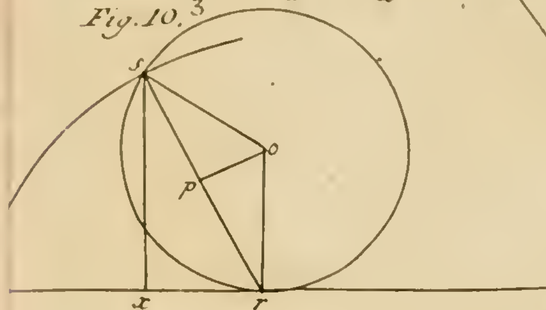



Fig. 9.

Fig. 10.



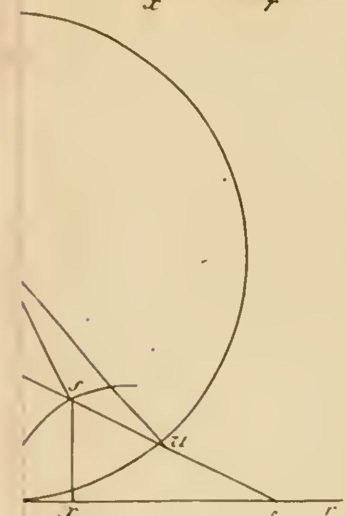
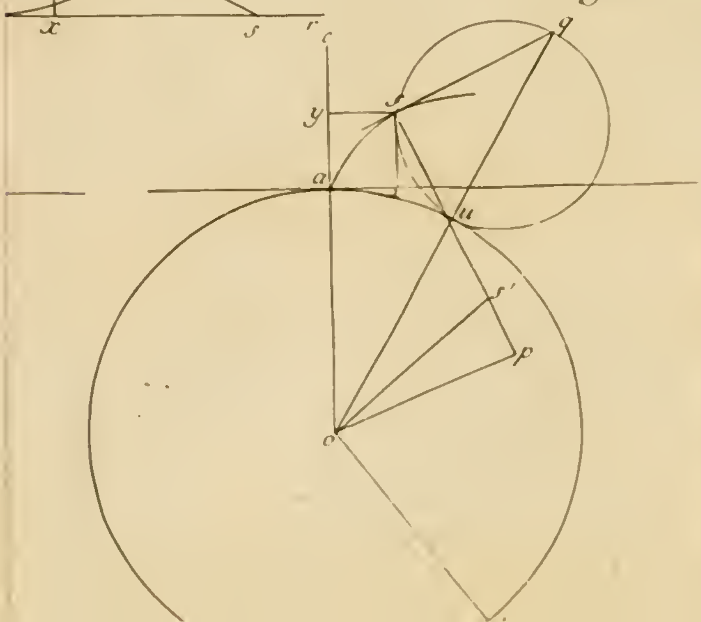
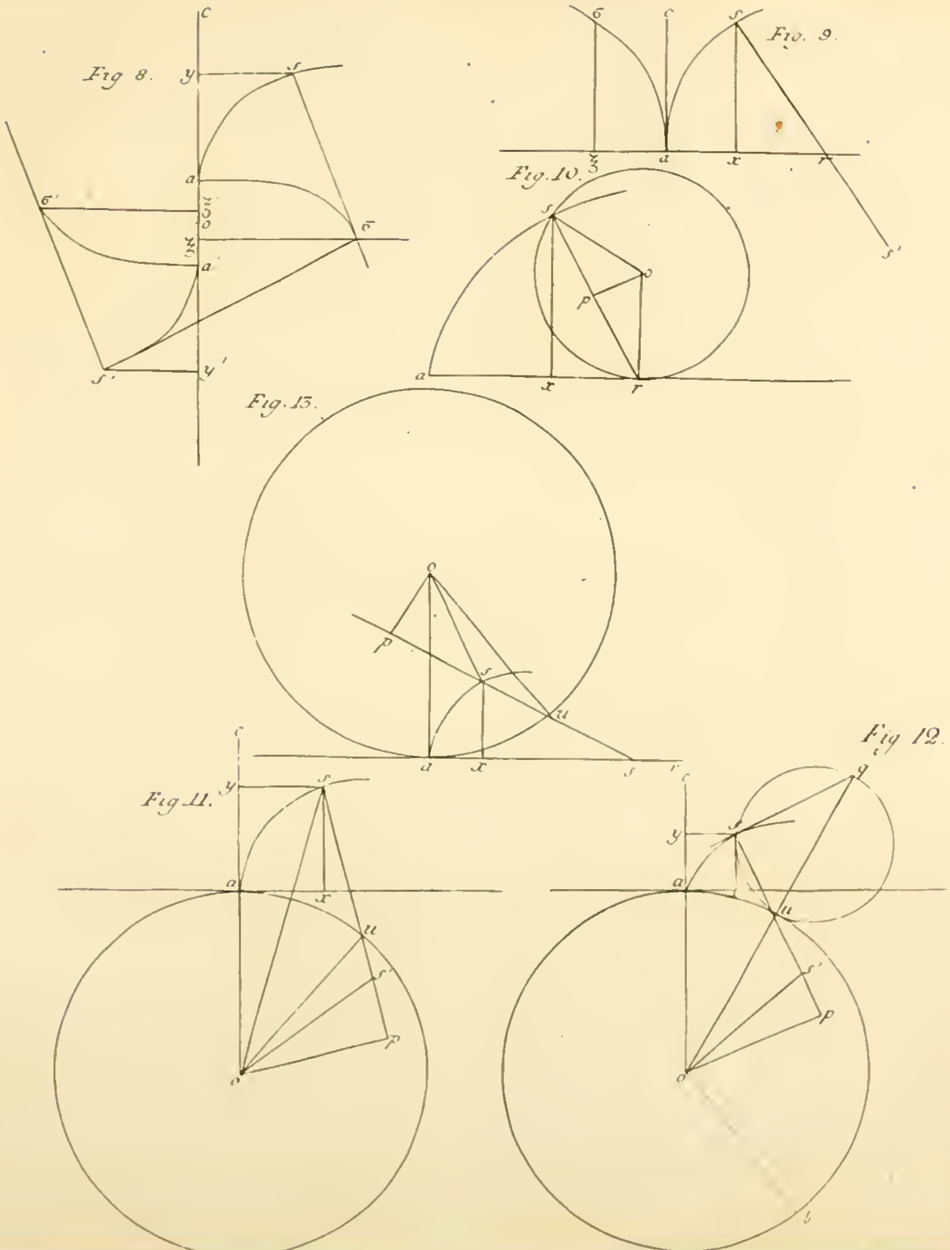




Fig. 12.




Fig 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 13.
Fig 11.
Fig 12.

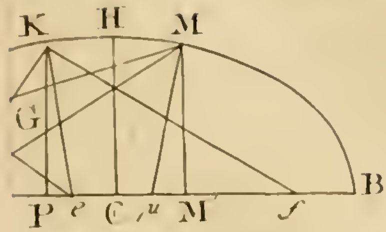
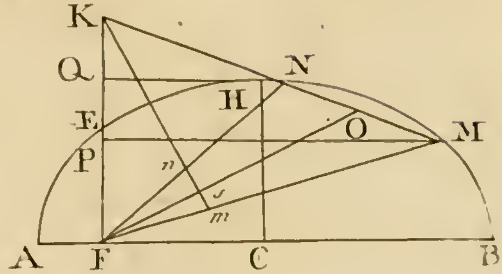



Fig 5.







4

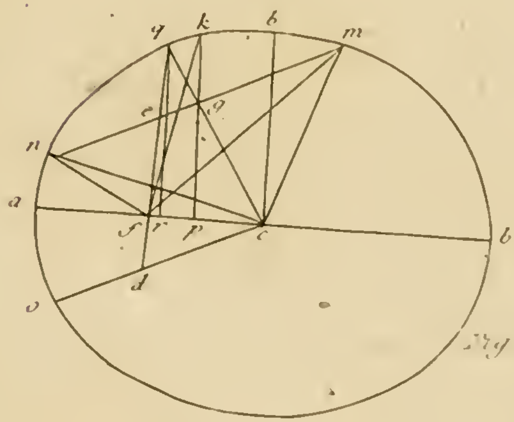



Fig 6. n 2

Fig 6 n 1

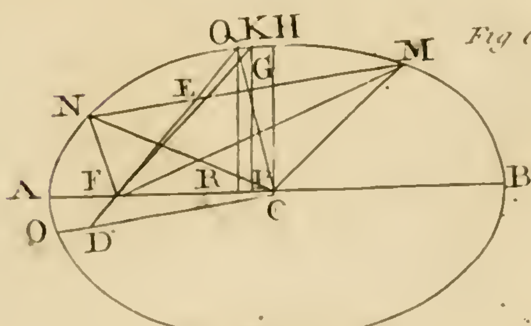


Fig 1

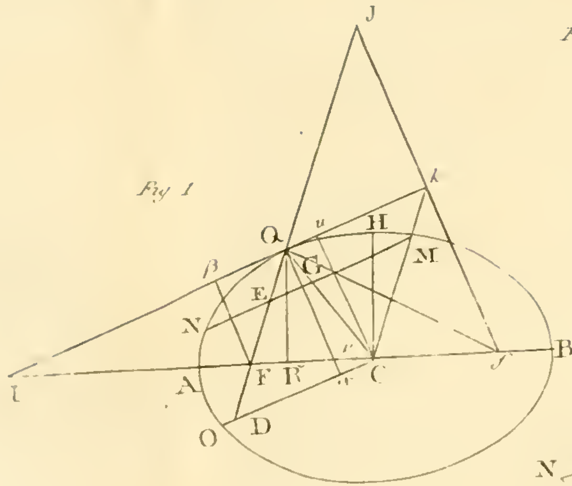



Fig 2

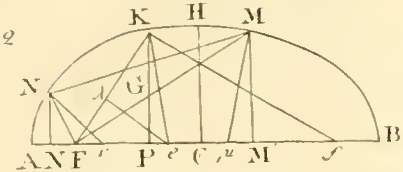



Fig 5

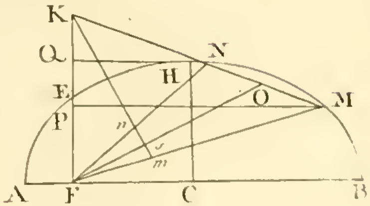



Fig 4

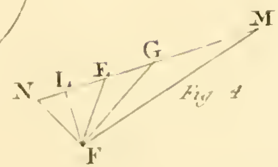



Fig 3

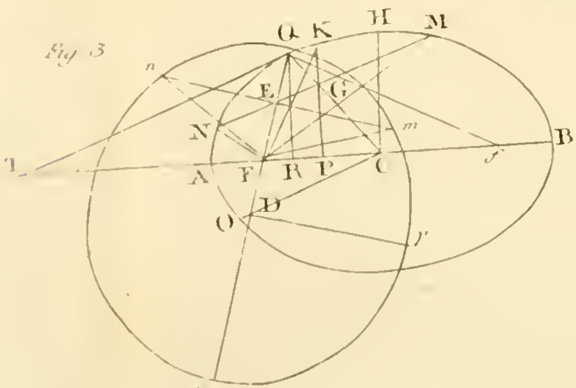



Fig 6 n 2

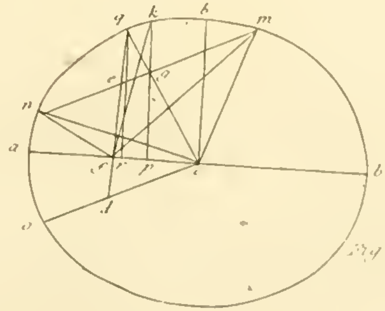



Fig 6 n 1

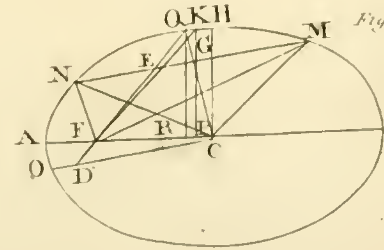


Fig. 8. n 1

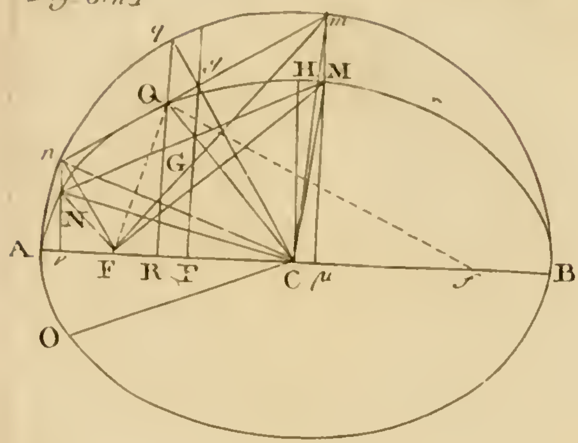



Fig. 8. n 2.

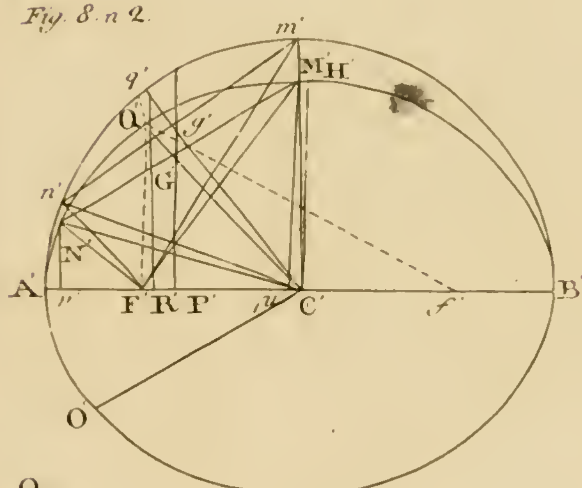


Fig. 7

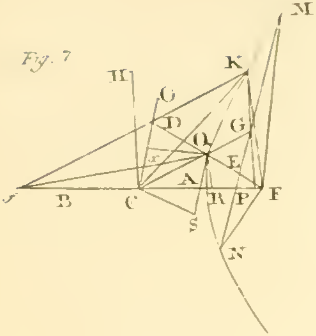



Fig 8. n 1

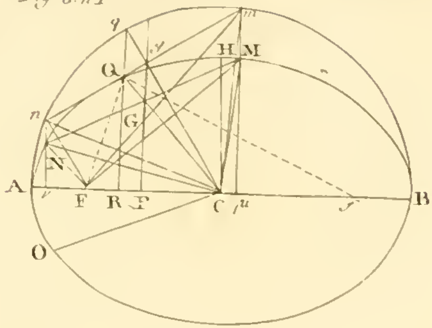



Fig 9.

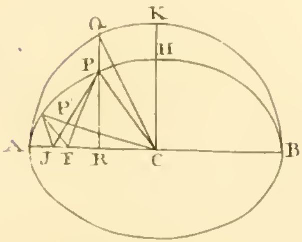



Fig 8 n 2

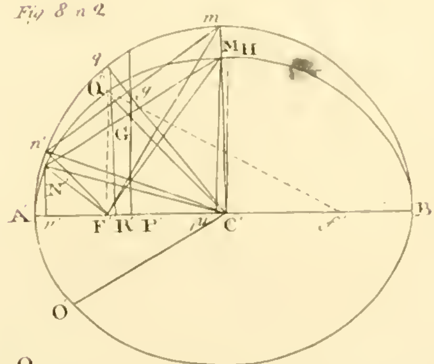



Fig 10

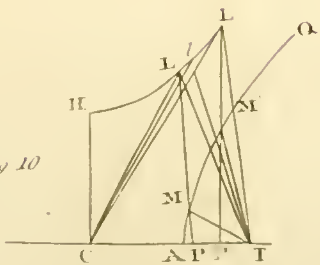
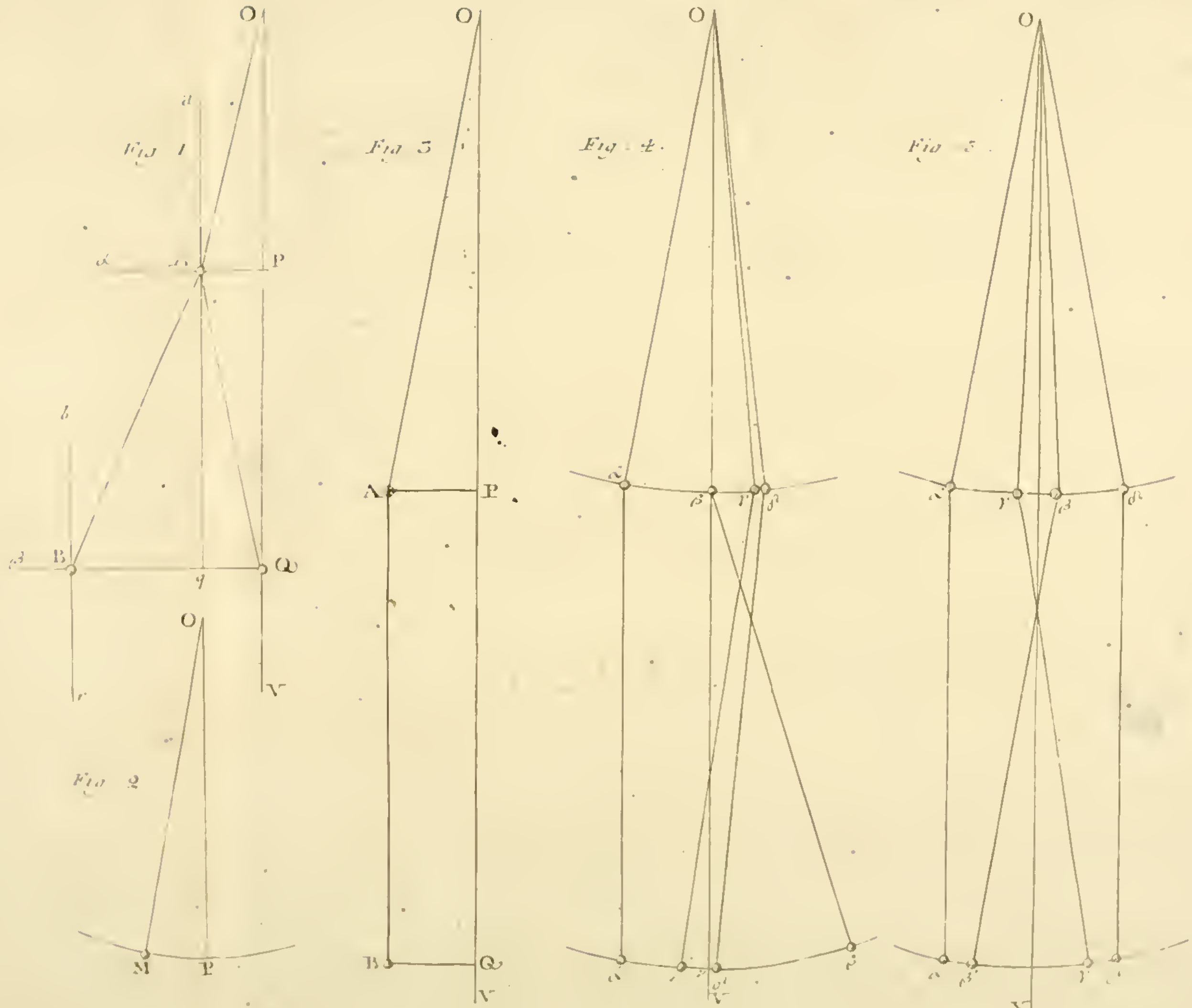


Fig. 5.




Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
O
P
Q
V
B
A
M

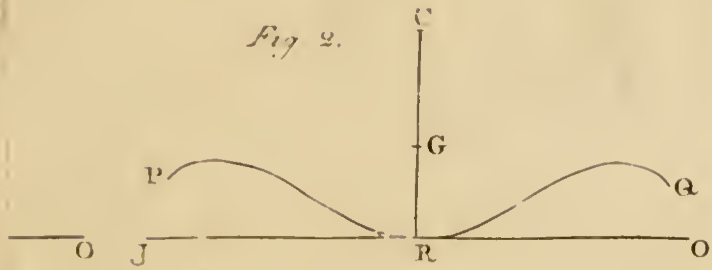



Fig. 2.

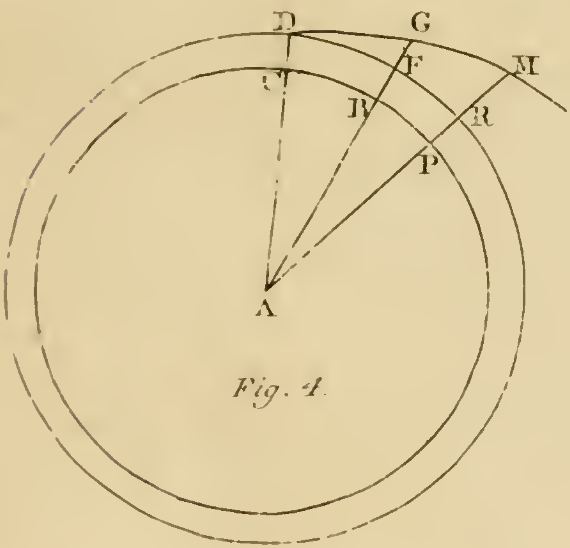



Fig. 4.

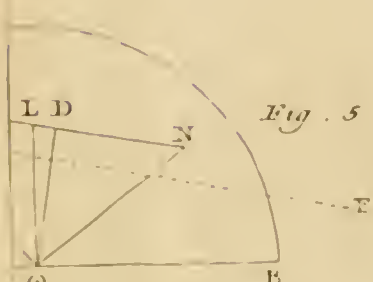



Fig. 5.

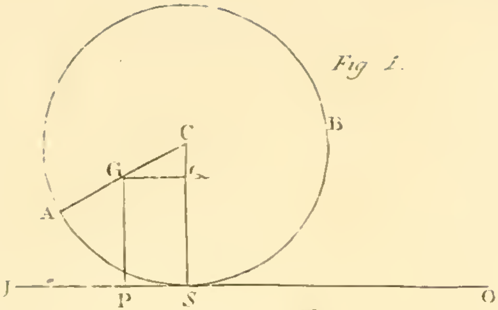



Fig 1.

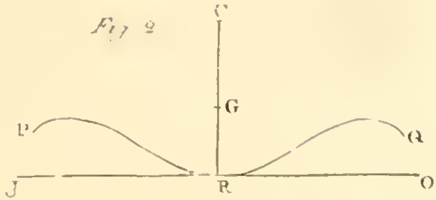



Fig 2

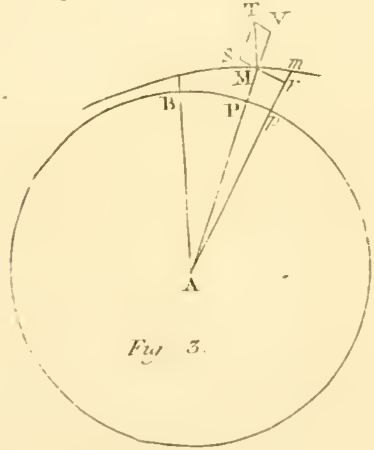



Fig 3.

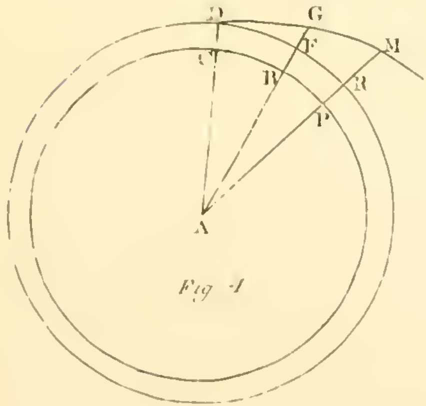



Fig 4

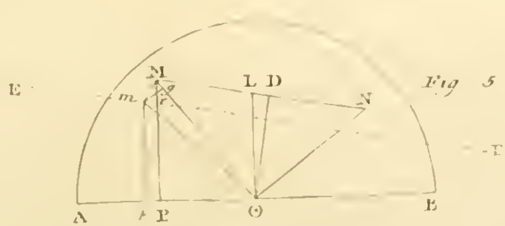
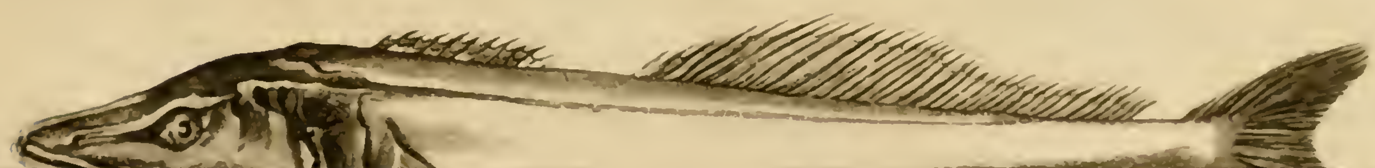



Fig 5


a
b
c
d
e
f



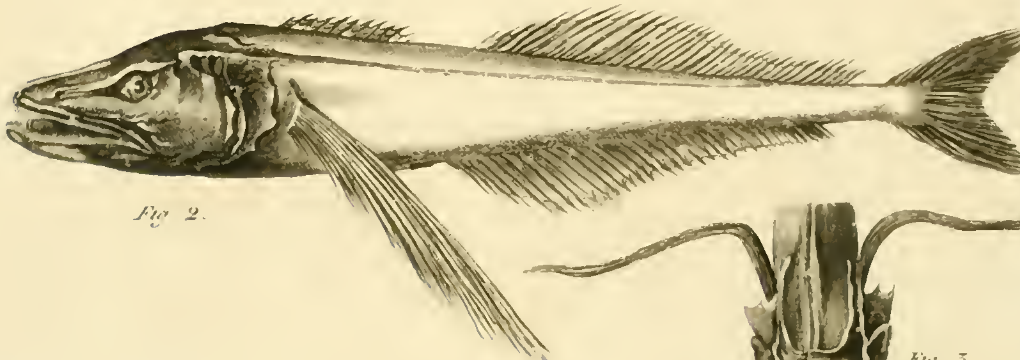


Fig 2.



Fig. 3.



Fig 1.

Nova Acta Acad. Imp. Sc. Petropol. Tom. 1. Tab. X

Fig. 7.

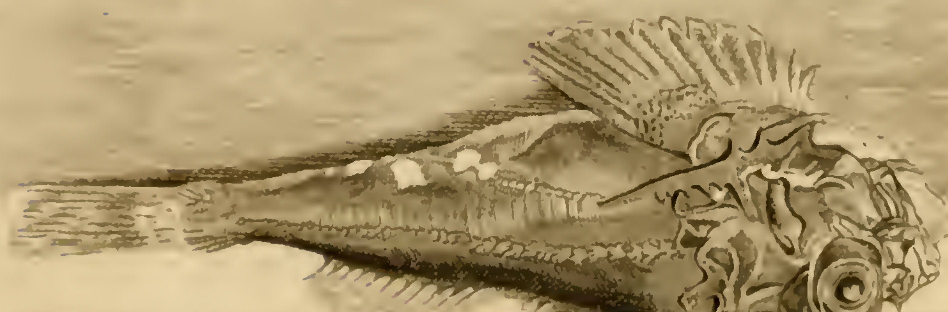


Fig 7.

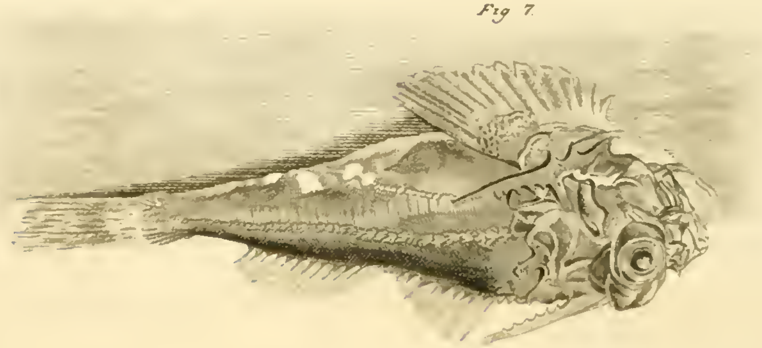


Fig. 5.

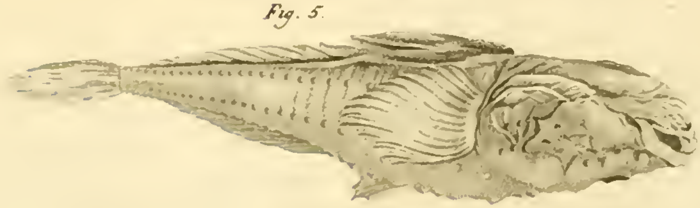


Fig 6

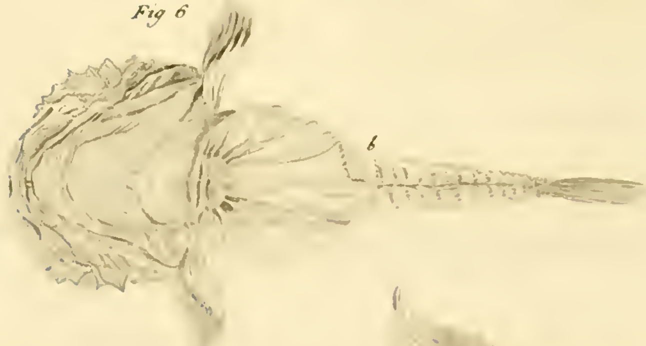



Fig. 4.

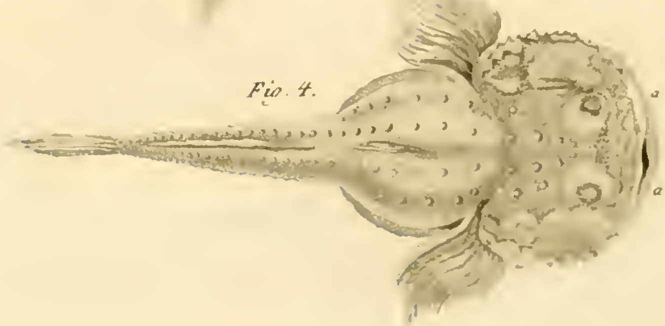




Fig. 10.

Fig. 10.

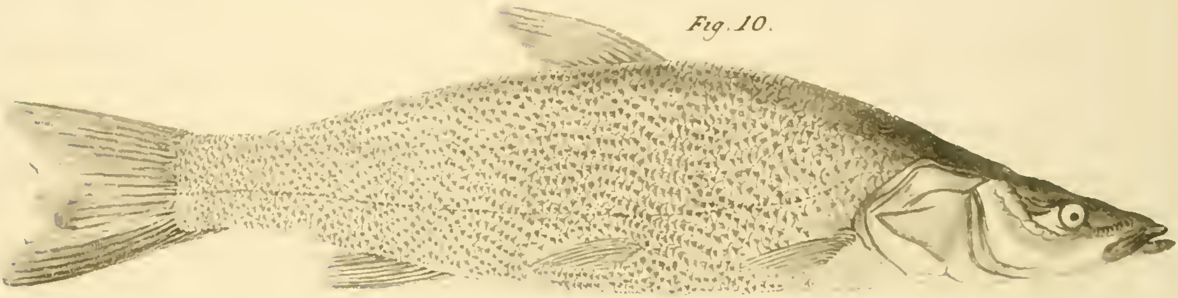


Fig. 8.

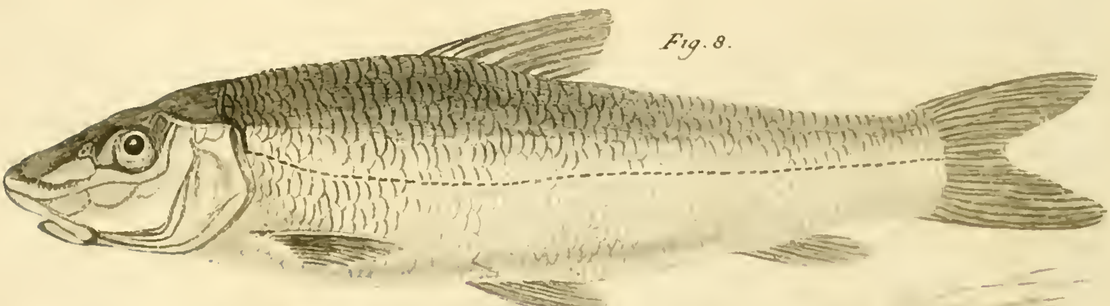


Fig. 9.





Fig. 11.

# Nova acta acad. ſc. Petropol. Tom. I.

Lettres du Dr Janſens a Oosterhout ſur des guériſons remarquables effectuées dans des cas deſeſpérés par l'emploi de l'air fixe
1.) ein Cyſtica (bei einem gefährlichen Nachtleriaanfieber p. 61.
2.) bei einem von einem Taubfieber verurſachten ... Durchfall ... einen hartnäckigen Naſenbluter p. 63
3. bei einer Hämorrhagie aus den Ohren p. 66
Reflexions ſur la neceſsité d'etudier la vertu des plantes indigenes par Lepechin. p. 88.
Lettre de M. le Conſeiller d'Etat de Khrapovitzki ſur un froment ſauvage et
Obſervation de Pallas ſur ce blé ſauvage p. 120
Es iſt das gemeine Secale Cereale, im wilden Zuſtande
Sur le ſpath fluor de Catherinenburg par Pallas p. 157
Wolff de ordine fibrarum muſcularium cordis. Diſſert. I. de actione fibrarum externarum ventriculi ſiniſtri. p. 231. t. 1.
Ferber reflexions ſur l'ancienneté relative des roches et des couches terreuſes qui compoſent la Croute du Globe terreſtre. p. 297.
Diſquiſitio chemica ſubſtantiae cujuſdam ſalinae quam Ruſſi fabricantur et aurifabris ſub nomine Salarka vendunt auctore Georgi. p. 327.
Linaria hybrida auct. Koelreuter. p. 339.
Piſcium novae ſpecies deſcriptae a Pallas
1.) Pleuronectes ſtellatus p. 347. t. IX f. 1.
2.) Callionymus baicalenſis p. 349. t. IX f. 2. 3.
3.) Gobius macrocephalus p. 353 t. X f. 4. 5. 6.
4.) Cottus diceraus p. 354. t. X. f. 7.
5.) Cyprinus Labeo. p. 355 t. XI. f. 8. 9.
6.) Cyprinus leptocephalus. p. 357. t. XI. f. 10.
7.) Silurus dauuricus p. 359. t XI. f. 11.
Nova ſpecies Acanthae (Acantha Patrinii) p. 336. t. VIII

AMNH LIBRARY
100127227